





LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

BEARBEITET

VON

O. FORT UND O. SCHLÖMILCH.

ERSTER TEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE

VON

O. FORT,

WEIL. PROFESSOR AM KÖNIGL. SÄCHS. POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

FÜNFTE AUFLAGE

BESORGT VON R. HEGER IN DRESDEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Bei der ersten Bearbeitung des jetzt in zweiter Auflage erscheinenden Lehrbuches der analytischen Geometrie der Ebene waren es hauptsächlich zwei Gesichtspunkte, welche ich fortwährend im Auge behielt. Was zuvörderst in materieller Hinsicht die Auswahl des Stoffes betrifft, so war mein Augenmerk darauf gerichtet, wenigstens innerhalb bestimmter Grenzen eine gewisse Vollständigkeit zu erzielen. Die mehr praktische Richtung meiner Zuhörer an der hiesigen polytechnischen Schule, für welche das Lehrbuch zunächst bestimmt ist, wies mich darauf hin, aus dem reichen Materiale, welches namentlich die Theorie der Linien zweiten Grades darbietet, besonders solche Sätze auszuwählen, welche eine konstruktive Anwendung gewähren. Ich habe mich bemüht, diese Sätze zu einem organischen Ganzen zu vereinigen, welches die Bestimmung hat, die Verschiedenartigkeit der Methoden der analytischen Geometrie klar hervortreten zu lassen. — In formeller Hinsicht war in betreff der Darstellung mein Streben besonders auf Vereinfachung des Kalküls mittelst geometrischer Deutung der Gleichungen und auf eine möglichst natürliche Verknüpfung der einzelnen Untersuchungen gerichtet. Die letztere Rücksicht ist namentlich für mich bei der Anordnung des Inhaltes der Kapitel IV bis VIII entscheidend gewesen. Da bei den in den ersten Kapiteln enthaltenen geometrischen Lehrsätzen grossenteils an Resultate angeknüpft werden konnte, welche ich als aus der Elementargeometrie bekannt voraussetzen durfte, so schien es mir zweckmässig, auch bei Untersuchung der Kegelschnitte von einer allgemeinen Eigenschaft dieser Linien auszugehen, welche sich leicht rein geometrisch begründen lässt. Sind aus dieser allgemeinen Eigenschaft die Kegelschnittformen nebst den zugehörigen Gleichungen gewonnen, so können dieselben nachher mittels der Methoden der analytischen Geometrie weiter verfolgt werden; aus diesen speciellen Diskussionen, welche sich auf bekanntes stützen, lässt sich dann leichter eine mit um so grösserer Strenge zu führende allgemeine Untersuchung ableiten. Die scheinbare Identität der Überschriften „die Kegelschnitte“ im vierten und „die Linien zweiten Grades“ im achten Kapitel findet in diesem Gedankengange

ihre Rechtfertigung. Am ersteren Orte tritt der stereometrische Ausgangspunkt in den Vordergrund, an der letzteren Stelle soll seine Beziehung zu den Gleichungen zweiten Grades erläutert werden.

Diesen der Hauptsache nach bereits in der Vorrede zur ersten Auflage niedergelegten Bemerkungen habe ich wenig hinzuzufügen, da der Inhalt der neuen Auflage nicht wesentlich von der ersten abweicht. Neu hinzugekommen ist nur der von der Quadratur der Hyperbel handelnde Abschnitt, sowie einzelnes bei der Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades. Der erstere Zusatz hat die Bestimmung, die auf die Quadratur der Kegelschnitte bezüglichen Untersuchungen zu vollkommener Abrundung zu bringen; bei der neuen Bearbeitung eines Teiles des achten Kapitels strebte ich danach, Betrachtungen, welche für den Anfänger in der Regel nicht ohne Schwierigkeit sind, eine grössere Schärfe und Klarheit zu verleihen. Aus demselben Streben sind eine Menge kleinerer Änderungen, welche fast jeder Paragraph enthält, hervorgegangen.

Dresden, Ostern 1863.

O. Fort.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die gegenwärtige dritte Auflage meiner analytischen Geometrie der Ebene unterscheidet sich von der zweiten nur durch eine Menge kleinerer, auf Strenge der Begründung und Klarheit des Ausdruckes bezüglicher Änderungen. Die Einführung einiger abgeänderter Bezeichnungen wurde durch den Wunsch, mit anderwärts üblichem in besseren Einklang zu kommen, bedingt. Wenn im übrigen der Inhalt des Buches derselbe geblieben ist und die neueren Theorien, namentlich der Gebrauch der Linienkoordinaten, sowie der homogenen Koordinaten, nicht Berücksichtigung gefunden haben, so ist daran zu erinnern, dass die Auswahl des Stoffes hauptsächlich mit Rücksicht auf das praktische Bedürfnis künftiger Techniker getroffen wurde. Dafür, dass ein Lehrbuch innerhalb der beschränkten Grenzen des vorliegenden auch für grössere Kreise Befriedigung gewährt, dürfte der rasche Absatz zweier starker Auflagen ein Zeugnis ablegen.

Dresden, im September 1871.

O. Fort.

Vorrede zur vierten Auflage.

Bei dem raschen Absatze, welchen auch die dritte Auflage des vorliegenden Werkes gefunden hat, und zwar in einem Zeitraume, in welchem von mir selbst am hiesigen Polytechnikum Vorlesungen über die analytische Geometrie der Ebene nicht gehalten worden sind, ergab sich für mich keine Veranlassung, rücksichtlich des Inhaltes des von mir bearbeiteten Teiles aus den in den früheren Vorreden festgestellten Grenzen in der nötig gewordenen neuen Auflage herauszutreten. Die von mir vorgenommenen Änderungen beziehen sich daher grossenteils nur auf die Form und verfolgen hauptsächlich den Zweck einer möglichst klaren Fassung des Ausdruckes. Kleine Zusätze sind zu demselben Zwecke nur an wenigen Stellen erforderlich gewesen.

Dresden, im April 1877.

O. Fort.

Vorrede zur fünften Auflage.

Der als Lehrer und Schriftsteller in gleicher Weise ausgezeichnete und verdiente Verfasser dieses Buches sah sich infolge andauernder Kränklichkeit Ostern 1879 veranlasst, sein Lehramt am Königl. Sächs. Polytechnikum niederzulegen; zwei Jahre darauf, am 6. Mai 1881, erlag er seinen schweren Leiden.

Nachdem dieses Werk gegen drei Jahrzehnte lang seine Brauchbarkeit und Zweckmässigkeit in Bezug auf Auswahl und Darstellung erwiesen hat, galt es bei der Bearbeitung der neuen Auflage zunächst, ihm die von der Hand des Verfassers verliehenen Vorzüge zu erhalten. Der Plan des Buches ist daher nicht erweitert worden; und da, wo einzelne Abschnitte umgearbeitet oder hinzugefügt worden sind, wird hoffentlich das Bestreben bemerkbar sein, die Klarheit und Deutlichkeit der Vortragsweise des Verfassers möglichst zu erreichen. Andrerseits lag aber auch die Verpflichtung vor, durch geeignete, in den Rahmen des Buches sich fügende Zusätze und

Überarbeitungen die Brauchbarkeit desselben zu erhöhen und für die Zukunft zu sichern.

Am Schluss des § 6 ist die Normalform der Gleichung der Geraden hervorgehoben worden. — Die schon bisher beim Kreise verwendete Methode der symbolischen Bezeichnung von Funktionen ist auch bei der Geraden in § 7 angewendet worden; damit hängen zwei neue hinzugekommene Beispiele in § 8 zusammen. — In § 10 wurde der Schluss erneuert. — In § 13 ergab sich eine einfachere Darstellung dadurch, dass der zwischen Brennpunkt und Direktrix liegende Scheitel zum Anfangspunkt genommen wurde. Die Umgestaltung dieses Abschnitts bedingte einige Änderungen des folgenden. — Die Ableitung der Beziehungen zwischen konjugierten Ellipsendurchmessern am Ende des § 22 ist durch Einführung der excentrischen Anomalie vereinfacht worden. — Die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, § 30, wurde vollständig neu bearbeitet. In der gegenwärtigen Gestalt ist die Untersuchung auf das rechtwinklige Koordinatensystem begründet; sie erreicht auf möglichst kurzem Wege das Ziel, in fertigen Formeln unzweideutige Auskunft über die Natur des dargestellten Gebildes, die Lage der Symmetrieachsen und die Hauptdimensionen zu geben. Zum Schluss wird die Invarianz der charakteristischen Zahlen nachgewiesen und dabei Bezug auf das schiefwinklige System genommen. — § 33 ist um zwei Beispiele vermehrt und die Einleitung zu § 37 umgeändert worden.

Möchten die Änderungen sich zweckmässig erweisen und das Buch in dieser neuen Ausgabe seine alten Freunde wiederfinden und neue sich erwerben!

Dresden, im April 1883.

R. Heger.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Das Gebiet der niederen Geometrie beschränkt sich auf die Untersuchung der Eigenschaften derjenigen räumlichen Gestalten, welche mit Benutzung des Lineals und Zirkels darstellbar sind, d. i. der geradlinigen Gebilde und des Kreises, sowie derjenigen Flächen und Körper, deren Entstehung in einfacher Weise auf diese beiden Grundformen zurückgeführt werden kann. Ihre Methode geht dabei im wesentlichen von der Anschauung aus, und wenn sie sich zu ihren Untersuchungen auch der reichen Hilfsmittel der Algebra bedient, so geschieht dies doch nur zu dem Zwecke, um die Formen von Grössenbeziehungen, welche ursprünglich der geometrischen Konstruktion entnommen wurden, umzubilden und dadurch zu Lehrsätzen oder zur Lösung von Aufgaben zu gelangen. Dieser Art von Anwendung der Arithmetik auf die Raumlehre gehört die sogenannte rechnende Geometrie und die gewöhnlich als besonderer Teil davon getrennte Trigonometrie an.

Bei jeder solchen Benutzung der Zahlenlehre zu geometrischen Untersuchungen ist die Möglichkeit vorausgesetzt, dass man die Zahlen ebenso, wie der Raum an keiner Stelle unterbrochen erscheint, als stetig veränderlich auffassen kann. Die Erweiterungen, welche die Zahlenreihe durch die Operationen der allgemeinen Zahlenlehre erlangt, geben hierzu die Mittel an die Hand. Während nämlich die Weite der Sprünge, welche beim Übergange von einer Zahl zu ihrer nächstfolgenden oder nächstvorhergehenden stattfinden müssen, durch die Einschiebung der gebrochenen Zahlen beliebig klein gemacht werden kann, gewährt die Einführung der Irrationalzahlen die Möglichkeit, die auch hierbei noch bleibenden Lücken auszufüllen; mittels der negativen Zahlen

wird aber die anfänglich vorhandene einseitige Begrenzung aufgehoben. Durch diese Erweiterungen wird die Reihe der auf einander folgenden Zahlen mit einer nach beiden Seiten unbegrenzten geraden Linie vergleichbar; der Übergang von einem Punkte dieser Geraden zu einem andern mit Durchlaufung aller möglichen Zwischenpunkte lässt sich durch den Übergang von einer Zahl zu einer andern darstellen.

Diese durch die stetige Veränderlichkeit der Zahlen erlangte Analogie zwischen den Zahl- und Raumgrössen ist für die Entwickelung der geometrischen Wissenschaft von der grössten Wichtigkeit geworden. Descartes (1596—1650) fand hierin die Mittel, auch Beziehungen der Lage in einer arithmetischen Form darzustellen und dadurch der Geometrie eine Untersuchungsmethode zu eröffnen, welche unabhängig von der unmittelbaren Anschauung der zu untersuchenden Raumgebilde bleibt.

Dieser Methode liegt die Bemerkung zu Grunde, dass, wenn man einer von zwei Zahlen, welche durch eine Gleichung an einander gebunden sind, der Reihe nach alle möglichen Werte annehmen lässt, die andere Zahl eine von der jedesmaligen Grösse der ersten abhängige Folge von Werten erlangt. Solchen am Faden einer Gleichung fortlaufenden veränderlichen Zahlen legte Descartes geometrische Deutungen unter und gewann durch dieses Hilfsmittel aus jeder Gleichung eine stetige Folge von Punkten der Ebene, deren geometrischer Ort durch ein bestimmtes, von der besonderen Natur der benutzten Gleichung abhängiges Bewegungsgesetz festgestellt ist. Die Gleichung ward so für ihn der arithmetische Ausdruck der Form einer Linie. Hiermit war einer neuen Wissenschaft, der analytischen Geometrie, die Entstehung gegeben*, durch welche die Raumlehre eine völlige Umgestaltung erlangt hat. Die Lehre von den Gleichungen zwischen veränderlichen Zahlen wird in ihr zu einer unerschöpflichen Bildungsquelle räumlicher Gestalten; zugleich gewährt sie aber auch die Mittel, durch neue, rein algebraische Untersuchungsmethoden die Eigenschaften dieser Gebilde zu entdecken.

---

* Die Grundlagen der neuen Wissenschaft sind in einem kleinen Werke von Descartes enthalten, welches 1637 unter dem einfachen Titel: „Geometrie“ in französischer Sprache erschien.

Während dieser Zweig der Geometrie durch Descartes auf Betrachtung der Linien in der Ebene beschränkt blieb, so erlangte er durch die Nachfolger desselben bald eine wesentliche Erweiterung, indem er sich auch des nach drei Dimensionen ausgedehnten Raumes bemächtigte. Parent (1666—1716) wendete zuerst drei veränderliche Zahlen an, um eine krumme Oberfläche durch eine Gleichung auszudrücken; namentlich aber erhielt diese erweiterte Anwendung der analytischen Geometrie ihre vollständige Entwickelung durch Clairaut (1713—1765) in einem Werke über die Linien doppelter Krümmung und die krummen Oberflächen. Seitdem hat eine grosse Zahl der vorzüglichsten Mathematiker sich die Fortbildung der neuen Disciplin zur Aufgabe gemacht.

Ihrem historischen Entwickelungsgange getreu zerfällt die analytische Geometrie, in Übereinstimmung mit der Einteilung der niederen Geometrie in Planimetrie und Stereometrie, in zwei Hauptteile: die analytische Geometrie der Ebene und die analytische Geometrie des Raumes. Die erstere benutzt die Lehre von den veränderlichen Zahlen zur Untersuchung der Linien in der Ebene, die letztere beschäftigt sich mit den Linien im Raume und den Flächen.

Die analytische Geometrie der Ebene, die hier zunächst unsere Aufgabe bilden soll, hat ihren Ausgang zu nehmen von den Methoden, mittels deren die Lage eines Punktes der Ebene in der Bezeichnungsweise dieser Wissenschaft ausgedrückt wird.

Erstes Kapitel.

Die Punkte in der Ebene.

§ 1.

Punkte in einer Geraden. Rechtwinkliges Koordinatensystem.

In einer im Punkte A einseitig begrenzten geraden Linie (einem Strahl) AX (Fig. 1) wird die Lage eines beliebigen Punktes P durch die Strecke AP, d. i. durch seinen Abstand vom Anfangspunkte vollständig bestimmt. Die Beschränkung, hierbei die Linie in A begrenzt anzunehmen, scheint deshalb notwendig, weil ausserdem derselbe Abstand zweien zu beiden Seiten von A gelegenen Punkten zukommen würde. Wir gelangen jedoch dahin, diese vorläufige Einschränkung zu beseitigen, wenn wir einen neuen Punkt A_1 zum Ausgangspunkt für die Messung der Abstände wählen und den Beziehungen, durch welche die frühere und jetzige Entfernung des Punktes P vom Anfange der Messung an einander geknüpft sind, allgemeine Geltung zuschreiben. Setzen wir nämlich $AP = x$, $A_1P = x_1$ und $AA_1 = a$, so folgt:

Fig. 1.

1) $$x = x_1 + a$$

und

2) $$x_1 = x - a.$$

Die letztere und somit auch die erste Gleichung findet aber für jede beliebige Lage des Punktes P Anwendung, wenn man für solche Punkte, bei denen $x < a$ ist, den Wert von x_1 negativ in Rechnung bringt. Haben daher z. B. P und P' gleiche Abstände von A_1, so kommen den von A_1 aus nach entgegengesetzter Richtung verlaufenden Strecken A_1P und A_1P' gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Zahlwerte zu.

Sowie wir in der obigen Figur von einem links gelegenen Punkte A der Linie AX ausgingen, konnten wir uns auch dieselbe Gerade anfänglich nach rechts begrenzt vorstellen und ganz wie vorher von ihrem Endpunkte nach A_1 übergehen. Wir gelangen hierdurch ohne Schwierigkeit zu ganz entsprechenden Beziehungen, gewinnen aber zugleich die Überzeugung, dass es lediglich Sache eines vorläufigen Übereinkommens ist, auf welcher Seite vom beliebig gewählten Anfangspunkte aus die Entfernungen aller übrigen Punkte derselben Geraden als positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen sind.

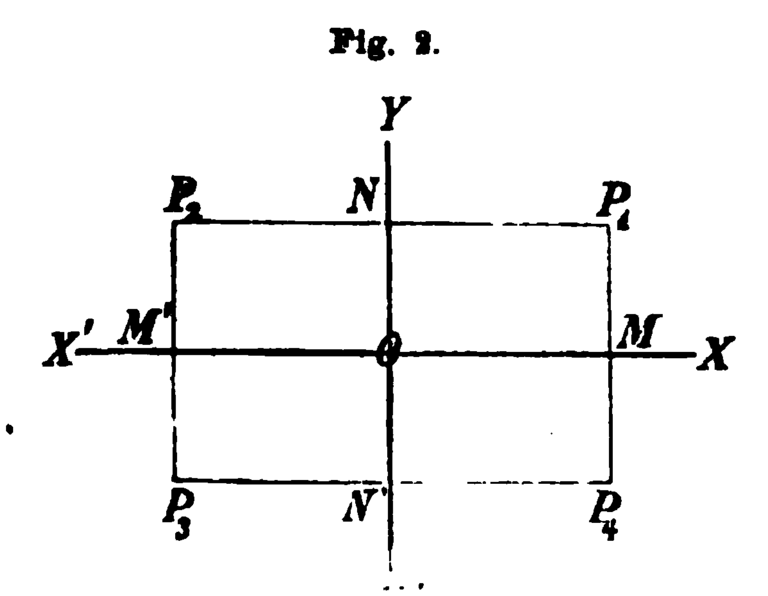
Werden die in 1) und 2) gewonnenen Gleichungen in der Form

$$x = x_1 + (+a) \quad \text{und} \quad x_1 = x + (-a)$$

geschrieben, so erhalten beide eine gemeinschaftliche Schreibweise und zeigen, wie man von den Entfernungen, welche einem anfänglich gewählten Anfangspunkte zugehören, zu den auf einen neuen Anfang bezogenen übergeht. Beachtet man hierbei, dass in Übereinstimmung mit dem Vorigen zu entgegengesetzten Verschiebungen des Anfangspunktes entgegengesetzte Vorzeichen gehören, so kann die Formel 1) als Inbegriff beider Gleichungen angesehen werden.

Wir gelangen nach diesen Vorbetrachtungen zu der Bestimmung der Lage eines an beliebiger Stelle in einer gegebenen Ebene gelegenen Punktes, wenn wir zunächst eine gerade Linie als seinen geometrischen Ort fixieren und in dieser seinen Abstand von einem festen Anfangspunkte bestimmen. Zu diesem Zwecke seien $X'X$ und $Y'Y$ (Fig. 2) zwei der Lage nach gegebene, auf einander senkrechte und im Punkte O sich schneidende Gerade derjenigen Ebene, in welcher die Lage eines Punktes P_1 bestimmt werden soll. Zieht man von P_1 die Gerade P_1N senkrecht auf $Y'Y$, also parallel mit $X'X$, so wird durch die Strecke $NP_1 = OM$ der Abstand der zu $Y'Y$ parallelen Geraden, in welcher P_1 gelegen ist, von der Linie $Y'Y$ gemessen. Wählt man hierauf in P_4P_1 den Punkt M

Fig. 2.



als Ausgang für die Messung der Entfernung aller übrigen Punkte, so ist in dieser Geraden durch die Strecke $MP_1 = ON$ die Lage von P_1 vollständig bestimmt. Dasselbe Resultat, nämlich die Abhängigkeit der Lage des Punktes P_1 von den Entfernungen NP_1 und MP_1, wird gewonnen, wenn wir anfänglich durch MP_1 die Lage der Geraden P_2P_1 fixieren und in ihr N als Anfangspunkt der Strecke NP_1 wählen.

Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so kommt es im wesentlichen darauf hinaus, die Lage eines Punktes in der Ebene durch seine senkrechten Abstände von zwei in dieser Ebene gelegenen, auf einander senkrechten Geraden zu bestimmen. Durch diese beiden festen Linien, auf welche die Lage aller anderen Punkte der Ebene bezogen werden soll, wird dieselbe in vier Felder, die Winkelräume XOY, YOX', $X'OY'$ und $Y'OX$ zerlegt. Insofern nun jedesmal ein Punkt in jedem dieser Felder dieselben Entfernungen von $X'X$ und $Y'Y$ besitzt, geht die bei Punkten in einer Geraden bereits vorhandene Unbestimmtheit in eine Vierdeutigkeit über, der wir uns jedoch, wie dort, entziehen, wenn wir die entgegengesetzte Richtung der Abstände durch einen Wechsel des Vorzeichens ausdrücken. Da es hierbei nur Sache eines vorgängigen Übereinkommens ist, wohin man die positiven und wohin die negativen Strecken zu verlegen hat, so soll ein für allemal die Bestimmung getroffen werden, dass, wo nichts anderes besonders festgesetzt wird, die Abstände nach der rechten Seite von $Y'Y$ aus und nach oben von $X'X$ als positive, die entgegengesetzt gelegenen dagegen negativ in Rechnung gebracht werden. Haben daher z. B. in Fig. 2 die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 die der Grösse nach gleichen Abstände $NP_1 = NP_2 = N'P_3 = N'P_4 = a$ und $MP_1 = M'P_2 = M'P_3 = MP_4 = b$, so ist nach unserem Übereinkommen die Entfernung des Punktes

P_1 von der Geraden $Y'Y = +a$, von der Geraden $X'X = +b$,
P_2 „ „ „ „ $= -a$, „ „ „ „ $= +b$,
P_3 „ „ „ „ $= -a$, „ „ „ „ $= -b$,
P_4 „ „ „ „ $= +a$, „ „ „ „ $= -b$,

Die beiden Linien $X'X$ und $Y'Y$, von denen die Lage aller Punkte der Ebene abhängig gemacht ist, haben die Namen **Koordinatenachsen** erhalten und bilden zusammengenommen ein **recht-**

winkliges Koordinatensystem. Ihr Durchschnittspunkt O führt die Benennung Anfangspunkt oder Ursprung der Koordinaten, oder auch Nullpunkt des Koordinatensystems; die Strecken MP und NP werden die Koordinaten des Punktes P genannt. Um die beiden Koordinaten, sowie die zugehörigen Achsen auseinander zu halten, werden wir die mit der Achse $X'X$ parallele Koordinate mit x, die zu $Y'Y$ parallele mit y bezeichnen und sie entsprechend ihrer Bezeichnung die x- und die y-Koordinate nennen; von den Achsen selbst soll $X'X$ mit dem Namen x-Achse oder Achse der x, $Y'Y$ mit dem Namen y-Achse oder Achse der y belegt werden. Nach dem obigen ist daher für den Punkt P_1 die x-Koordinate $x = +a$ und die y-Koordinate $y = +b$, für P_2 aber $x = -a$, $y = +b$ u. s. f.

Insofern in Fig. 2 $NP_1 = OM$ ist, muss es auch ausreichen, zur Bestimmung der Lage von P_1 nur die y-Koordinate MP_1 zu konstruieren und die auf der x-Achse abgeschnittene Strecke OM als die zugehörige x-Koordinate zu betrachten. Bei dieser zur Abkürzung des Verfahrens gebräuchlichen Konstruktion führt die auf der x-Achse abgeschnittene Koordinate den Namen Abscisse, das entsprechende y den Namen Ordinate des Punktes P_1. Beide Benennungen lassen sich dann auch auf die Achsen übertragen, so dass die x-Achse den Namen Abscissen- und die y-Achse den Namen Ordinatenachse erhält. Mit demselben Rechte kann allerdings auch die x-Koordinate NP_1 direkt als Ordinate konstruiert und das zugehörige y als Abscisse ON auf der y-Achse abgeschnitten werden; man entgeht jedoch dieser Unbestimmtheit, wenn man im letzteren Falle auch die Bezeichnung der Achsen verwechselt.

Die zuletzt mitgeteilten abgekürzten Konstruktionen gewinnen besonders dann eine nutzbare Anwendung, wenn in einer gegebenen Bildebene ein bestimmter Punkt mittels seiner Koordinaten aufgetragen werden soll. Aus dem Früheren erhellt, dass diese Aufgabe nur eine Lösung haben kann, wenn das Koordinatensystem und die zur Abmessung der geradlinigen Strecken dienende Längeneinheit fixiert ist.

Wird zur Darstellung eines Punktes nur eine seiner beiden Koordinaten gegeben, so genügt der gestellten Aufgabe jeder Punkt derjenigen Geraden, welche in einem der gegebenen Koordinate

gleichen Abstande parallel zur anderen Achse gelegt werden kann.* Die Gleichung

3) $$x = a$$

umfasst also die Lagen aller Punkte einer in der Entfernung a zur y-Achse gezogenen Parallelen, während die Gleichung

4) $$y = b$$

einer Parallelen zur x-Achse angehört. In gleicher Weise beziehen sich die Formeln

5) $$x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

auf alle in den beiden Koordinatenachsen gelegenen Punkte, und zwar die erstere auf die y-, die letztere auf die x-Achse. Durch das Zusammentreffen der beiden letzten Gleichungen wird der Koordinatenanfang bestimmt.

Die Gleichungen 3) bis 5) stellen einen ersten Fall dar, in welchem durch eine Gleichung der Lauf einer Linie bestimmt ist. Eine Gleichung, welche diese Eigenschaft besitzt, führt den Namen: Gleichung der Linie. In Nr. 3) ist daher die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse, in 4) die einer Parallelen zur x-Achse enthalten; Nr. 5) umfasst die Gleichungen der beiden Koordinatenachsen. — Da zur Bestimmung eines Punktes zwei Gleichungen der unter Nr. 3) und 4) enthaltenen Formeln notwendig sind, so zeigt sich, dass die angewendete Bestimmungsmethode im wesentlichen darin besteht, jeden Punkt in der Ebene des Koordinatensystems als Durchschnittspunkt zweier geraden Linien zu fixieren.

§ 2.

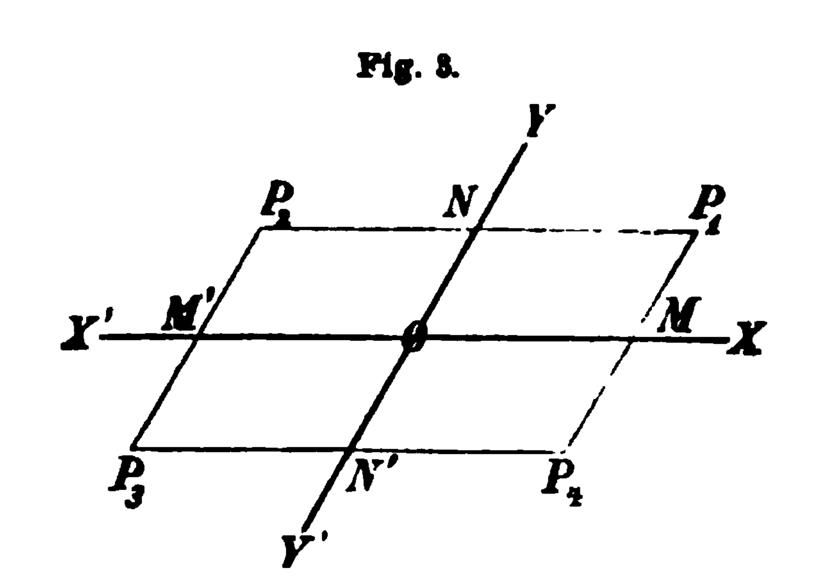
Schiefwinkliges Koordinatensystem. Polarkoordinaten.

Dieselben Beziehungen, welche im vorigen Paragraphen für die Lage eines Punktes gegen ein rechtwinkliges Koordinatensystem aufgestellt wurden, finden auch für zwei einen beliebigen schiefen Winkel einschliessende Koordinatenachsen Anwendung, wenn man nur die Koordinaten des Punktes nicht mehr in senkrechter Richtung, sondern in einer zu den Achsen parallelen Lage misst. Fig. 2

* Durch die nötige Rücksicht auf die Vorzeichen der Koordinaten werden hierbei die beiden in gleichem Abstande von einer Geraden gelegenen Parallelen unterschieden.

geht hierbei in Fig. 3 über, an welcher alle auf die erstere Figur bezüglichen Betrachtungen wiederholt werden können. — Der von den positiven Achsenseiten eingeschlossene zwischen 0 und 180° gelegene Winkel XOY führt hier den Namen Koordinatenwinkel, das System selbst heisst ein schiefwinkliges Koordinatensystem. Alle übrigen Benennungen werden vom rechtwinkligen System übertragen.

Fig. 3.



Die rechtwinkligen und schiefwinkligen Koordinaten lassen sich in dem Namen Parallelkoordinaten zusammenfassen.

Die Anwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems führt grossenteils zu einfacheren Rechnungen, als die Wahl eines schiefwinkligen, doch giebt es auch Fälle, bei denen durch letzteres eine Vereinfachung erlangt wird. Vorläufig beschränken wir uns auf eine Untersuchung, welche unabhängig vom Koordinatenwinkel für beide Arten von Parallelkoordinaten Geltung hat.

Wird die y-Achse eines Parallelkoordinatensystems parallel zu sich selbst um eine auf der x-Achse gemessene Strecke a verschoben, so verkleinern sich hierdurch die Abscissen um diese Grösse a, wenn die Verschiebung nach der Seite der positiven x vor sich geht; sie nehmen dagegen um dieselbe Strecke zu, sobald die Verschiebung im entgegengesetzten Sinne stattfindet. Bezeichnen wir mit x die auf die anfängliche y-Achse bezogene Abscisse eines beliebigen Punktes, dagegen mit x_1 die entsprechende Entfernung desselben Punktes von der neuen Achse, so lassen sich beide Fälle in der Formel

1) $$x = x_1 + a$$

zusammenfassen, wenn nur ein nach der Seite der negativen x liegendes a auch als negative Abscisse in Rechnung gezogen wird Die Analogie mit der im § 1 besprochenen Verschiebung des Anfangspunktes für Messung der Abstände von Punkten in einer Geraden enthält hierfür den Beweis. — Wird ferner die x-Achse um eine auf der y-Achse gemessene Strecke b parallel zu sich selbst verschoben und bezeichnet man dabei mit y und y_1 die ursprüng-

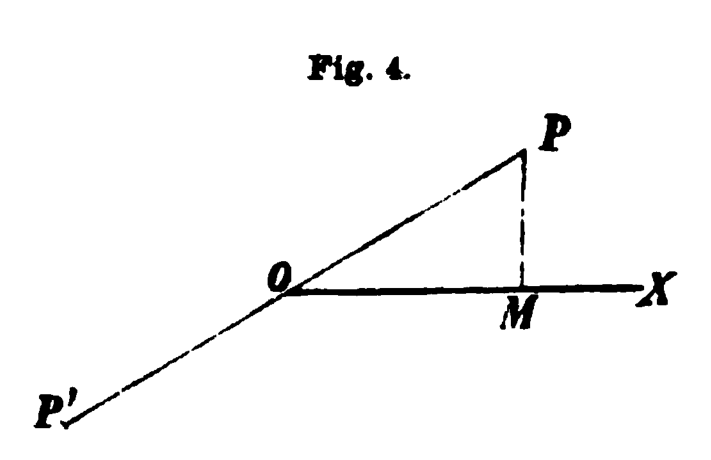
lichen und neuen Ordinaten eines Punktes der Koordinatenebene, so ergiebt sich in gleicher Weise, wie vorhin, das Resultat:

$$2) \qquad y = y_1 + b.$$

Insofern a und b die nach der Richtung der x und y gemessenen Verschiebungen beider Achsen bezeichnen, stellen sie zugleich die Verschiebungen des den Achsen gemeinschaftlichen Punktes dar, oder bilden mit anderen Worten die Koordinaten des neuen Anfangspunktes. Bestätigt wird dieses Resultat, wenn man in 1) und 2) nach Anleitung von 5) in § 1 für den neuen Koordinatenanfang $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ setzt. Der Inhalt der Formeln 1) und 2) lässt sich hiernach zu der Regel zusammenfassen, dass bei paralleler Achsenverschiebung jede der beiden ursprünglichen Koordinaten eines Punktes ausgedrückt wird durch die algebraische Summe aus der entsprechenden neuen Koordinate desselben Punktes und der des neuen Anfanges.

Zu einer von dem Vorigen wesentlich verschiedenen Methode, die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, gelangt man durch Vertauschung der parallel mit sich selbst verschiebbaren Linie, welche bei Anwendung der Parallelkoordinaten alle Punkte der Ebene in sich aufnehmen muss, mit einer um einen festen Punkt drehbaren Geraden. Dies geschieht in den sogenannten **Polarkoordinaten**, welche die Lage eines jeden Punktes der Koordinatenebene durch seinen Abstand von einem festen Punkte — dem **Pol** — und den Winkel ausdrücken, den seine geradlinige Entfernung vom Pole mit einer festen durch den Pol gelegten Achse (einem vom Pol ausgehenden Strahl) einschliesst. Stellt nämlich OX in Fig. 4 die Achse des Polarkoordinatensystems dar, die wir uns im Pole O begrenzt, nach X zu aber unbegrenzt vorzustellen haben, so wird die Lage des Punktes P durch den Abstand OP — seinen sogenannten **Radiusvektor** oder **Leitstrahl** — bestimmt, wenn ausserdem der Winkel XOP gegeben ist, den dieser Radiusvektor mit der Achse bildet, nebst der Drehrichtung, in welcher dieser Winkel gemessen werden soll. Wir wollen den Leitstrahl OP mit r und den Winkel XOP,

Fig. 4.



welcher die Anomalie, die Amplitude oder auch der Polarwinkel genannt wird, mit φ bezeichnen; r und φ bilden dann die Polarkoordinaten des Punktes P.

Lässt man den Winkel φ immer in derselben Drehrichtung von OX aus von 0 bis 360° wachsen, so geht der bewegliche Radiusvektor, der hierbei von O nach P hin unbegrenzt angenommen werden muss, durch alle Punkte der Ebene hindurch, ohne dass er rückwärts über O hinaus verlängert zu werden braucht. Haben also z. B. die in eine Gerade zusammenfallenden Strecken OP und OP' dieselbe Grösse, so kommen den Punkten P und P' gleiche Werte von r zu, während die Anomalie des letzteren Punktes um 180° grösser ist, als die des Punktes P. Solange es daher nur gilt, die Lage aller Punkte der Ebene durch Polarkoordinaten zu fixieren, können negative Leitstrahlen ebensowohl ausgeschlossen werden, als Polarwinkel ausserhalb der Grenzen 0 bis 360°. Sollen dagegen alle möglichen Werte von r und φ, wie sie sich z. B. als Wurzeln einer Gleichung ergeben können, geometrisch gedeutet werden, so ist es auch nötig, negative Werte von r und φ, sowie Winkel zuzulassen, welche eine volle Umdrehung überschreiten. Negative Leitstrahlen sind hierbei in Übereinstimmung mit den bei den Parallelkoordinaten getroffenen Bestimmungen als entgegengesetzt gerichtete Strecken zu deuten; negative Polarwinkel entsprechen in analoger Weise einer entgegengesetzten Drehrichtung; Winkelwerte endlich, welche über eine Umdrehung hinausgehen, werden durch die Bemerkung erledigt, dass, wenn man einen Winkelschenkel festhält und dem andern eine volle Umdrehung, sei es nach der einen oder andern Seite, giebt, dadurch immer die ursprüngliche Schenkellage wieder hergestellt wird.

Zwischen den Polar- und den rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes finden sehr einfache Beziehungen statt, wenn man den Pol mit dem Koordinatenanfange des rechtwinkligen Systems und die Achse der Polarkoordinaten mit der positiven Seite der x-Achse zusammenfallen lässt, wobei die Grösse des Winkels φ in der Drehrichtung von OX aus nach der Seite der positiven y hin wachsen soll. Aus Fig. 4, worin unter den gegebenen Bedingungen OM und MP die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P darstellen, ergiebt sich dann unmittelbar:

$$3) \qquad x = r \cos\varphi, \qquad y = r \sin\varphi.$$

Die allgemeine Giltigkeit dieser beiden Relationen zeigt sich, sobald man in Fig. 2 die Leitstrahlen der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruiert, wobei, wenn der Polarwinkel von P_1 mit α bezeichnet wird, die Polarwinkel der drei übrigen Punkte die Werte $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ und $360^0 - \alpha$ erhalten. Beschränkt man sich zunächst auf positive r und Werte von φ zwischen den Grenzen 0 und 360^0, so bleiben hierbei r und die absoluten Werte von x und y ungeändert, während die früher angegebenen verschiedenen Vorzeichen der rechtwinkligen Koordinaten der vier mit P bezeichneten Punkte aus den Vorzeichen der Sinus und Cosinus ebenfalls richtig hervorgehen; es bleibt also auch die Richtigkeit der obigen Formeln bestehen. Werden nun negative Werte von r aufgenommen, so führen die Koordinatenbezeichnungen $-r$ und φ, sowie $+r$ und $180^0 + \varphi$ zu derselben Lage eines Punktes; die Vertauschung dieser beiderseitigen Werte ist aber ohne Einfluss auf die Richtigkeit der Gleichungen 3), weil dabei beide Faktoren der rechten Teile derselben gleichzeitig ihre Vorzeichen ändern. Was endlich negative Werte des Winkels φ betrifft, sowie solche Werte, welche 360^0 überschreiten, so lassen sich dieselben durch Hinzu- und Hinwegnehmen einer ganzen Anzahl von Umdrehungen immer auf Winkel zurückführen, welche zwischen den Grenzen 0 und 360^0 enthalten sind. Dabei bleibt aber die Schenkellage und hiermit auch die Grösse der trigonometrischen Funktionen ungeändert; die Formeln 3) bleiben also zu Recht bestehen.

So wie diese Gleichungen dazu dienen, um von den gegebenen Polarkoordinaten eines Punktes zu seinen rechtwinkligen überzugehen, so erhält man Formeln zur Lösung der entgegengesetzten Aufgabe, wenn man die ersteren auf r und φ reduciert. Werden nämlich beide Gleichungen quadriert und addiert, so entsteht:

$$4) \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad \text{also} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

während man durch Division zu der Gleichung

$$5) \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

gelangt. Die Unbestimmtheit, welche die Formeln 4) und 5) sowohl durch das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel als durch die Vieldeutigkeit eines durch seine Tangente gegebenen Winkels herbeiführen, liegt in der Natur der Sache, wird aber dadurch be-

seitigt, dass durch die besonderen Vorzeichen von x und y im voraus der Quadrant gegeben ist, in welchem der durch r und φ zu bestimmende Punkt gelegen sein muss.

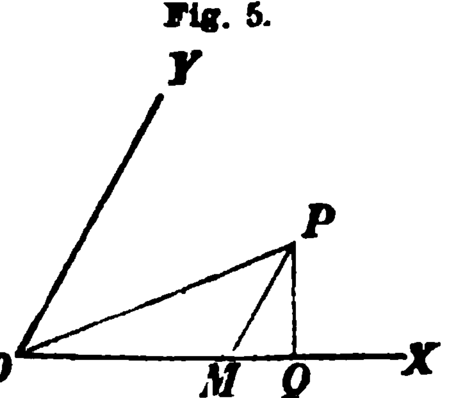


Fig. 5.

Etwas komplicierter gestalten sich die Beziehungen zwischen den schiefwinkligen und Polarkoordinaten eines Punktes, wobei wieder beide Systeme den oben aufgestellten Bedingungen unterworfen werden sollen. Wir halten uns hierbei an Fig. 5, wo $OM = x$ und $MP = y$ die schiefwinkligen Koordinaten des Punktes P, $OP = r$ und $\angle MOP = \varphi$ seine Polarkoordinaten darstellen. Der Koordinatenwinkel XOY soll mit ω bezeichnet werden. Nimmt man ein rechtwinkliges System mit demselben Anfangspunkte und derselben x-Achse zu Hilfe, in welchem OQ und QP die Koordinaten des Punktes P darstellen, so haben nach den Gleichungen 3) diese Koordinaten für jede Lage des Punktes P die Werte $r \cos \varphi$ und $r \sin \varphi$. Wird ferner der Koordinatenanfang in diesem Hilfssystem nach M verschoben, so erlangen die neuen rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P, nämlich MQ und QP, in gleicher Weise die Werte $y \cos \omega$ und $y \sin \omega$. Da nun bei dieser Verschiebung der neue Koordinatenanfangspunkt im ursprünglichen System die Koordinaten x und 0 besitzt, so folgt aus den Gleichungen 1) und 2) dieses Paragraphen:

$$6) \qquad r \cos \varphi = y \cos \omega + x, \quad r \sin \varphi = y \sin \omega.^*$$

Wird hierin auf x und y reduciert, so folgt:

$$7) \qquad x = \frac{r \sin(\omega - \varphi)}{\sin \omega}, \quad y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \omega}.$$

Werden ferner die beiden Gleichungen 6) quadriert und addiert, so erhält man:

* Da die linken Seiten beider Gleichungen die Projektionen von r auf die x-Achse und eine rechtwinklig hierzu durch O gelegte y-Achse darstellen, so müssen sie auch die Projektionen der aus x und y zusammengesetzten gebrochenen Linie OMP ausdrücken, welche mit r im Anfangs- und Endpunkte übereinstimmt. Beide Gleichungen enthalten hiernach den bekannten Satz, dass die Projektion einer gebrochenen Linie der algebraischen Summe der Projektionen der diese Linie zusammensetzenden Strecken gleich ist.

8) $$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos\omega,$$

während man durch Division derselben beiden Gleichungen zu dem Resultate

9) $$\tan\varphi = \frac{y \sin\omega}{y \cos\omega + x}$$

gelangt. — Die allgemeine Giltigkeit dieser Gleichungen folgt daraus, dass die dabei zu Grunde gelegten Formeln für jede Lage des Punktes P Geltung haben.

§ 3.

Aufgaben.

Durch die bis jetzt gewonnenen Koordinatenbegriffe nebst ihren gegenseitigen Beziehungen sind wir in den Stand gesetzt, mehrfache Aufgaben zu lösen. Folgende mögen hier Platz finden.

I. Durch die gegebenen Koordinaten zweier Punkte P und P_1 ihre Entfernung P_1P auszudrücken.

A. Bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten (Fig. 6).

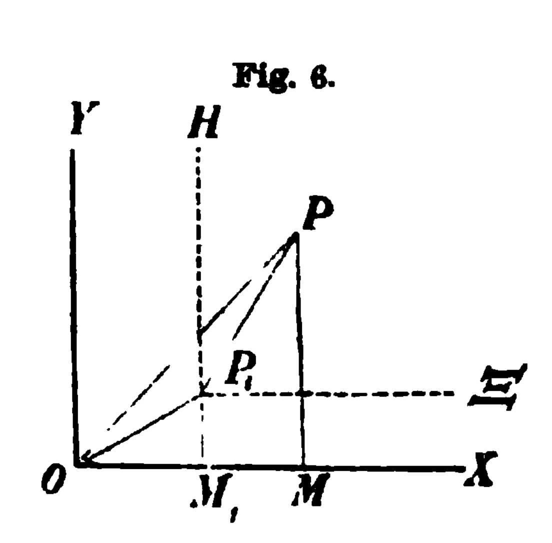


Fig. 6.

Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten OM und MP des Punktes P und x_1, y_1 die entsprechenden Grössen für P_1; ferner werde die Entfernung P_1P mit e bezeichnet.

Wir verschieben die gegebenen Koordinatenachsen OX und OY parallel zu sich selbst in die Lage von $P_1\Xi$ und P_1H, so dass P_1 zum neuen Koordinatenanfange wird, und bezeichnen mit ξ und η die auf dieses neue System bezogenen Koordinaten des Punktes P. Dann ist nach Formel 4) im § 2

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Zugleich entsteht aus 1) und 2) desselben Paragraphen

$$x = \xi + x_1 \quad \text{und} \quad y = \eta + y_1,$$

also auch:

$$\xi = x - x_1 \quad \text{und} \quad \eta = y - y_1.$$

Die Verbindung dieser Formeln giebt:

1) $$e^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

oder

$$e = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}.$$

Die allgemeine Geltung der zu Grunde gelegten Formeln lässt dieses Resultat als unabhängig von der besonderen Lage der Punkte P und P_1 erscheinen.

B. Ist das Koordinatensystem ein schiefwinkliges mit dem Koordinatenwinkel ω, so führt das im Vorigen angewendete Verfahren bei Benutzung der Gleichung 8) in § 2 zu dem Resultate:

2) $$e^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + 2\,(x - x_1)\,(y - y_1)\cos\omega\,.$$

C. Sind endlich P und P_1 durch ihre Polarkoordinaten r, φ und r_1, φ_1 bestimmt, so dass z. B. $OP = r$ und $\angle MOP = \varphi$, so lässt sich die in diesen Werten ausgedrückte Entfernung leicht aus der Gleichung 1) ableiten. Werden nämlich die hierin enthaltenen Klammern aufgelöst, so ergiebt sich durch Substitution der in den Formeln 3) und 4) des vorigen Paragraphen enthaltenen Werte mit Hilfe der goniometrischen Relation

$$\cos(\varphi - \varphi_1) = \cos\varphi \,.\, \cos\varphi_1 + \sin\varphi \,.\, \sin\varphi_1$$

das Resultat:

3) $$e^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1).$$

Da dasselbe unmittelbar dem Dreiecke POP_1 entnommen werden kann, so lässt sich der im Vorigen enthaltene Gedankengang auch umkehren. Setzt man nämlich den der Figur entnommenen Wert von e^2 in Nr. 3) dem unter 1) aufgestellten gleich, so erhält man nach Auflösung der Klammern und Streichung der nach der Formel 4) in § 2 gleichen Werte zunächst:

$$2rr_1\cos(\varphi - \varphi_1) = 2xx_1 + 2yy_1\,.$$

Mit Benutzung der Gleichungen 3) des vorigen Paragraphen gelangt man hieraus zu der goniometrischen Formel für den Cosinus der Winkeldifferenz zurück.

II. Aus den Koordinaten der Punkte P und P_1 den Flächeninhalt des zwischen diesen beiden Punkten und dem Koordinatenanfange enthaltenen Dreiecks zu berechnen (Fig. 6).

Behalten wir alle früheren Bezeichnungen bei und setzen ausserdem die Fläche des zu berechnenden Dreiecks $= \Delta$, so giebt bei Anwendung von Polarkoordinaten die Figur für die doppelte Fläche den Ausdruck

4) $$2\Delta = rr_1\sin(\varphi - \varphi_1),$$

unter der Voraussetzung, dass $\varphi > \varphi_1$ und dabei die Differenz der beiden Anomalien kleiner als 180^0 ist. Überschreitet die Differenz den letzteren Wert, so ist die kleinere Anomalie in den Minuenden zu setzen, wenn man ein negatives Resultat vermeiden will, welches übrigens seinem absoluten Werte nach den gesuchten Flächeninhalt ebenfalls richtig darstellen würde. Die Vergleichung der beiden im Vorigen erwähnten Fälle führt zu dem Resultate, dass die Gleichung 4) allgemein die Dreiecksfläche darstellt, sobald man mit P denjenigen der beiden Punkte bezeichnet, welcher bei Umgehung des Dreiecksumfanges in der für die Messung des Winkels φ festgestellten Drehrichtung dem Koordinatenanfang O vorhergeht.

Wollen wir jetzt zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen, so ist $\sin(\varphi - \varphi_1)$ zu entwickeln, worauf die Formeln 3) des vorigen Paragraphen benutzt werden können. Wir erhalten:

$$2\Delta = r \sin\varphi \,.\, r_1 \cos\varphi_1 - r\cos\varphi \,.\, r_1 \sin\varphi_1$$

und hieraus:

$$5) \qquad 2\Delta = yx_1 - xy_1 \,.$$

Fig. 6 führt unmittelbar zu demselben Resultate, wenn man das Dreieck POP_1 als Differenz des rechtwinkligen Dreiecks OMP und des Vierecks $OMPP_1$ auffasst und letzteres wieder in das rechtwinklige Dreieck OM_1P_1 und das Trapez M_1MPP_1 zerlegt. Dann ist

$$2\Delta = xy - x_1y_1 - (y + y_1)(x - x_1)$$

und die Ausführung der in den Klammern angedeuteten Multiplikation leitet zu der Gleichung 5) zurück.

Der letztere Weg ist noch insofern von Interesse, als, wenn man auf ihm zu der genannten Formel gelangt und dieselbe dann mit der oben gewonnenen Gleichung 4) zusammenstellt, sich hierdurch der Ausdruck für den Sinus einer Winkeldifferenz finden lässt. Man erhält nämlich bei Division durch rr_1:

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \frac{y}{r} \,.\, \frac{x_1}{r_1} - \frac{x}{r} \,.\, \frac{y_1}{r_1},$$

und dies giebt mit Benutzung der schon mehrfach gebrauchten Relationen zwischen Polar- und rechtwinkligen Koordinaten:

$$\sin(\varphi - \varphi_1) = \sin\varphi \,.\, \cos\varphi_1 - \cos\varphi \,.\, \sin\varphi_1 \,.$$

Bei Anwendung schiefwinkliger Koordinaten mit dem Koordinatenwinkel ω sind in der obigen Gleichung

$$2\Delta = r \sin\varphi \,.\, r_1 \cos\varphi_1 - r\cos\varphi \,.\, r_1 \sin\varphi_1$$

die in Nr. 6 des vorigen Paragraphen enthaltenen Werte zu substituieren. Nach Streichung der sich aufhebenden Glieder bleibt dann das Resultat:

$$6)\qquad 2\Delta = (yx_1 - xy_1)\sin\omega.$$

III. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks zu berechnen, wenn die Parallelkoordinaten seiner drei Eckpunkte gegeben sind.

Die Eckpunkte mögen P, P_1, P_2, ihre Koordinaten der Reihe nach x, x_1, x_2 und y, y_1, y_2 heissen; die Dreiecksfläche werde wieder mit Δ bezeichnet. Verschieben wir beide Achsen parallel zu sich selbst, bis der Punkt P_2 Koordinatenanfang wird, so sollen ξ, η und ξ_1, η_1 die auf das neue System bezogenen Koordinaten der Punkte P und P_1 sein.

Wird zunächst ein rechtwinkliges Koordinatensystem angewendet, so ergiebt sich aus Formel 5):

$$2\Delta = \eta\xi_1 - \xi\eta_1.$$

Nach Analogie der bei Aufgabe I. unter A. angestellten Betrachtungen ist aber

$$\xi = x - x_2, \qquad \eta = y - y_2,$$
$$\xi_1 = x_1 - x_2, \qquad \eta_1 = y_1 - y_2;$$

folglich erhält man:

$$2\Delta = (y - y_2)(x_1 - x_2) - (x - x_2)(y_1 - y_2)$$

und nach Ausführung der Rechnung und geänderter Ordnung der einzelnen Glieder:

$$7)\qquad 2\Delta = (yx_1 - xy_1) + (y_1x_2 - x_1y_2) + (y_2x - x_2y)$$

oder auch:

$$8)\qquad 2\Delta = y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1).$$

Beide Formeln sind so gesetzmässig gebildet, dass sie ohne weiteres hingeschrieben werden können, wenn man den Kreislauf beachtet, welcher im Wechsel der Stellenzeiger der einzelnen Koordinaten stattfindet. Je nachdem man bei der Numerierung der einzelnen Eckpunkte dieselben nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung durchläuft, erhält man für den Flächeninhalt einen positiven oder einen negativen Ausdruck; aus der oben bei Gleichung 4) gemachten Bemerkung kann leicht abgeleitet werden, dass jedesmal ein positives Resultat entsteht, wenn man

die drei Eckpunkte des Dreiecks mit P, P_1 und P_2 in der Reihenfolge bezeichnet, nach welcher sie zu durchlaufen sind, wenn die Drehrichtung mit derjenigen übereinstimmen soll, welche die positive Seite der y-Achse auf dem kürzesten Wege in die Lage der positiven x-Achse überführt.

Wiederholen wir die vorhergehende Untersuchung für ein schiefwinkliges Koordinatensystem, so geht die Gleichung 6) in den der Formel 8) entsprechenden Ausdruck:

$$9) \quad 2\varDelta = \left\{y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)\right\} \sin\omega$$

über, worin ω den Koordinatenwinkel bezeichnet.

Wird in Nr. 7) und 9) die Fläche $\varDelta = 0$ gesetzt, so ergiebt sich als Bedingungsgleichung dafür, dass die drei Punkte P, P_1 und P_2 in einer geraden Linie liegen, die Formel:

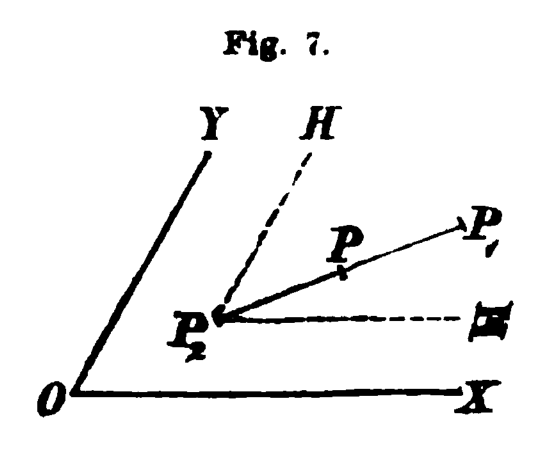
$$10) \qquad y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1) = 0.$$

Soll endlich der Flächeninhalt des Dreiecks in Polarkoordinaten ausgedrückt werden, so gelangt man zu der hierfür geltenden Formel am einfachsten, wenn man in der Gleichung 7) die rechtwinkligen Koordinaten in polare umwandelt. Die Auffindung des Resultates, von welchem im ferneren Verlauf des Lehrbuches nicht weiter Gebrauch gemacht wird, kann der Selbstübung des Lesers überlassen bleiben.

IV. Eine im folgenden mehrfach zur Anwendung kommende Aufgabe verlangt: den Mittelpunkt P der Strecke zweier durch Parallelkoordinaten bestimmten Punkte P_1 und P_2 in Koordinaten desselben Systems auszudrücken.

Um sogleich zu möglichst allgemeinen Resultaten zu gelangen, geben wir dem Koordinatenwinkel XOY in Fig. 7 eine beliebige Grösse. Die Koordinaten der Punkte P, P_1 und P_2 werden wie in der vorigen Aufgabe bezeichnet und beide Achsen wieder parallel zu sich selbst verlegt, so dass P_2 Koordinatenanfang wird. Im neuen Systeme erhalten die Koordinaten der Punkte P und P_1 ebenfalls die obigen Bezeichnungen.

Fig. 7.



Betrachtet man zunächst $P_2\Xi$ als Achse eines polaren Koordinatensystems mit dem Anfangspunkte P_2, wobei die Anomalien in der Drehrichtung von $P_2\Xi$ nach P_2H gezählt werden sollen,

und bezeichnet in diesem Systeme die Koordinaten der Punkte P und P_1 mit r, φ und r_1, φ_1, so lauten die Bedingungen der gestellten Aufgabe:

$$\varphi = \varphi_1, \qquad r = \tfrac{1}{2} r_1.$$

In Verbindung mit den Gleichungen 7) im § 2 folgt hieraus das in der Figur bestätigte Resultat:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\xi_1, \qquad \eta = \tfrac{1}{2}\eta_1,$$

also auch:

$$x - x_2 = \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2), \qquad y - y_2 = \tfrac{1}{2}(y_1 - y_2),$$

und nach Reduktion auf x und y:

$$11) \qquad x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \qquad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

V. Verallgemeinern wir die vorhergehende Aufgabe dahin, die Lage des Punktes P in der Verbindungslinie zwischen P_2 und P_1 so zu bestimmen, dass das Verhältnis

$$P_2P : P_2P_1 = 1 : n$$

stattfindet, so erhalten wir mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen:

$$\xi = \frac{1}{n}\xi_1, \qquad \eta = \frac{1}{n}\eta_1,$$

also auch:

$$x - x_2 = \frac{1}{n}(x_1 - x_2) \quad \text{und} \quad y - y_2 = \frac{1}{n}(y_1 - y_2),$$

und hieraus:

$$12) \qquad x = \frac{x_1 + (n-1)x_2}{n}, \qquad y = \frac{y_1 + (n-1)y_2}{n}.$$

Diese Resultate finden eine weitere Anwendung in der folgenden Aufgabe, welche als eine neue Verallgemeinerung von Nr. IV betrachtet werden kann:

Wenn die n Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}, P_n$ nach ihrer Lage gegen ein Parallelkoordinatensystem gegeben sind, so wird nach der geometrischen Bedeutung des Punktes P gefragt, dessen Koordinaten die arithmetischen Mittel für die entsprechenden Koordinaten der gegebenen Punkte darstellen.

Sind x_m und y_m die Koordinaten eines Punktes P_m, so gelten nach der gestellten Aufgabe für den zu untersuchenden Punkt die Gleichungen:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n}{n}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$x' = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}, \quad y' = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}}{n-1},$$

so hat der Punkt P', dem diese Koordinaten zukommen, dieselbe Bedeutung für die $n-1$ Punkte $P_1, P_2, \ldots P_{n-1}$, welche P für alle n Punkte besitzt. Aus der Gleichung

$$(n-1)\,x' = x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$$

folgt dann in Verbindung mit dem Werte von x:

$$13) \qquad x = \frac{x_n + (n-1)\,x'}{n}.$$

In ganz gleicher Weise führen die Werte von y und y' zu dem Resultate:

$$14) \qquad y = \frac{y_n + (n-1)\,y'}{n}.$$

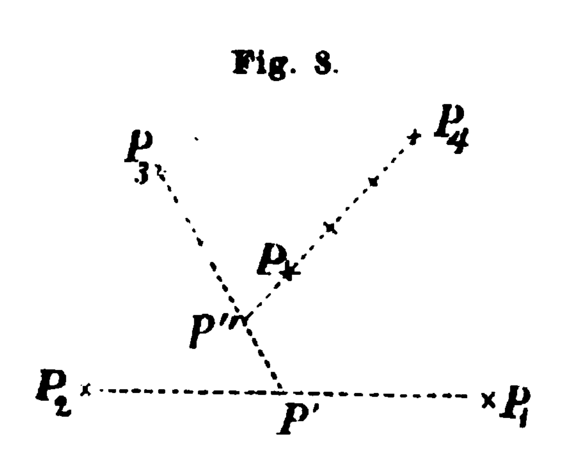
Die Vergleichung der Ausdrücke 13) und 14) mit Nr. 12) zeigt eine vollkommene Übereinstimmung in der Form. Gehen wir daher auf die den Gleichungen 12) zu Grunde liegende Bedingung zurück, so zeigt sich, dass der Punkt P in der Verbindungslinie zwischen P' und P_n gelegen ist und dabei die Proportion

$$P'P : P'P_n = 1 : n$$

stattfindet. — Wird jetzt der Reihe nach $n = 2, 3, 4$ u. s. f. gesetzt, so gelangt man zu folgender Konstruktion des Punkte P.

Man verbinde P_1 und P_2 geradlinig und teile die Verbindungslinie P_1P_2 in zwei gleiche Teile. Der gefundene Teilpunkt, den wir P' nennen wollen, wird mit P_3 verbunden und hierauf die Linie $P'P_3$ in drei gleiche Teile geteilt; der zunächst an P' liegende Teilpunkt heisse P''. Teilt man jetzt $P''P_4$ in vier gleiche Teile, so erhält man in dem zunächst an P'' gelegenen Teilpunkte einen Punkt, dessen Verbindungslinie mit P_5 in fünf gleiche Teile zu teilen ist u. s. f. Der Fortgang dieses Verfahrens ist leicht zu übersehen

Fig. 8.



und giebt schliesslich bei Teilung der letzten Verbindungslinie in n gleiche Teile den gesuchten Punkt P. Fig. 8 zeigt die

Ausführung der Konstruktion für vier gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4.

Es ist zu beachten, dass die im vorigen gefundene konstruktive Darstellung des gesuchten Punktes sich völlig unabhängig von der besonderen Lage des der Aufgabe zu Grunde gelegten Koordinatensystems zeigt. Für welche zwei Achsen wir daher auch die Bedingungen der Aufgabe als gegeben betrachten mögen, so wird doch der zu konstruierende Punkt derselbe bleiben, wenn nur die n bestimmenden Punkte ihre Lage in der Ebene nicht ändern. Wir gelangen hierdurch zu dem Resultate, dass der in beliebiger Richtung gemessene Abstand des unserer Aufgabe entsprechenden Punktes von irgend einer Geraden in der Ebene seiner Bestimmungspunkte das arithmetische Mittel der in paralleler Richtung gemessenen Abstände dieser Punkte von derselben Linie bildet. Wir nennen ihn mit Rücksicht auf diese Eigenschaft den Punkt der mittleren Entfernung* für das gegebene Punktsystem.

Noch ist zu bemerken, dass bei Ausführung der besprochenen Konstruktion die Reihenfolge, in welcher die gegebenen Punkte benutzt werden, keinen Einfluss auf das gesuchte Resultat ausüben kann. Der Umstand, dass durch Änderung dieser Reihenfolge an der Grundbedingung der Aufgabe nichts geändert wird, liefert den Beweis für die aufgestellte Behauptung.

§ 4.

Transformation der Parallelkoordinaten.

Häufig wird es bei analytischen Untersuchungen notwendig, die Koordinaten zu transformieren, d. h. die auf ein gegebenes System bezogenen Koordinaten eines Punktes in Koordinaten eines neuen Systems auszudrücken. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle sind im § 2 besprochen und in den vorigen Aufgaben zur Anwendung gebracht worden. Es erübrigt uns noch eine Ergänzung, wobei wir uns jedoch lediglich auf Parallelkoordinaten beschränken, was deshalb völlig ausreichend ist, weil die wenig vorkommende Aufgabe der Transformation von Polarkoordinaten leicht

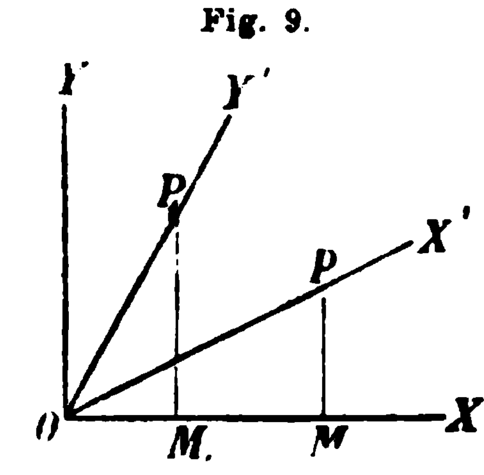
* Derselbe ist identisch mit dem Schwerpunkte gleich grosser in den n Punkten befindlicher Massen.

durch Vermittelung von Hilfssystemen rechtwinkliger Parallelkoordinaten bewältigt werden kann.

Man gelangt von einem gegebenen Parallelkoordinatensysteme zu jedem andern in derselben Ebene gelegenen durch parallele Verschiebung und durch Drehung der Achsen, von welchen zwei Fällen der erstere bereits im § 2 erledigt wurde. Was die Achsendrehung betrifft, so betrachten wir zunächst den Übergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem beliebigen andern mit demselben Anfangspunkte.

Die x-Achse des rechtwinkligen Systems der beiden Koordinatenachsen OX und OY in Fig. 9 ist um den Winkel $XOX' = \alpha$ gedreht worden, wobei dieser Winkel nach Art der Polarwinkel von 0 bis 360° gezählt werden soll. Für einen in der neuen x-Achse gelegenen Punkt P bilden dann $OP = x'$ und der Winkel α die Polarkoordinaten, während $OM = x$ und $MP = y$ die zugehörigen rechtwinkligen Koordinaten darstellen. Nach Nr. 3) in § 2 ist daher

Fig. 9.



$$x = x' \cos \alpha, \qquad y = x' \sin \alpha.$$

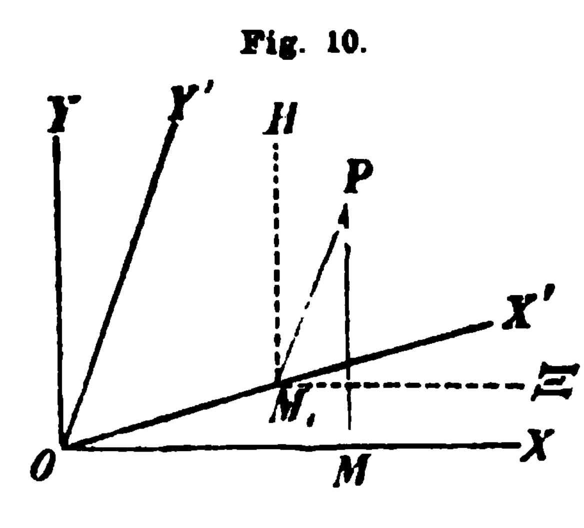
Wird ferner der Winkel XOY' oder die Anomalie der neuen y-Achse mit β bezeichnet, so folgt in ganz gleicher Weise für einen in dieser Achse gelegen Punkt P_1:

$$x = y' \cos \beta, \qquad y = y' \sin \beta,$$

wobei wir $OP_1 = y'$, $OM_1 = x$ und $M_1P_1 = y$ setzen.

Für einen beliebigen Punkt P in Fig. 10 seien $OM = x$ und $MP = y$ die ursprünglichen rechtwinkligen Koordinaten, dagegen $OM_1 = x'$ und $M_1P = y'$ die Koordinaten in dem durch Achsendrehung entstandenen neuen Systeme. Denken wir uns XOY parallel zu sich selbst in die Lage $\Xi M_1 H$ verschoben, so sind nach dem Vorigen $x' \cos \alpha$ und $x' \sin \alpha$ die rechtwinkligen Koordinaten des neuen Anfangspunktes, $y' \cos \beta$ und $y' \sin \beta$ aber die Koordinaten des Punktes P im Systeme der beiden Achsen $M_1\Xi$ und M_1H, wobei α und β die früheren Bedeutungen behalten. Nach Nr. 1) und 2) im § 2 ist demnach:

Fig. 10.



$$1)\qquad \begin{cases} x = x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{cases}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten die Projektionen der aus x' und y' zusammengesetzten gebrochenen Linie OM_1P auf die x- und y-Achse; beide Gleichungen liefern daher wieder den in der Anmerkung zu Seite 13 angeführten Satz über die Projektion einer gebrochenen Linie.

Betrachten wir jetzt einige specielle Fälle.

A. Wird nur eine der beiden Achsen geändert, so ist, wenn man $\alpha = 0$ setzt, also die x-Achse beibehält,

$$2)\qquad x = x' + y' \cos\beta, \qquad y = y' \sin\beta.$$

Ebenso ergiebt sich unter Beibehaltung der y-Achse aus der Substitution $\beta = 90^0$:

$$3)\qquad x = x' \cos\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y'.$$

B. Soll das neue System gleichfalls ein rechtwinkliges sein, so ist, wenn hierbei beide Achsen nach derselben Seite hin um den Winkel α gedreht werden, $\beta = 90^0 + \alpha$ zu setzen. Man erhält dann:

$$4)\qquad x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \qquad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Der Fall, wo die Drehung der y-Achse in einem der Drehung der x-Achse entgegengesetzten Sinne bis dahin geschieht, wo der Koordinatenwinkel wieder ein rechter geworden ist, ergiebt sich hieraus einfach durch Änderung des Vorzeichens von y'.

C. Der neue Koordinatenwinkel sei 2γ und werde von der früheren x-Achse halbiert, so dass β in γ und α in $360^0 - \gamma$ (der Schenkellage nach identisch mit $-\gamma$) übergeht. Diese Substitutionen geben mit Aushebung gemeinschaftlicher Faktoren:

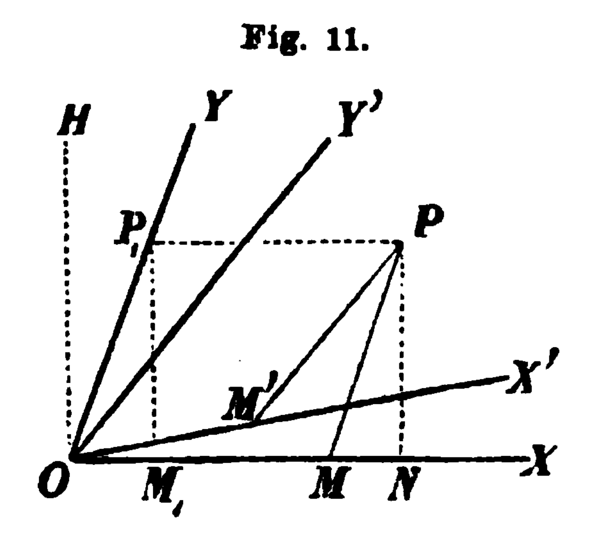
$$5)\qquad x = (y' + x') \cos\gamma, \qquad y = (y' - x') \sin\gamma.$$

Übergang von einem schiefwinkligen Koordinatensysteme zu einem beliebigen andern mit demselben Anfangspunkte.

Das System der Achsen OX und OY (Fig. 11) habe den Koordinatenwinkel ω und wir behalten im übrigen die früheren Bezeichnungen bei, so dass z. B. in der vorliegenden Figur $\beta - \alpha$ den neuen Koordinatenwinkel $X'OY'$ darstellt. Nehmen wir ein

drittes Koordinatensystem zu Hilfe, welches neben der Achse OX die darauf rechtwinklige OH besitzt, und setzen $NP = M_1P_1 = \eta$, so folgt in gleicher Weise wie bei Fig. 9:

Fig. 11.



$$\eta = y \sin\omega.$$

Zu gleicher Zeit erhalten wir aus der zweiten Gleichung unter Nr. 1):

$$\eta = x' \sin\alpha + y' \sin\beta,$$

und aus Verbindung der beiden letzten Formeln die Gleichung:

$$y \sin\omega = x' \sin\alpha + y' \sin\beta,$$

welcher in gleicher Weise wie den unter Nr. 1) aufgeführten Formeln eine auf Projektion bezügliche Deutung untergelegt werden kann.

Insofern die Achsen OX und OY in ihrer Bezeichnung vertauscht werden können, gilt ebenso die Relation:

$$x \sin\omega = x' \sin\alpha' + y' \sin\beta',$$

wenn wir uns unter α' und β' die von den neuen Achsen und OY eingeschlossenen, in entgegengesetzter Richtung mit α und β zu messenden Winkel vorstellen. Dann ist aber $\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \omega$, also $\alpha' = \omega - \alpha$ und $\beta' = \omega - \beta$, und man erhält hierdurch:

$$x \sin\omega = x' \sin(\omega - \alpha) + y' \sin(\omega - \beta).*$$

Die hier entwickelten Resultate führen zu den Transformationsformeln:

$$6)\quad \begin{cases} x = x' \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega} + y' \dfrac{\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}, \\[2ex] y = x' \dfrac{\sin\alpha}{\sin\omega} + y' \cdot \dfrac{\sin\beta}{\sin\omega}, \end{cases}$$

von denen man zu den unter Nr. 1) gewonnenen wieder zurückgehen kann, wenn man $\omega = 90^0$ setzt.

---

* Die Formel $\alpha + \alpha' = \omega$ gilt, streng genommen, nur solange, als OX', wie in Fig. 11, innerhalb des Winkels ω liegt, so dass $\alpha < \omega$ ist. Für $\alpha > \omega$ ergiebt sich, wenn man α' immer in der obigen Drehrichtung misst: $\alpha - (360^0 - \alpha') = \omega$ oder $\alpha + \alpha' = 360^0 + \omega$. Dadurch wird aber die Richtigkeit des gefundenen Resultats nicht beeinträchtigt, weil Winkeln, die um eine ganze Umdrehung verschieden sind, dieselben goniometrischen Funktionen zukommen. Gleiches gilt für β und β'.

Wird in den Formeln unter 6) $\beta = 90^0 + \alpha$ gesetzt, so wird das neue Koordinatensystem ein rechtwinkliges, und man erhält für diesen Fall:

$$7)\qquad \begin{cases} x = x' \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega} - y' \dfrac{\cos(\omega - \alpha)}{\sin\omega}, \\[2ex] y = x' \dfrac{\sin\alpha}{\sin\omega} + y' \dfrac{\cos\alpha}{\sin\omega}, \end{cases}$$

woraus für $\omega = 90^0$ wieder die Gleichungen 4) hervorgehen.

Wir gelangen jetzt zu den allgemeinsten Relationen für Umwandlung von Parallelkoordinaten, wenn wir mit der Änderung der Achsenrichtung noch die Verlegung des Koordinatenanfangspunktes verknüpfen. Bezeichnen a und b die im ursprünglichen Systeme gemessene Abscisse und Ordinate des neuen Anfanges, so giebt die Verbindung der Formeln 6) mit den bereits mehrfach benutzten für parallele Achsenverschiebung:

$$8)\qquad \begin{cases} x = a + x' \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega} + y' \dfrac{\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}, \\[2ex] y = b + x' \dfrac{\sin\alpha}{\sin\omega} + y' \dfrac{\sin\beta}{\sin\omega}. \end{cases}$$

Ist hierbei das ursprüngliche Koordinatensystem ein rechtwinkliges, so entstehen, indem man entweder sogleich von den Gleichungen 1) ausgeht oder auch in den jetzt gefundenen $\omega = 90^0$ setzt, die einfacheren Beziehungen:

$$9)\qquad \begin{cases} x = a + x' \cos\alpha + y' \cos\beta \\ y = b + x' \sin\alpha + y' \sin\beta. \end{cases}$$

Bemerkenswert ist für die Anwendung der in diesem Paragraphen gefundenen Transformationsformeln, dass sie in Beziehung auf die in ihnen enthaltenen Koordinaten sämtlich Gleichungen ersten Grades darstellen. Es genügt zur Bestätigung dieser Bemerkung, die Form der Gleichungen unter Nr. 8) zu betrachten, welche als die allgemeinsten alle übrigen in sich schliessen.

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie.

---

§ 5.

Gleichungsformen der geraden Linie.

Die charakteristische Eigenschaft der geraden Linie, dass sie in allen ihren Punkten nach einer und derselben Richtung verläuft, lässt sich am einfachsten in der Sprache der analytischen Geometrie ausdrücken, wenn man irgend einen ihrer Punkte zum Pole eines Polarkoordinatensystems wählt. Bezeichnet unter dieser Voraussetzung α den zwischen 0 und 180^0 gelegenen und in der Drehrichtung der Polarwinkel gemessenen Winkel, welchen die Gerade mit der Achse des benutzten Systems bildet, so wird die Lage aller ihrer Punkte durch die Gleichung

$$\varphi = \alpha$$

ausgedrückt, sobald man ebensowohl negative als positive Leitstrahlen zulässt.

Gehen wir jetzt zu einem Parallelkoordinatensystem über, dessen positive Seite der x-Achse unter Beibehaltung des Poles als Koordinatenanfang mit der Achse des Polarsystems zusammenfällt, so folgt bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten aus Nr. 5) im § 2

$$\frac{y}{x} = tan\,\alpha$$

als diejenige Gleichung, durch welche die beiden Koordinaten jedes einzelnen Punktes der in Rede stehenden Linie von einander abhängen. Der Winkel α ist hierbei spitz oder stumpf, je nachdem die durch den Koordinatenanfang gehende Gerade innerhalb der beiden von den Achsen gebildeten Felder liegt, welchen gleiche

Vorzeichen der Koordinaten zukommen, oder im andern Falle die beiden übrigen Felder durchschneidet. Bezeichnen wir zur Abkürzung $tan\,\alpha$ mit dem Buchstaben A, so geht die obige Gleichung in

1) $$y = Ax$$

über. — Genau dieselbe Gleichungsform kann auch benutzt werden, um bei Anwendung schiefwinkliger Koordinaten Abscisse und Ordinate jedes Punktes von einander abhängig zu machen, der sich in einer durch den Anfangspunkt des Systems gezogenen Geraden befindet. Lassen wir nämlich der x-Achse die oben angegebene Lage und bezeichnen wie früher den Koordinatenwinkel mit ω, so ergiebt sich für diesen Fall aus den Formeln 7) im § 2:

$$\frac{y}{x} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,(\omega - \alpha)},$$

wo wieder $\frac{sin\,\alpha}{sin\,(\omega - \alpha)}$ einen für den ganzen Verlauf der geraden Linie unveränderlichen Wert besitzt, den wir nur mit A zu bezeichnen brauchen, um die Gleichung 1) zu erhalten. Setzen wir $\omega - \alpha = \beta$, so ist β der von der y-Achse und der Geraden eingeschlossene Winkel, der aber negativ in Rechnung gezogen werden muss, wenn $\alpha > \omega$, d. h. wenn die Gerade diejenigen von den Achsen gebildeten Felder durchschneidet, in welchen den Koordinaten der darin enthaltenen Punkte verschiedene Vorzeichen zugehören. Der Zahlwert A hat mit Einführung der gewählten Bezeichnung die allgemeine Bedeutung:

2) $$A = \frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta},$$

und es ist hierin immer $\alpha + \beta = \omega$, ferner α zwischen den Grenzen 0 und 180° und β zwischen ω und $\omega - 180°$ enthalten. Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem sind α und β Komplementwinkel, wodurch man zu der Gleichung $A = tan\,\alpha$ zurückkommt. — Wir wollen der beständigen oder konstanten Grösse A, da sie einzig von der Richtung der geraden Linie gegen das Koordinatensystem abhängt, den Namen Richtungskonstante geben.

In Übereinstimmung mit der am Schlusse von § 1 gemachten Bemerkung nennen wir die Formel $y = Ax$, welche auch in $x = \frac{y}{A}$ umgeformt werden kann, die Gleichung einer durch den Koor-

dinatenanfang gehenden Geraden, insofern sie dazu dient, um bei gegebener Richtung der Linie die veränderlichen oder variabelen (laufenden) Koordinaten jedes ihrer Punkte von einander abhängig zu machen. Setzen wir nach einander $\alpha = 0$ und $\alpha = \omega$, wobei β die Werte ω und 0 annimmt, so geht das erste mal A in 0 und das andere mal in ∞ über und man erhält, wenn man im zweiten Falle die Form $x = \frac{y}{A}$ zur Anwendung bringt,

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x = 0$$

als Gleichungen der x- und y-Achse, wie schon im § 1 unter Nr. 5) aus dem Begriffe der Koordinaten hergeleitet wurde. — Als ein zweites Beispiel wählen wir die Gleichungen der beiden (auf einander senkrechten) Geraden, welche den Koordinatenwinkel und seinen Nebenwinkel halbieren. Für die erste derselben ist $\beta = \alpha$, also $A = 1$, für die zweite $\beta = -(180^0 - \alpha)$ und $A = -1$, wonach sich

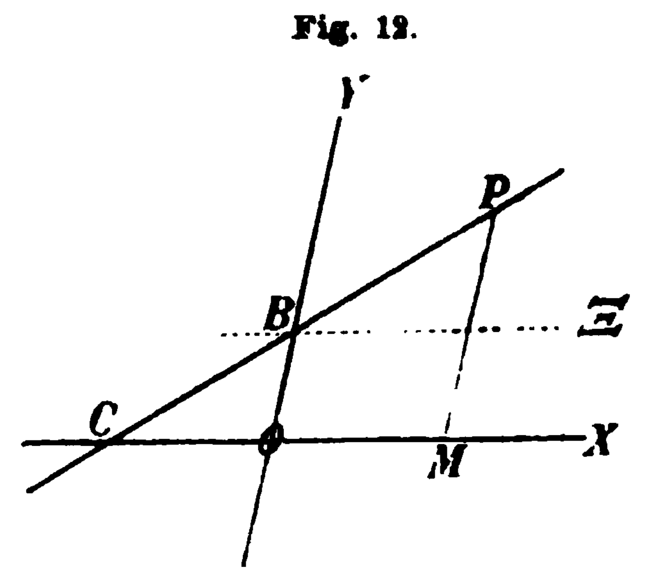
$$y = x \quad \text{und} \quad y = -x$$

als Gleichungen dieser beiden Linien ergeben.

Wir gelangen jetzt dazu, die allgemeine Gleichung einer in beliebigen Punkten die Koordinatenachse schneidenden Geraden festzustellen, wenn wir eine der beiden Achsen parallel zu sich selbst in den Durchschnittspunkt der zu untersuchenden Geraden und der anderen Achse verschieben.

CP in Fig. 12 sei die gegebene Linie, welche die Koordinatenachsen in den Punkten C und B schneidet. Verschieben wir die x-Achse in die Lage $B\Xi$, so ist, wenn η die auf das neue System bezogene Ordinate des beliebigen Punktes P, und $OM = x$ seine Abscisse, ferner A die Richtungskonstante der Geraden CP bezeichnet,

Fig. 12.



$$\eta = Ax.$$

Da durch die parallele Achsenverschiebung die zur Bestimmung von A dienenden Winkel nicht geändert werden, so behält die Richtungskonstante auch für die ursprüngliche Lage der x-Achse ihren Wert bei und wir gelangen nach den bereits oft angewendeten Sätzen für parallele Achsenverschiebung zu dem ursprünglichen

Systeme zurück, wenn wir $y = \eta + b$ setzen, wo $b = OB$ die Ordinate des Durchschnittspunktes der Geraden und der y-Achse ausdrückt. Als allgemeine Gleichung der geraden Linie erhalten wir hiernach:

3) $$y = Ax + b.$$

Die von uns eingeführte Bedeutung der konstanten Grösse b findet hierin ihre Bestätigung, wenn wir $x = 0$ setzen, indem sich dann $y = b$ als Ordinate des in der y-Achse gelegenen Punktes der Geraden ergiebt. In gleicher Weise findet sich, wenn a die Abscisse des in der x-Achse gelegenen Punktes C bezeichnet,* aus der Substitution $y = 0$:

4) $$Aa + b = 0 \quad \text{oder} \quad A = -\frac{b}{a}.$$

Schaffen wir mittels der ersten dieser beiden Formeln aus der Gleichung 3) die Grösse b hinweg, so lässt sie sich in

5) $$x = \frac{y}{A} + a$$

umwandeln. Dieselbe Gleichung entsteht unmittelbar, wenn man anfänglich die x-Achse ungeändert lässt, dagegen die y-Achse parallel zu sich selbst nach C verschiebt.

Die vorhergehenden Entwickelungen der allgemeinen Gleichung der geraden Linie in der Form unter Nr. 3) oder der daraus hergeleiteten unter 5) scheinen insofern noch eine Lücke zu enthalten, als die dabei angewendete Verlegung einer der beiden Koordinatenachsen ihre Anwendbarkeit versagt, wenn die Gerade zur anderen Achse parallel liegt. Dass aber auch hier die allgemeinen Formeln ihre Giltigkeit behalten, zeigt sich, wenn wir in 5) $A = \infty$ und in 3) $A = 0$ einsetzen. Die durch diese Substitutionen gewonnenen Gleichungen

$$x = a \quad \text{und} \quad y = b$$

kommen nämlich auf die bereits in den §§ 1 und 2 für Parallelen zu den Koordinatenachsen gefundenen Formeln zurück.

In Nr. 3) und 5) wurde die Gleichung der Geraden von der Richtung der Linie (mittels der Konstanten A) und der Lage eines

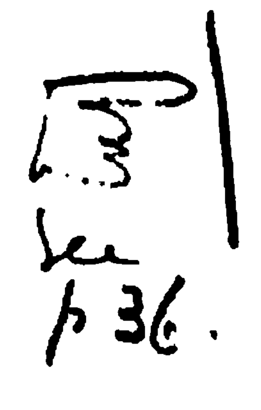
---

* Nach der Anlage von Fig. 12 muss darin a als Abscisse eines auf der Seite der negativen x gelegenen Punktes einen negativen Wert erhalten.

ihrer Punkte (mittels der Konstanten b oder a) abhängig gemacht; zu einer mehr symmetrisch gestalteten Gleichungsform gelangen wir jedoch, wenn wir die Gerade durch ihre beiden in den Achsen gelegenen Punkte fixieren oder, mit anderen Worten, die Gleichung einzig von den Konstanten a und b abhängig machen. Wird zu diesem Endzwecke in der Formel $y = Ax + b$ aus Nr. 4 der Wert $A = -\frac{b}{a}$ substituiert, so lässt sich die hierdurch entstandene Gleichung leicht in

$$6) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

umgestalten — eine Gleichungsform der geraden Linie, die sich unter anderem noch dadurch empfiehlt, dass die Bedeutung der in ihr enthaltenen beständigen Grössen a und b (Koordinaten der Durchschnittspunkte mit den Achsen) von dem angewendeten Koordinatenwinkel völlig unabhängig bleibt. Der Fall des Parallelismus der Geraden zu einer der beiden Achsen ist in dieser Gleichung eingeschlossen, wenn man für ihn den Durchschnittspunkt mit der parallelen Achse in eine unendliche Entfernung versetzt, wie sich aus den Substitutionen $b = \infty$ oder $a = \infty$ herleiten lässt.



Der allgemeinen Anwendbarkeit der letzten Gleichung steht einzig der Umstand entgegen, dass sie sich nicht unmittelbar für den Fall einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden anwenden lässt, was ohne alle Rechnung schon daraus folgt, dass dann die beiden zur Bestimmung dienenden Punkte in einen übergehen.

Eine weitere Verallgemeinerung der in Nr. 3) und 6) gewonnenen Gleichungsformen der geraden Linie gewähren die beiden folgenden Fundamentalaufgaben.

I. Es soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, deren Richtung gegen die Achsen bestimmt ist und welche durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1$* geht.

Aus den mit den Koordinatenachsen gebildeten Winkeln α und β ergiebt sich ohne weiteres die Richtungskonstante $A = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, oder bei Anwendung von rechtwinkligen Koordinaten $A = \tan\alpha$.

* Wir nennen zur Abkürzung einen Punkt xy, wenn x und y seine Parallelkoordinaten bezeichnen. Bei Anwendung von Polarkoordinaten kann in gleicher Weise von einem Punkte $r\varphi$ gesprochen werden.

Die gesuchte Gleichung der Geraden hat nun nach 3) die Form:

$$y = Ax + b,$$

in welcher der Wert von b unbestimmt bleibt. Die Bedingung, dass x_1 und y_1 die Koordinaten eines Punktes dieser Geraden sein sollen, führt zu der zweiten Gleichung:

$$y_1 = Ax_1 + b,$$

in welcher A und b dieselben Werte wie vorher besitzen müssen und woraus in Verbindung mit der vorigen Gleichung das unbestimmte b durch Subtraktion eliminiert werden kann. Man erhält dann:

$$7) \qquad y - y_1 = A(x - x_1)$$

als Resultat der gestellten Aufgabe. Setzt man hierin nach einander $y = 0$ und $x = 0$, so findet man leicht als Koordinaten für die auf den Achsen gelegenen Punkte der in Rede stehenden Geraden:

$$8) \qquad a = x_1 - \frac{y_1}{A}, \quad b = y_1 - Ax_1,$$

welche beiden Werte übrigens nur Umformungen der Gleichungen 5) und 3) darstellen.

II. Es soll die Gleichung derjenigen Geraden gesucht werden, welche die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in sich enthält.

Zu der die gerade Linie charakterisierenden Formel

$$y = Ax + b$$

treten hier die beiden Bedingungsgleichungen:

$$y_1 = Ax_1 + b,$$
$$y_2 = Ax_2 + b,$$

aus denen in gleicher Weise, wie in der vorigen Aufgabe,

$$y_1 - y_2 = A(x_1 - x_2)$$

hergeleitet wird. Hieraus findet sich zunächst für die Richtungskonstante der durch die beiden gegebenen Punkte gehenden Geraden:

$$9) \qquad A = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

ferner durch Einsetzung dieses Wertes in die Formel 7), welche die Gleichungen aller den Punkt $x_1 y_1$ enthaltenden Geraden umfasst, als Gleichung der gesuchten Linie:

10) $$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

Die Substitutionen $y = 0$ und $x = 0$ geben für die Koordinaten der beiden auf den Achsen gelegenen Punkte:

11) $$a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}, \qquad b = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}.$$

Insofern die Gleichung 10) die gegenseitige Abhängigkeit der Koordinaten x und y jedes mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in derselben Geraden gelegenen Punktes enthält, ist sie zugleich der analytische Ausdruck dafür, dass drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Wenn wir sie zu diesem Zwecke in die Form:

12) $$(x - x_1) : (x_1 - x_2) = (y - y_1) : (y_1 - y_2)$$

bringen, giebt sie die für drei in einer geraden Linie gelegenen Punkte charakteristische Eigenschaft, dass ihre Abscissendifferenzen den entsprechenden Ordinatendifferenzen proportional sein müssen. — Wandelt man endlich die letzte Proportion in eine Produktgleichung um, so findet sich nach einigen leichten Umformungen die bereits in Nr. 10) des § 3 gewonnene Formel wieder, deren geometrische Deutung das Resultat ausspricht, dass die zwischen den drei Punkten enthaltene Dreiecksfläche gleich Null ist.

§ 6.

Zwei Gerade.

Sind zwei gerade Linien durch ihre Gleichungen für Parallelkoordinaten gegeben, so entsteht die Frage nach der gegenseitigen Richtung dieser Linien und, wenn sie sich schneiden, nach der Lage ihres Durchschnittspunktes. Wir beginnen mit der letzten dieser beiden Untersuchungen.

I. Es seien

$$y = A_1 x + b_1,$$
$$y = A_2 x + b_2$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden, so müssen für die Koordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes beide Formeln gleichzeitig ihre Giltigkeit behalten. Die Berechnung dieser Koordinaten kommt daher einzig darauf hinaus, ein x und y zu finden, welches beiden Gleichungen Genüge leistet. Da wir es hierbei nur mit

Gleichungen ersten Grades zu thun haben, so kann die Rechnung für jede der beiden Unbekannten nur einen Wert geben; sie führt daher zu dem Resultate zurück, dass zwei nicht zusammenfallende Gerade nicht mehr als einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen können. Für seine Koordinaten findet sich nach den gewöhnlichen Eliminationsmethoden aus den obigen Gleichungen:

$$1)\qquad x = \frac{b_2 - b_1}{A_1 - A_2}, \quad y = \frac{A_1 b_2 - A_2 b_1}{A_1 - A_2}.$$

Hierbei verdienen folgende Fälle besondere Erwähnung:

α. Ist $b_1 = b_2$, so ist $x = 0$, d. h. der Durchschnittspunkt liegt in der Ordinatenachse. In der That bezeichneten aber auch die beständigen Grössen b_1 und b_2 die Lage der in der y-Achse gelegenen Punkte beider Geraden, so dass bei Übereinstimmung dieser Werte die beiden Linien durch denselben Punkt der genannten Achse gehen müssen.

β. Wenn $A_1 b_2 = A_2 b_1$, so ist $y = 0$, d. h. der gemeinschaftliche Punkt liegt in der Abscissenachse. Wir übersehen sofort die Richtigkeit dieses Resultates, wenn wir die gewonnene Bedingungsgleichung in die Form $-\frac{b_1}{A_1} = -\frac{b_2}{A_2}$ bringen, worin nach Nr. 4) des vorigen Paragraphen die gleichen Grössen die Abscissen der in der x-Achse gelegenen Punkte bezeichnen.

γ. Für $A_1 = A_2$ erhalten beide Koordinaten unendliche Werte, d. h. der Durchschnittspunkt liegt in unendlicher Entfernung. Wegen Übereinstimmung der Richtungskonstanten ist dies der Fall des Parallelismus beider Geraden.

δ. Wenn irgend zwei von den drei vorhin genannten Beziehungen gleichzeitig stattfinden, so ist $A_1 = A_2$ und auch $b_1 = b_2$, und man erhält für beide Koordinaten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Dann sind aber auch die Gleichungen beider Geraden identisch, weshalb letztere in allen Punkten zusammenfallen müssen.

Sind die Gleichungen der beiden Linien in der Form

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1,$$

$$\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$$

gegeben, so findet man ebenfalls durch Elimination als Koordinaten des Durchschnittspunktes:

$$2) \qquad x = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \qquad y = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{b_2 a_1 - b_1 a_2}.$$

Dasselbe Resultat kann auch aus den Gleichungen 11) des vorigen Paragraphen abgeleitet werden, sobald man die Gleichung einer Geraden auf die Form

$$\alpha x + \beta y = 1$$

bringt, worin α und β die reciproken Werte von a und b darstellen. Die in § 5 Nr. 11) gelöste Aufgabe kommt dann darauf hinaus, Werte von α und β zu finden, welche den Gleichungen

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = 1,$$
$$\alpha x_2 + \beta y_2 = 1$$

genügen, während jetzt der Wert von x und y aus dem Gleichungssysteme

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = 1,$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y = 1$$

abgeleitet werden soll. Da die letzteren beiden Gleichungen aus den beiden vorhergehenden durch einfache Vertauschung der Buchstaben α und x, sowie β und y hervorgehen, so kann durch eine gleiche Vertauschung das Resultat der einen Aufgabe aus dem der anderen abgeleitet werden. Giebt man zu diesem Zwecke den Gleichungen 11) des vorhergehenden Paragraphen die Form

$$\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \qquad \beta = \frac{x_1 - x_2}{y_2 x_1 - y_1 x_2},$$

so erhält man hieraus in der angegebenen Weise als Resultat der jetzigen Aufgabe:

$$x = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}, \qquad y = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2}.$$

Durch Substitution von $\alpha_1 = \frac{1}{a_1}$, $\beta_1 = \frac{1}{b_1}$ u. s. f. gelangt man hiervon zu den Gleichungen 2). — Bemerkenswert ist die letztere Ableitung insofern, als sie ein einfaches Mittel an die Hand giebt, die auf den Durchschnitt von geraden Linien bezüglichen Aufgaben auf die Lage von Punkten in einer geraden Linie zurückzuführen. Aus der in Nr. 10) des § 3 enthaltenen Bedingung für die Lage dreier Punkte in einer geraden Linie erhält man z. B. durch die

im Vorigen enthaltene Methode als Bedingungsgleichung dafür, dass drei Gerade durch denselben Punkt hindurchgehen:

$$\beta(\alpha_1 - \alpha_2) + \beta_1(\alpha_2 - \alpha) + \beta_2(\alpha - \alpha_1) = 0,$$

oder nach Einführung der Werte von α, β u. s. f.

$$3)\quad \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{b_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right) = 0.$$

II. Soll der Winkel δ gefunden werden, den zwei gegebene Gerade einschliessen, so verschiebe man beide Linien parallel zu sich selbst in einen und denselben Punkt der x-Achse, wodurch ihre gegenseitige Lage nicht geändert wird. Sind dann α_1 und α_2 die im früher festgestellten Sinne gemessenen Winkel, welche beide Gerade mit der x-Achse einschliessen, so erhält man in jedem Falle:

$$\tan\delta = \pm\tan(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Um in dieser Gleichung die Richtungskonstanten A_1 und A_2 der beiden Geraden einzuführen, beschränken wir uns zunächst auf rechtwinklige Koordinaten, weil bei deren Anwendung die einfachsten Beziehungen zwischen den Konstanten A_1 und A_2 und den Winkeln α_1 und α_2 stattfinden. Dann ist $\tan\alpha_1 = A_1$ und $\tan\alpha_2 = A_2$, und es folgt hieraus:



$$4)\quad \tan\delta = \pm\frac{A_1 - A_2}{1 + A_1A_2}.$$

Der Doppelwert von $\tan\delta$ kann hier als einem spitzen und einem stumpfen Winkel zugehörig betrachtet werden, und giebt somit die von den beiden Geraden gebildeten Nebenwinkel. Wird einzig der spitze Winkel verlangt, so ist dasjenige Vorzeichen zu wählen, durch welches $\tan\delta$ einen positiven Wert erhält. — Folgende zwei Fälle verdienen besondere Beachtung:

α. Ist $A_1 = A_2$, so wird $\tan\delta = 0$, also $\delta = 0$ oder $\delta = 180^0$, wodurch wir auf die schon oben besprochene Bedingung des Parallelismus zweier Geraden zurückgeführt werden.

β. Wenn $1 + A_1A_2 = 0$, wobei nicht gleichzeitig $A_1 = A_2$ sein kann, so wird $\tan\delta = \infty$, also $\delta = 90^0$; die beiden Linien durchschneiden sich daher rechtwinklig. Man findet dann:

$$5)\quad A_1 = -\frac{1}{A_2},\quad A_2 = -\frac{1}{A_1},$$

d. h. zwei Gerade stehen bei Anwendung von rechtwinkligen Parallelkoordinaten senkrecht aufeinander, wenn ihren Richtungskon-

stanten reciproke Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen zukommen oder das Produkt der beiden Richtungskonstanten der negativen Einheit gleich ist. — Setzen wir, sobald die Gleichungen der beiden Geraden in der Form $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$ und $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$ gegeben sind, nach § 5 Nr. 4) $A_1 = -\frac{b_1}{a_1}$ und $A_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, so geht die Bedingungsgleichung für den rechtwinkligen Durchschnitt in $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ über. — An die letzten Betrachtungen schliessen sich folgende zwei Aufgaben:

A. Es soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, die durch einen Punkt $x_1 y_1$ geht und eine gegebene Gerade $y = Ax + b$* rechtwinklig durchschneidet.

Da die Gerade durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, so muss ihre Gleichung die Form von Nr. 7) des vorigen Paragraphen besitzen. Nach der zweiten gegebenen Bedingung erhält die Richtungskonstante den Wert $-\frac{1}{A}$; die gesuchte Gleichung ist daher:

$$6) \qquad y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1).$$

Als specielles Beispiel hierzu wählen wir den Fall, wenn die gegebene Gerade durch den Koordinatenanfang geht und den Winkel α mit der x-Achse bildet, der gegebene Punkt aber in einem Abstande d vom Koordinatenanfange auf der Geraden selbst liegt. Unter diesen Bedingungen ist $A = \tan\alpha$, und da d und α die Polarkoordinaten des gegebenen Punktes darstellen, $x_1 = d\cos\alpha$, $y_1 = d\sin\alpha$; man erhält also:

$$y - d\sin\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}(x - d\cos\alpha),$$

oder nach Multiplikation mit $\sin\alpha$ und einigen Umformungen:

$$7) \qquad \cos\alpha \,.\, x + \sin\alpha \,.\, y - d = 0.^{**}$$

---

* Wir bedienen uns von hier an der Abkürzung, eine Linie mit ihrer Gleichung zu benennen.

** Wird der mit der y-Achse gebildete Winkel $90^0 - \alpha$ mit β bezeichnet, so geht die Gleichung in

$$\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y = d$$

über. Die Richtigkeit hiervon ist leicht auch für schiefwinklige Koordinaten zu bestätigen.

Wir haben hiermit eine neue Form der Gleichung der Geraden gefunden; die Gerade ist dabei durch ihren Abstand vom Ursprunge, der immer positiv zu rechnen ist, und durch den Winkel charakterisiert, den die vom Ursprunge auf die Gerade gefällte Normale mit der positiven Hälfte der Abscissenachse einschliesst.

Ist die Gerade insbesondere parallel zu OY und schneidet sie die negative Hälfte der Abscissenachse, so ist $\alpha = 180^0$, und die Gerade hat die Gleichung

$$-x - d = 0, \quad \text{d. i.} \quad x = -d;$$

ist die Gerade parallel zur Abscissenachse und schneidet sie die negative Hälfte der Ordinatenachse, so ist $\alpha = 270^0$, und daher die Gleichung

$$-y - d = 0, \quad \text{d. i.} \quad y = -d.$$

Wegen ihrer grossen Verwendbarkeit bezeichnet man die Gleichung 7) als die Normalform der Gleichung der Geraden. Ihr Zusammenhang mit der Gleichungsform

$$8) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ergiebt sich leicht aus der Figur. Ist $ON = d$ (Fig. 13) normal auf T, so ist

$$OA = a = \frac{d}{\cos\alpha}, \quad OB = b = \frac{d}{\sin\alpha}.$$

Substituiert man dies in 8) und multipliciert dann mit d, so geht 8) in 7) über.

Aus

$$\cos\alpha = \frac{d}{a}, \quad \sin\alpha = \frac{d}{b}$$

erhält man, indem man quadriert und addiert,

$$d^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1,$$

also ist

$$9) \quad \begin{cases} d = \sqrt{\dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}}, \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

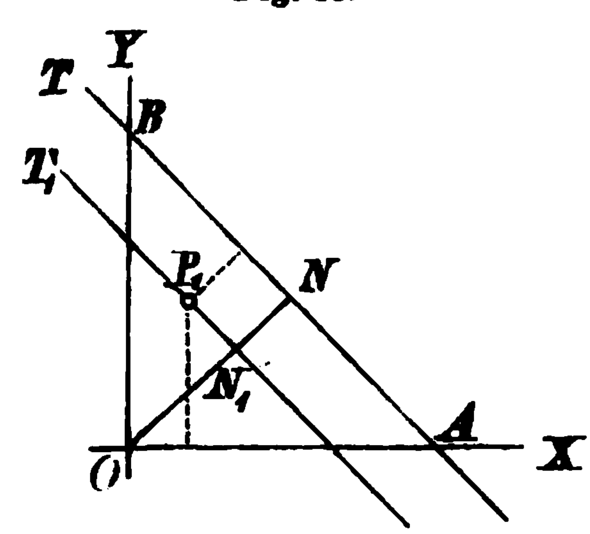
Liegt der Winkel α im 1., 2., 3., 4. Quadranten, so ist die zwischen den Koordinatenachsen enthaltene Strecke der Geraden

in XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX'$ enthalten; hieraus geht hervor, dass $\cos\alpha$ mit b, $\sin\alpha$ mit a in Bezug auf das Vorzeichen übereinstimmt. In den Formeln 9) sind daher die Quadratwurzeln positiv zu nehmen.

B. Die Entfernung eines Punktes $x_1\,y_1$ von der Geraden $\cos\alpha\,.\,x + \sin\alpha\,.\,y - d = 0$ soll berechnet werden.

Legt man durch den Punkt $x_1\,y_1$ eine Parallele T_1 zu der gegebenen Geraden T, so ist der Winkel, den die Normale dieser Parallelen mit OX einschliesst, entweder α oder $\alpha \pm 180^0$, je nachdem O ausserhalb oder innerhalb des zwischen den beiden parallelen Geraden enthaltenen Teiles der Ebene liegt. Ist d_1 der Abstand des Ursprungs von T_1, und p_1 der gesuchte Abstand des Punktes P_1 von der Geraden T, so ist im ersten Falle $p_1 = d - d_1$, im andern $p_1 = d + d_1$;

Fig. 13.



nach diesen Formeln ergiebt sich p_1 positiv oder negativ, je nachdem P_1 mit dem Ursprunge auf derselben Seite von T liegt oder nicht.

Im ersten Falle bildet d_1 mit der x-Achse den Winkel α; daher ist die Gleichung der Geraden T_1

$$\cos\alpha\,.\,x + \sin\alpha\,.\,y - d_1 = 0,$$

im andern Falle ist der bezeichnete Winkel von α um 180^0 verschieden und daher die Gleichung von T_1

$$-\cos\alpha\,.\,x - \sin\alpha\,.\,y - d_1 = 0.$$

Da P_1 auf T_1 enthalten ist, so wird der Gleichung von $x_1\,y_1$ genügt; folglich ist

$$d_1 = \cos\alpha\,.\,x_1 + \sin\alpha\,.\,y_1, \quad \text{bez.} = -\cos\alpha\,.\,x_1 - \sin\alpha\,.\,y_1.$$

Hieraus ergiebt sich gleichmässig für beide Fälle

$$10) \qquad p_1 = -(\cos\alpha\,.\,x_1 + \sin\alpha\,.\,y_1 - d).$$

Der Wert, den die linke Seite der Normalgleichung einer Geraden für die Koordinaten irgend eines Punktes der Ebene annimmt, ist dem Abstande des Punktes von der Geraden entgegengesetzt gleich.

Ist die Gleichung von T in der Form gegeben

$$y = Ax + b,$$

so bemerken wir, dass der Winkel, den die Gerade mit der Abscissenachse einschliesst, und dessen Tangente die Richtungskonstante A ist, sich um 90^0 von α unterscheidet. Daher ist

$$\tan(\alpha \pm 90^0) = A,$$

woraus folgt

$$\cot \alpha = -A, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \cos \alpha = -\frac{A}{\sqrt{1+A^2}},$$

$$d = b \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Setzt man diese Werte in p_1 ein, so erhält man

$$\text{11)} \qquad p_1 = -\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}(y_1 - Ax_1 - b).$$

Hieran schliessen sich noch folgende Betrachtungen.

Die lineare Funktion $\cos \alpha \,.\, x + \sin \alpha \,.\, y - d$, die wir zur Abkürzung mit dem Buchstaben T bezeichnen wollen, hat für jeden Punkt der Ebene einen eindeutig bestimmten Wert. Sie verschwindet für alle Punkte einer durch die Grössen d und α bestimmten Geraden, die durch die Gleichung $T = 0$ analytisch definiert ist. Für jeden nicht auf dieser Geraden enthaltenen Punkt P nimmt sie einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Wert an.

Ändert P seine Lage auf der Ebene stetig, indem P von einer Ausgangslage Q bis zu einer Endlage R sich z. B. entlang einer geraden Linie bewegt, so ändert sich auch die Funktion T stetig. Soll daher T für die Koordinaten von Q und R Werte von verschiedenen Vorzeichen haben, so muss für einen Punkt der Strecke QR die Funktion T verschwinden, d. h. die Strecke QR muss die Gerade $T = 0$ durchschneiden.

Alle Punkte, die mit Q (oder mit R) auf derselben Seite von $T = 0$ liegen, können mit Q (bez. mit R) durch Linien verbunden werden, die $T = 0$ nicht schneiden; daher folgt, dass die Funktion T für alle Punkte, die auf derselben Seite von $T = 0$ liegen, dasselbe Vorzeichen hat, für Punkte auf verschiedenen Seiten dagegen ungleiche Vorzeichen, und umgekehrt.

Hiermit stimmen die geometrische Bedeutung der Funktion T und die oben für p_1 gegebene Vorzeichenbestimmung überein.

Soll die Untersuchung über den von zwei Geraden eingeschlossenen Winkel auf schiefwinklige Koordinaten ausgedehnt werden, so sind zunächst unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen die Winkel α_1 und α_2 durch die Richtungskonstanten A_1 und A_2 auszudrücken. Nach der in Nr. 2) des § 5 gefundenen Formel ist, sobald der Koordinatenwinkel mit ω bezeichnet wird, mit Rücksicht auf die Bedeutung des dort angewendeten Winkels β die Konstante $A = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ zu setzen. Wird hierin der Nenner entwickelt und Zähler und Nenner durch $\cos\alpha$ dividiert, so entsteht:

$$A = \frac{\tan\alpha}{\sin\omega - \tan\alpha\cos\omega},$$

woraus man leicht zu dem Resultat gelangt:

$$12)\qquad \tan\alpha = \frac{A\sin\omega}{1 + A\cos\omega}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung $\tan\delta = \pm\tan(\alpha_1 - \alpha_2)$, sowie von Nr. 12) folgt nun:

$$\tan\delta = \pm\frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \,.\, \tan\alpha_2},$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{A_1\sin\omega}{1 + A_1\cos\omega},\qquad \tan\alpha_2 = \frac{A_2\sin\omega}{1 + A_2\cos\omega}.$$

Durch Substitution der beiden letzten Werte in die erste dieser Gleichungen entsteht nach den nötigen Reduktionen:

$$13)\qquad \tan\delta = \pm\frac{(A_1 - A_2)\sin\omega}{1 + (A_1 + A_2)\cos\omega + A_1A_2}.$$

Wird hierin der Zähler $= 0$ gesetzt, so erhält man für den Fall des Parallelismus wieder die schon früher als allgemein giltig erkannte Formel: $A_1 = A_2$. Sollen dagegen die Geraden senkrecht auf einander stehen, so erwächst für diesen Fall die Bedingungsgleichung:

$$14)\qquad 1 + (A_1 + A_2)\cos\omega + A_1A_2 = 0.$$

Mit Einführung dieses Resultates können die im Vorhergehenden unter $A.$ und $B.$ gestellten Aufgaben für schiefwinklige Koordinaten gelöst werden. Wir unterlassen diese etwas umständ-

licheren Rechnungen, da das Vorhergehende hinreichen wird, die Überzeugung zu gewähren, dass für derartige Aufgaben die Anwendung rechtwinkliger Koordinaten zu grösserer Einfachheit führt.

§ 7.

Die allgemeine Gleichung des ersten Grades.

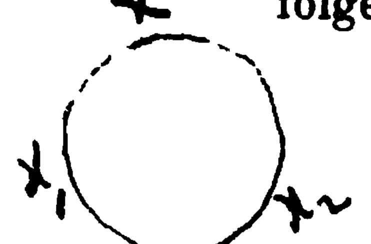
Die in den vorhergehenden Paragraphen angewendeten Gleichungsformen der geraden Linie besitzen sämtlich das gemeinschaftliche Merkmal, dass sie in Beziehung auf die veränderlichen Parallelkoordinaten dem ersten Grade angehören. Es würde zur Bestätigung dieser Bemerkung vollkommen ausreichen, wenn sie sich für irgend eine Lage der Geraden gegen das Koordinatensystem als richtig erwiese. Von den für einen solchen besonderen Fall gefundenen Relationen, z. B. den für die Achsen selbst geltenden $x = 0$ und $y = 0$, gelangen wir nämlich zu den auf jede andere Lage bezüglichen Gleichungen mittels der in § 4 aufgestellten Transformationsformeln. Da nun letztere selbst ersten Grades sind, so kann, wenn man sie mit der Gleichung der Geraden in Verbindung bringt, nach einem bekannten Satze der Algebra hierdurch der Grad dieser Gleichung nicht abgeändert werden.* Im vorliegenden Falle ist es übrigens nicht nötig, erst diese allgemeine Bemerkung heranzuziehen, da die für die gerade Linie aufgestellten Gleichungen sich bereits als allgemein giltig erwiesen haben. — Es erübrigt noch die wichtige Frage, ob die Wechselbeziehung zwischen den Eigenschaften einer geraden Linie und einer Gleichung ersten Grades für die veränderlichen x und y eine so innige ist, dass, so oft sich eine Gleichung dieser Art vorfindet, dieselbe als einer geraden Linie angehörend betrachtet werden kann. Untersuchen wir zu diesem Zwecke die allgemeinste Form einer Gleichung ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen.

* Es leuchtet sofort ein, dass durch Anwendung der dem ersten Grade angehörenden Transformationsformeln der Grad einer algebraischen Gleichung nicht erhöht werden kann; eine Erniederigung in der Art, dass etwa alle Glieder höheren Grades in Wegfall kämen, ist aber deshalb nicht möglich, weil dann bei der Rückkehr zum ursprünglichen Systeme eine Erhöhung eintreten müsste.

Jede Gleichung ersten Grades zwischen x und y kann, wenn man die mit gleichen Faktoren versehenen Glieder in eines zusammenfasst, auf die Form

$$1)\qquad Ax + By + C = 0$$

gebracht werden, worin A*, B und C beliebige zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegene beständige Koefficienten ausdrücken, von denen nur A und B nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Betrachten wir jetzt drei Punkte xy, x_1y_1, x_2y_2, deren Koordinaten sämtlich dieser Gleichung Genüge leisten sollen, so gelten für dieselben folgende Bedingungen:



$$Ax + By + C = 0,$$
$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

aus denen, wenn man die ersten derselben mit $x_1 - x_2$, die zweite mit $x_2 - x$, die dritte mit $x - x_1$ multipliciert, und die drei hierdurch erhaltenen Gleichungen addiert, das Resultat

$$2)\qquad B\{y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)\} = 0$$

hervorgeht. In gleicher Weise erhält man durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $y_2 - y_1$, der zweiten mit $y - y_2$, der dritten mit $y_1 - y$, und nachfolgende Addition:

$$A\{x(y_2 - y_1) + x_1(y - y_2) + x_2(y_1 - y)\} = 0,$$

oder bei geänderter Anordnung der Glieder:

$$3)\qquad A\{y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)\} = 0.$$

Da nun wenigstens eine der Grössen A und B von 0 verschieden sein muss, so kann dem Zusammenbestehen der Gleichungen 2) und 3) nur genügt werden, wenn

$$y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1) = 0$$

ist, d. h. nach der geometrischen Bedeutung von Nr. 10) im § 3, wenn die drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Da dies für je drei Punkte gilt, deren Koordinaten der Gleichung 1) Genüge leisten, so gehört diese selbst einer geraden Linie an.

* Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass diese Konstante A im allgemeinen nicht mit der Richtungskonstante der geraden Linie verwechselt werden darf. Ausgenommen ist der einzige Fall, wenn $B = -1$ und $C = b$, in welchem die obige Gleichung 1) mit Nr. 3) im § 5 identisch wird.

Wenn die Lage aller Punkte einer Linie durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades zwischen den veränderlichen Parallelkoordinaten bestimmt ist, so wird diese Linie selbst eine Linie n^{ter} Ordnung genannt.* Die Gerade ist nach dem Vorhergehenden die einzige Linie erster Ordnung.**

Die in Nr. 1) aufgestellte allgemeinste Gleichungsform aller Linien erster Oordnung, d. h. aller Geraden, lässt sich, wenn man beiderseits durch eine der drei beständigen Grössen A, B, C (die aber von 0 verschieden sein muss) dividiert, immer so umgestalten, dass sie nur noch zwei Konstanten, d. i. zwei der zwischen A, B und C bestehenden Verhältnisse, in sich enthält. Diese beiden Verhältnisse müssen entweder unmittelbar gegeben sein, wenn sich die Gleichung auf eine bestimmte Gerade beziehen soll, oder es sind dieselben aus zwei von einander unabhängigen Bedingungen zu berechnen. So führt die analytische Untersuchung darauf zurück, dass eine Gerade unter anderem durch ihre Richtung und einen Punkt, durch zwei ihrer Punkte u. s f. vollständig bestimmt ist. — Soll demnach an einer gegebenen Gleichung ersten Grades die Untersuchung geführt werden, ob sie für ein bestimmtes Parallelkoordinatensystem zu einer gegebenen Geraden gehört oder nicht, so muss es nach dem Vorhergehenden ausreichen, zu diesem Zwecke an zwei Punkten der Linie die Probe zu machen. Es folgt hieraus, dass eine Gleichung ersten Grades zwischen den veränderlichen x und y den Koordinaten aller Punkte einer geraden Linie Genüge leistet, sobald dies bei zweien dieser Punkte geschieht. Wäre z. B., um an einen bereits behandelten Fall anzuknüpfen, die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

nicht bereits als die einer Geraden bekannt, welche auf der x- und y-Achse die Strecken a und b abschneidet, so würde dies

* Die Berechtigung, eine Linie nach dem Grade ihrer Gleichung zu benennen, erwächst daraus, dass nach der im Eingange dieses Paragraphen gemachten Bemerkung der Grad der für eine besondere Lage des Koordinatensystems gefundenen Gleichung auch bei Änderung dieser Lage gewahrt bleibt und der Linie selbst als ein beständiges Merkmal anhaftet.

** Mit Beziehung hierauf hat eine Gleichung ersten Grades zwischen veränderlichen Zahlen den Namen lineare Gleichung erhalten.

ohne weiteres daraus folgen, dass sie als Gleichung ersten Grades den Durchschnittspunkten der vorher erwähnten Linie mit den beiden Koordinatenachsen entspricht. —

Werden die Gleichungen zweier Geraden durch Addition oder Subtraktion verbunden, wobei noch die eine oder jede mit einem beliebigen Faktor multipliciert werden kann, so entsteht wieder eine Gleichung ersten Grades, die von denselben x und y befriedigt wird, welche beiden ursprünglich gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Die durch die neue Gleichung charakterisierte Gerade muss sich demnach mit den beiden ersten Geraden in einem Punkte schneiden.

Werden die linearen Funktionen

$$A_1x + B_1y + C_1 \quad \text{und} \quad A_2x + B_2y + C_2$$

der Reihe nach mit T_1 und T_2 abkürzungsweise bezeichnet, sind ferner λ_1 und λ_2 zwei beliebige Zahlen, so sind

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0$$

die Gleichungen dreier Geraden, die durch einen gemeinsamen Punkt gehen.

Umgekehrt: Die Gleichung jeder Geraden, die durch den Schnittpunkt von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ geht, ist von der Form

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0, \tag{4}$$

wobei das Verhältnis $\lambda_1 : \lambda_2$ eindeutig bestimmt ist.

Denn man kann die Zahlen λ_1 und λ_2 immer so wählen, dass die durch die Gleichung 4) dargestellte Gerade einen beliebig gewählten Punkt P_0 enthält. Sind nämlich (T_1) und (T_2) die Werte, welche die linearen Funktionen T_1 und T_2 für die Koordinaten des Punktes P_0 annehmen, so ist die Gleichung

$$\lambda_1 (T_1) + \lambda_2 (T_2) = 0$$

die Bedingung dafür, dass P_0 auf der Geraden 4) liegt. Hieraus folgt

$$\lambda_1 : \lambda_2 = (T_2) : -(T_1);$$

die Gleichung der den Schnittpunkt $T_1 T_2$ und den Punkt P_0 enthaltenden Geraden ist daher

$$(T_2) \,.\, T_1 - (T_1) \,.\, T_2 = 0.$$

Wenn die Geraden

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0$$

durch einen Punkt gehen, so kann man, wie soeben bewiesen worden ist, zwei Zahlen λ_1 und λ_2 immer so bestimmen, dass die Summe $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ mit der Funktion T_3 bis auf einen allen drei Gliedern von T_3 gemeinsamen Faktor übereinstimmt; bezeichnet man denselben mit $-\lambda_3$, so hat man die identische Gleichung*:

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = -\lambda_3 T_3,$$

oder in symmetrischer Form:

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0. \tag{5}$$

Wenn also die Gleichungen

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0$$

drei Gerade darstellen, die einen gemeinsamen Punkt haben, so kann man immer drei Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 so bestimmen, dass die Gleichung

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0$$

identisch erfüllt wird.**

Und umgekehrt: Wenn sich die Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 so wählen lassen, dass

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3$$

identisch verschwindet, so gehen die Geraden durch einen Punkt.

Denn setzt man in die Identität

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0$$

die Koordinaten des Punktes ein, für welchen die Gleichungen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ bestehen, so reduciert sie sich auf

$$\lambda_3 T_3 = 0.$$

Der Punkt, für welchen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ ist, erfüllt daher auch die Gleichung $T_3 = 0$.

Wir wollen diese Methoden in einigen Aufgaben einüben.

§ 8.

Aufgaben.

I. Die Gleichungen der Geraden aufzustellen, welche die Winkel und Aussenwinkel eines Dreiecks halbieren.

---

* D. i. eine Gleichung, die in der Weise besteht, dass beide Seiten in Bezug auf den Faktor von x, auf den Faktor von y und auf das von Koordinaten freie Glied übereinstimmen.

** D. i. so, dass sowohl der Koefficient von x, als der von y und das von Koordinaten freie Glied verschwinden.

Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung im Innern des gegebenen Dreiecks gelegen ist. Die Gleichungen der Seiten in Normalform seien

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0.$$

Hat der Punkt Q von den Geraden T_1 und T_2 die Abstände q_1 und q_2, so ist (§ 6, Nr. 10)

$$q_1 = -T_1, \quad q_2 = -T_2.$$

Liegt Q auf der Halbierenden des von T_1 und T_2 eingeschlossenen Dreieckswinkels, so ist $q_1 = q_2$, also erfüllen die Koordinaten die analytische Bedingung

$$-T_1 = -T_2,$$

oder

$$T_1 - T_2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Geraden, welche die Punkte enthält, die von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ gleiche Abstände haben, also die Gleichung der den Dreieckswinkel $T_1 T_2$ halbierenden Geraden.

Für die Punkte Q, welche auf der den Aussenwinkel halbierenden Geraden enthalten sind, ist $q_1 = -q_2$; folglich ist für dieselben $-T_1 = +T_2$; es ist daher

$$T_1 + T_2 = 0$$

die Gleichung dieser Geraden.

Überträgt man dies auf die Halbierungslinien der beiden andern Dreieckswinkel, so erhält man, wenn die den Seiten $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ gegenüberliegenden Winkel der Reihe nach mit α_1, α_2, α_3 bezeichnet werden, die Gleichungen der Halbierungslinien

des Winkels α_3: $T_1 - T_2 = 0, \quad T_1 + T_2 = 0;$
" " α_1: $T_2 - T_3 = 0, \quad T_2 + T_3 = 0;$
" " α_2: $T_3 - T_1 = 0, \quad T_3 + T_1 = 0;$

die linken Seiten dieser sechs linearen Gleichungen erfüllen die Identitäten

1) $$(T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_1) = 0;$$
2) $$(T_1 - T_2) + (T_2 + T_3) - (T_3 + T_1) = 0;$$
3) $$-(T_1 + T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 + T_1) = 0;$$
4) $$(T_1 + T_2) - (T_2 + T_3) + (T_3 - T_1) = 0.$$

Hieraus folgt der aus der Planimetrie bekannte Satz, dass die drei Halbierenden der Winkel eines Dreiecks, sowie die Halbie-

rende jedes Dreieckswinkels mit den Halbierenden der an den beiden andern Ecken liegenden Aussenwinkel einen gemeinsamen Punkt haben.

II. Die Gleichungen der Höhen eines Dreiecks durch die Normalgleichungen der Seiten auszudrücken.

Ist $\mathfrak{T}_3 = 0$ die Gleichung der auf $T_3 = 0$ stehenden Höhe, so besteht für gewisse Zahlen λ_1, λ_2, λ_3 die Identität

$$5) \qquad \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 \mathfrak{T}_3 = 0.$$

Ist nun β_3 der Winkel, den die vom Anfangspunkte auf diese Höhe gefällte Normale mit der Abscissenachse einschliesst, so unterscheiden sich die Winkel α_3 und β_3 um 90^0, also ist

$$\cos\beta_3 : \sin\beta_3 = -\sin\alpha_3 : \cos\alpha_3.$$

Bezeichnet δ_3 den Abstand der Höhe vom Anfangspunkte, so kann man daher die Gleichung $\mathfrak{T}_3 = 0$ schreiben

$$-\sin\alpha_3 \,.\, x + \cos\alpha_3 \,.\, y \pm \delta_3 = 0,$$

wobei das letzte Vorzeichen vorläufig noch unbestimmt bleibt. Setzt man dies in 5) ein, so ergeben die mit x und y multiplicierten Glieder die Gleichungen

$$\lambda_1 \cos\alpha_1 + \lambda_2 \cos\alpha_2 - \lambda_3 \sin\alpha_3 = 0,$$
$$\lambda_1 \sin\alpha_1 + \lambda_2 \sin\alpha_2 + \lambda_3 \cos\alpha_3 = 0.$$

Diese Gleichungen genügen, um das Verhältnis $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3$ zu bestimmen.* Denn wenn man zuerst λ_2 und dann λ_1 eliminiert, so erhält man

$$\lambda_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \lambda_3 \cos(\alpha_2 - \alpha_3) = 0,$$
$$\lambda_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - \lambda_3 \cos(\alpha_3 - \alpha_1) = 0.$$

Hieraus folgt

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = -\cos(\alpha_2 - \alpha_3) : \cos(\alpha_3 - \alpha_1) : \sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

daher ist

$$6) \qquad \sin(\alpha_1 - \alpha_2)\,\mathfrak{T}_3 = \cos(\alpha_2 - \alpha_3)\,T_1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_1)\,T_2.$$

Ebenso findet man für die linken Seiten der Gleichungen $\mathfrak{T}_1 = 0$ und $\mathfrak{T}_2 = 0$ der beiden andern Höhen

$$7) \quad \begin{cases} \sin(\alpha_2 - \alpha_3)\,\mathfrak{T}_1 = \cos(\alpha_3 - \alpha_1)\,T_2 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\,T_3, \\ \sin(\alpha_3 - \alpha_1)\,\mathfrak{T}_2 = \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\,T_3 - \cos(\alpha_2 - \alpha_3)\,T_1. \end{cases}$$

---

* Hat man dasselbe ermittelt, so liefert das von Koordinaten freie Glied in 5) die Grösse $\pm\,\delta_3$, man hat alsdann für δ_3 den absoluten Wert der berechneten Zahl zu nehmen.

Die Gleichungen der Höhen sind daher:

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_3) \,.\, T_1 - \cos(\alpha_3 - \alpha_1) \,.\, T_2 = 0,$$
$$\cos(\alpha_3 - \alpha_1) \,.\, T_2 - \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \,.\, T_3 = 0,$$
$$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \,.\, T_3 - \cos(\alpha_2 - \alpha_3) \,.\, T_1 = 0.$$

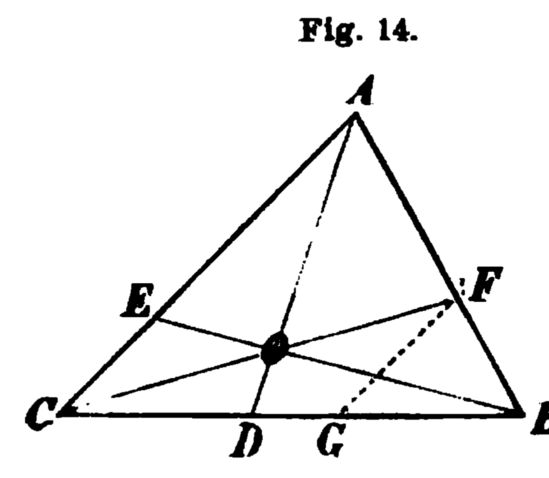
Da nach 6) und 7) die Summe

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\, \mathfrak{T}_3 + \sin(\alpha_2 - \alpha_3)\, \mathfrak{T}_1 + \sin(\alpha_3 - \alpha_1)\, \mathfrak{T}_2$$

identisch verschwindet, so folgt der bekannte planimetrische Satz, dass die Höhen eines Dreiecks einen gemeinsamen Punkt haben.

III. Durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks ABC (Fig. 14) sind drei in einem Punkte O sich schneidende Gerade AD, BE, CF gezogen. Es soll untersucht werden, in welchem Verhältnisse hierbei eine der drei Dreiecksseiten geteilt wird, wenn die Teilungsverhältnisse der beiden anderen Seiten bekannt sind.

Fig. 14.



Wir wählen CB als x-Achse und CA als y-Achse eines Parallelkoordinatensystems mit dem Anfangspunkte C und gebrauchen die Bezeichnungen: $CB = a$, $CA = b$, $CD = a_1$, $CE = b_1$. Die Geraden AD und BE haben dann die Gleichungen:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b_1} = 1.$$

Wird die zweite von der ersten subtrahiert, so entsteht:

$$\frac{x(a - a_1)}{aa_1} - \frac{y(b - b_1)}{bb_1} = 0.$$

Es ist dies die Gleichung einer Geraden, die mit AD und BE den Durchschnittspunkt O gemein hat und die, weil in ihr x und y gleichzeitig Null werden, durch den Koordinatenanfang geht, oder mit anderen Worten: es ist die Gleichung von CF. Setzen wir darin zur Abkürzung $a - a_1 = a_2$, $b - b_1 = b_2$, so gelten für den Punkt F, welcher ausserdem noch auf der Geraden AB liegt, die Gleichungen:

$$\frac{xa_2}{aa_1} - \frac{yb_2}{bb_1} = 0, \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Durch Elimination von y ergiebt sich hieraus für die Abscisse des Punktes F:

$$x = \frac{a a_1 b_2}{a_2 b_1 + a_1 b_2} = CG,$$

und, wenn man diese Grösse von a subtrahiert,

$$a - x = \frac{a a_2 b_1}{a_2 b_1 + a_1 b_2} = GB.$$

Die Verbindung der letzten Resultate durch Division führt zu der Formel:

$$CG : GB = a_1 b_2 : a_2 b_1 = \frac{b_2}{b_1} : \frac{a_2}{a_1},$$

oder, wenn man $CG : GB$ mit dem gleichen Verhältnisse $AF : FB$ vertauscht und die Werte von a_1, a_2, b_1 und b_2 einsetzt:

$$AF : FB = \frac{EA}{CE} : \frac{DB}{CD}.$$

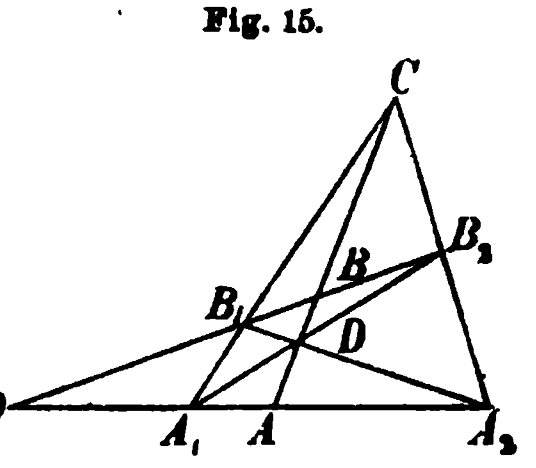
Diese Proportion enthält die Lösung der gestellten Aufgabe. Sind z. B. CA und CB in den Punkten E und D halbiert, so wird auch $AF = FB$, was zu dem bekannten Satze führt, dass die drei Mittellinien eines Dreiecks (die Geraden von den Eckpunkten nach den Mitten der Gegenseiten) sich in einem Punkte schneiden. — Bemerkenswert ist noch folgende Form, auf welche die obige Proportion gebracht werden kann:

$$AF \,.\, BD \,.\, CE = FB \,.\, DC \,.\, EA.$$

Sie enthält den planimetrischen Lehrsatz: Werden durch die Eckpunkte eines Dreiecks drei in einem Punkte sich schneidende Transversalen gezogen, so ist von den auf den Gegenseiten gebildeten Abschnitten immer das Produkt dreier nicht an einander stossenden dem Produkte der drei übrigen gleich.

IV. Auf der Geraden OA_2 (Fig. 15) sind drei feste Punkte O, A_1, A_2 gegeben. Durch dieselben werden die beliebigen Geraden OB_2, A_1C, A_2C gezogen, die sich in den Punkten B_1, B_2 und C schneiden. Wir verbinden B_1 mit A_2, B_2 mit A_1 geradlinig und endlich den Durchschnittspunkt D der beiden letzten Linien mit dem vorher gefundenen Punkte C. Die Gerade CD schneidet die Linie OA_2 im Punkte A.

Fig. 15.



Es soll $OA = a$ berechnet werden, wenn die Strecken $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$ gegeben sind.

Wir wählen OA_2 zur x-Achse und OB_2 zur y-Achse eines Parallelkoordinatensystems und setzen $OB_1 = b_1$, $OB_2 = b_2$. Dann sind die folgenden Gleichungen 8) bis 11) der Reihe nach die Gleichungen der Geraden A_1C, A_2C, A_1B_2 und A_2B_1:

$$8)\quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1, \qquad 10)\quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_2} = 1,$$

$$9)\quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1, \qquad 11)\quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_1} = 1.$$

Die halbe Summe von 8) und 9) oder von 10) und 11) ergiebt:

$$12)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)\cdot x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)\cdot y = 1.$$

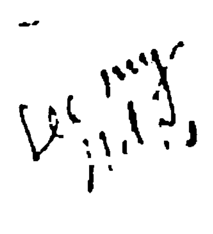
Es ist dies die Gleichung einer Geraden, welche durch die Durchschnittspunkte von A_1C und A_2C, sowie von A_1B_2 und A_2B_1 hindurchgeht, d. h. der Geraden AC. Hieraus findet sich für die auf der x-Achse abgeschnittene Strecke $OA = a$, wenn wir gleichzeitig $y = 0$ und $x = a$ setzen:

$$13)\qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) \quad \text{oder} \quad a = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2}.$$

In gleicher Weise führt, wenn wir $OB = b$ setzen, die Substitution $x = 0$ und $y = b$ in Nr. 12) zu dem Resultate:

$$14)\qquad \frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) \quad \text{oder} \quad b = \frac{2b_1b_2}{b_1 + b_2}.$$

Bemerkenswert ist hierbei, dass die Lage des Punktes A nur von der Lage der Punkte O, A_1 und A_2 abhängt, so dass man immer auf denselben Punkt A stossen muss, nach welcher Richtung man auch bei Ausführung der in der Aufgabe vorgelegten Konstruktion die Geraden OB_2, A_1C und A_2C gezogen haben mag.



Gleiches gilt für den Punkt B, dessen Lage nur durch O, B_1 und B_2 bedingt ist.

Die Strecke OA bildet das sogenannte harmonische Mittel* zwischen OA_1 und OA_2. Nach den Eigenschaften der stetigen harmonischen Proportion folgt hieraus:

* Eine Zahl x wird das harmonische Mittel zwischen zwei Zahlen a und b, von denen $a > b$ sein mag, genannt, wenn

$$(OA_2 - OA) : (OA - OA_1) = OA_2 : OA_1$$

oder in Form einer Produktgleichung:

$$15) \qquad A_1A \,.\, OA_2 = OA_1 \,.\, AA_2.$$

Da die Form der letzten Gleichung ungeändert bleibt, mögen die Punkte O, A_1, A, A_2 in der hier bezeichneten oder in der entgegengesetzten Reihenfolge durchlaufen werden, so lässt sich auch rückwärts schliessen, dass A_1A_2 ebenfalls das harmonische Mittel zwischen AA_2 und OA_2 darstellen muss, ein Resultat, welches auch leicht durch Rechnung bestätigt werden kann.

Bei der durch die Gleichungen 13) und 15) näher bestimmten Lage werden die auf derselben Geraden gelegenen Punkte O, A_1, A und A_2 harmonische Punkte genannt, und zwar je zwei solche, die, wie O und A oder A_1 und A_2 einen dritten zwischen sich haben, zugeordnete oder konjugierte Punkte. Die von einem Paar konjugierter harmonischer Punkte begrenzte Strecke wird als in den beiden anderen Punkten harmonisch geteilt bezeichnet, wonach OA in A_1 und A_2, A_1A_2 in O und A harmonisch geteilt ist. Hierbei soll von den beiden konjugierten Punkten der vom anderen Paare eingeschlossene der innere, der andere der äussere genannt werden.

Nach den vorhergehenden Resultaten bildet auf der die harmonischen Punkte O, A_1, A und A_2 enthaltenden Strecke OA_2 die Entfernung von je zwei konjugierten Punkten das harmonische Mittel zwischen den Abständen jedes der beiden anderen Punkte vom äusseren des ersten konjugierten Paares. Nehmen wir aber darauf Rücksicht, dass in den obigen Gleichungen 8) bis 11) unter den Strecken a, a_1, a_2 auch negative Werte vorkommen können, so lässt sich in dem vorhergehenden Satze der äussere Punkt des konjugierten Paares auch mit dem inneren vertauschen, sobald man

---

$$(a - x) : (x - b) = a : b,$$

d. h., wenn eine sogenannte stetige harmonische Proportion zwischen a, x und b stattfindet. Dann ist

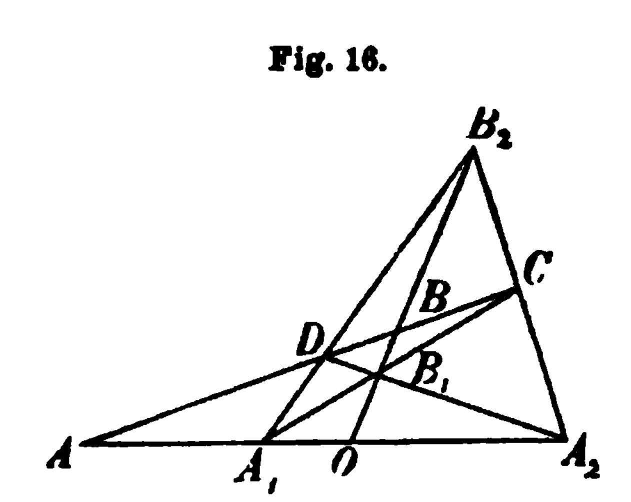
$$x = \frac{2ab}{a+b} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Überhaupt stehen vier Zahlen a, b, c, d in harmonischer Proportion, wenn

$$(a - b) : (c - d) = a : d.$$

nur entgegengesetzt gelegene Strecken mit entgegengesetzten Vorzeichen in Rechnung nimmt. Es wird hierzu genügen, wenn wir auf Fig. 16 verweisen, die mit Ausnahme der Bezeichnung eine Kopie von Fig. 15 darstellt. Der Punkt O liegt jetzt zwischen A_1 und A_2; im übrigen sind alle durch die Aufgabe bedingten Konstruktionen wiederholt worden, um zum Punkte A zu gelangen. Werden die früheren Bezeichnungen hierher übertragen, so gelten wieder für A_1C, A_2C, A_1B_2 und A_2B_1 die Gleichungen 8) bis 11), wodurch auch die Relationen 12) bis 14) ihre Bestätigung erlangen. — Da nach der letzten dieser Gleichungen auch O, B_1, B und B_2 als harmonische Punkte erscheinen, so gilt in Fig. 15 dasselbe von den Punkten A, D, B und C. Diese letzte Bemerkung gewährt ein Mittel, alle vorhergehenden Untersuchungen über harmonische Teilung in einen einzigen Lehrsatz zusammenzufassen. Das von den vier Geraden A_1C, A_2C, A_1B_2, A_2B_1 in Fig. 15 begrenzte geradlinige Gebilde stellt nämlich ein sogenanntes vollständiges Vierseit dar, dessen drei Diagonalen OA_2, OB_2, AC harmonisch geteilt sind. Diese Auffassung bringt das Resultat unserer Aufgabe unter den Satz, dass jede der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits durch die beiden anderen in Punkten geschnitten wird, welche zu den Endpunkten jener Diagonale harmonisch liegen und dabei konjugiert sind. Mittels dieses Satzes ist es leicht, zu je drei Punkten einer Geraden einen vierten harmonisch gelegenen durch eine nur mit Hilfe des Lineals auszuführende Konstruktion zu finden.

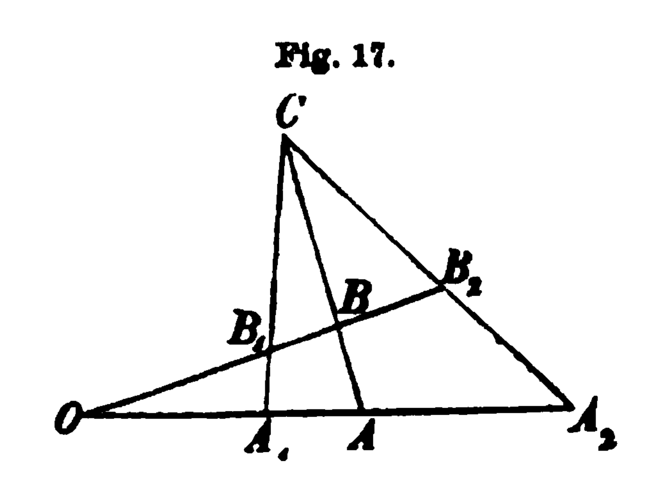
Fig. 16.



Legt man vier von einem Punkte ausgehende Strahlen durch vier harmonische Punkte, so führen diese Geraden den Namen harmonische Strahlen oder Harmonikalen und bilden zusammengenommen ein harmonisches Strahlenbüschel. Es wird dabei nicht ausgeschlossen, dass die einzelnen Strahlen des Büschels sich in unendlicher Entfernung schneiden oder parallel laufen können. Von den Harmonikalen gilt der allgemeine Satz, dass ihre Durchschnitte mit jeder beliebigen Geraden harmonisch gelegene Punkte bilden. Betrachten wir, um diesen Satz zu be-

weisen, zunächst Fig. 17, worin O, A_1, A und A_2 harmonische Punkte bilden sollen, so dass CA_1, CA, CA_2 drei Strahlen eines harmonischen Büschels darstellen. Mit Beibehaltung der zu Fig. 15 eingeführten Bezeichnungen sind die obigen Gleichungen 8) und 9) den Strahlen CA_1 und CA_2 angehörig. Da nun die durch Addition entstehende Gleichung 12) von den Punkten C und A befriedigt wird, so bezieht sie sich auf alle Punkte des Strahles CA und giebt für die Strecke OB mittels der Substitution $x = 0$ wieder die unter Nr. 14) aufgeführten Resultate. Es ist also OB in B_1 und B_2 ebenfalls harmonisch geteilt. — Stellen wir jetzt in Fig. 18 das vollständige Strahlenbüschel dar, so folgt, wenn A, B, C und D harmonisch gelegen sind, nach dem Vorhergehenden zunächst die harmonische Teilung von AD_1 und hieraus wieder dasselbe für die auf A_1D_1 gelegenen Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1. — Laufen ferner die Harmonikalen parallel, so hat man nur beide Seiten der Gleichung

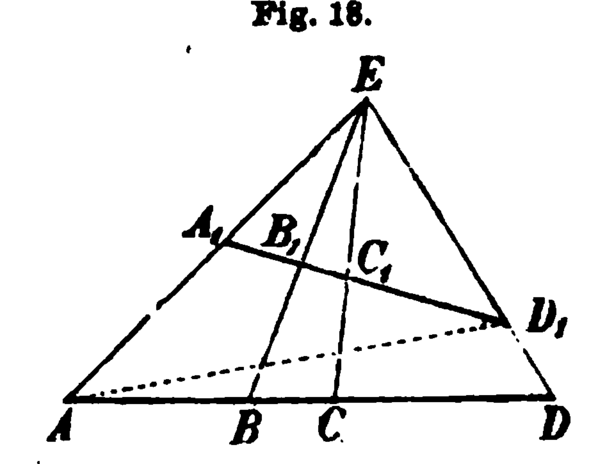
Fig. 17.



$$BC \,.\, AD = AB \,.\, CD$$

in einem und demselben Verhältnisse abzuändern, um rücksichtlich der mit AB, BC, CD, AD proportionalen Strecken A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1 zu der Gleichung

Fig. 18.



$$B_1C_1 \,.\, A_1D_1 = A_1B_1 \,.\, C_1D_1$$

zu gelangen. Hiermit ist dann ebenfalls die harmonische Lage der Punkte A_1, B_1, C_1 und D_1 bewiesen.

Drittes Kapitel.

Der Kreis.

§ 9.

Gleichungsformen des Kreises für rechtwinklige Koordinaten.

An die Betrachtung der geraden Linie, deren Eigenschaften wir aus der Beständigkeit des Polarwinkels in einem Polarkoordinatensysteme herleiteten, schliesst sich am einfachsten die Untersuchung derjenigen Linie, in welcher die Leitstrahlen konstant sind. Dies ist aber der Kreis, dessen einzelne Punkte von dem hierbei als Anfangspunkt des Koordinatensystems angesehenen Mittelpunkte eine unveränderliche Entfernung haben. Soll diese Fundamentaleigenschaft des Kreises zum besseren Anschlusse an die vorhergehenden Diskussionen auf Parallelkoordinaten bezogen werden, so gilt es, die Gleichung für den geometrischen Ort eines Punktes xy aufzustellen, dessen geradlinige Entfernung von dem durch seine Koordinaten a und b bestimmten Mittelpunkte eine konstante Grösse (den Halbmesser k) besitzt. Wir beschränken uns hierbei vorläufig auf rechtwinklige Koordinaten, weil bei deren Anwendung die Entfernung zweier Punkte einen einfacheren Ausdruck gewinnt. Nach Nr. 1) im § 3 erhalten wir dann

$$1) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = k^2$$

als allgemeinste Gleichung des Kreises.

Besondere Formen dieser allgemeinen Gleichung werden dadurch gewonnen, dass man dem Koordinatensysteme eine bestimmte Lage gegen den Kreis einräumt. Folgende zwei Fälle verdienen hierbei besondere Beachtung.

A. Wird der Koordinatenanfang in den Mittelpunkt des Kreises verlegt, so ist $a = b = 0$. Hierdurch entsteht das Resultat:

$$2) \qquad x^2 + y^2 = k^2.$$

Insofern diese einfachste Form der auf Parallelkoordinaten bezogenen Kreisgleichung in Beziehung auf jede der beiden veränderlichen Koordinaten eine rein quadratische Form besitzt, gehören in ihr jedem x zwei absolut gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftete y zu, und dasselbe findet bei den einem gegebenen y entsprechenden x statt, soweit sich überhaupt reelle Resultate vorfinden. Man erhält nämlich aus Nr. 2):

$$y = \pm\sqrt{k^2 - x^2} \quad \text{und} \quad x = \pm\sqrt{k^2 - y^2},$$

was nur solange geometrisch mögliche Werte ergiebt, als x und y zwischen den Grenzen $-k$ und $+k$ eingeschlossen sind. Aus den gleichen Doppelwerten der x und y folgt die Symmetrie des Kreises gegen jeden der beiden zu Achsen gewählten Durchmesser, also auch gegen alle Durchmesser, da immer eine der beiden Achsen in beliebiger Richtung durch den Mittelpunkt gelegt werden kann.

Schreiben wir die Gleichung 2) in der Form:

$$y^2 = (k + x)(k - x) \quad \text{oder} \quad (k - x) : y = y : (k + x),$$

so zeigt sich y als mittlere Proportionale zwischen $k - x$ und $k + x$, was auf einen bekannten planimetrischen Lehrsatz hinauskommt.

B. Nimmt man einen Punkt der Peripherie zum Anfangspunkte und legt die positive Seite der x-Achse durch den Mittelpunkt, so ist $b = 0$ und $a = k$. Hieraus ergiebt sich nach Reduktion auf y^2:

$$3) \qquad y^2 = 2kx - x^2.$$

Da diese Gleichung nur in Beziehung auf y rein quadratisch ist, so hat bei der jetzigen Gestaltung des Koordinatensystems der Kreis nur noch gegen die x-Achse eine symmetrische Lage.

Bringen wir Nr. 3) auf die Form

$$x^2 + y^2 = 2kx$$

und beachten, dass $\sqrt{x^2 + y^2}$ die Entfernung des beliebigen Peripheriepunktes xy vom Koordinatenanfange ausdrückt, die wir zur Abkürzung mit r bezeichnen wollen, so können wir auch schreiben:

$$x : r = r : 2k.$$

Es wird keine Schwierigkeit darbieten, dieses Resultat in der Form eines bekannten planimetrischen Lehrsatzes zu deuten.

Um zu allgemeinen Betrachtungen über den Kreis zu gelangen, kehren wir zunächst zu der in Nr. 1) aufgestellten allgemeinen Gleichung zurück und geben ihr mit Ausführung der darin angedeuteten Operationen die Gestalt:

$$4) \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$5) \qquad P = a^2 + b^2 - k^2$$

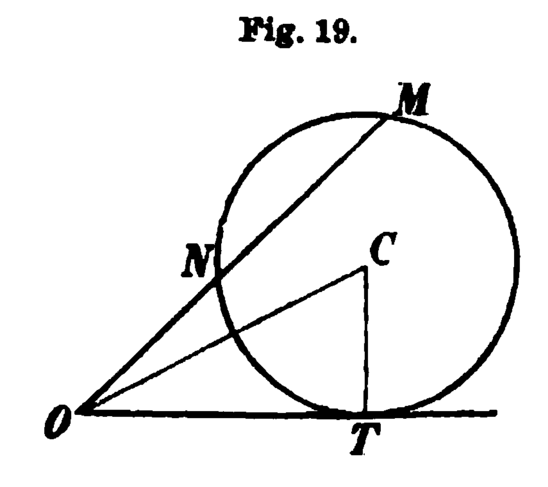
gesetzt worden ist. Es gilt vor allen Dingen, die geometrische Deutung dieser neu eingeführten Konstanten P zu untersuchen. Halten wir hierbei fest, dass $\sqrt{a^2 + b^2}$ die Entfernung des Mittelpunktes ab vom Koordinatenanfange darstellt, die wir mit e bezeichnen wollen, so können wir auch schreiben:

$$6) \qquad P = e^2 - k^2.$$

Wir untersuchen nun folgende drei Fälle:

α. Ist $e > k$, so liegt der Anfangspunkt O ausserhalb des Kreises (Fig. 19).

Fig. 19.



Verbinden wir O geradlinig mit dem Mittelpunkte C und ziehen die Tangente OT, so ist $OC = e$, $CT = k$, also:

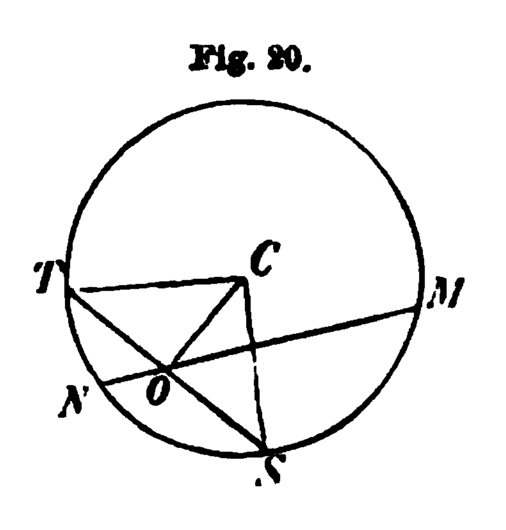
$$P = e^2 - k^2 = \overline{OT}^2,$$

oder nach einer bekannten Eigenschaft der Kreistangente:

$$P = OM \,.\, ON,$$

wenn OM eine beliebige durch O gelegte Sekante darstellt. P ist daher die Potenz* des Koordinatenanfanges in Bezug auf den Kreis.

Fig. 20.



β. Wenn $e < k$, befindet sich der Anfangspunkt O innerhalb des Kreises (Fig. 20).

Wir legen rechtwinklig gegen CO die Sehne ST, so ist

$$P = -(k^2 - e^2) = -\overline{OT}^2$$

oder, da $OT = OS$, mit Rücksicht auf die Eigenschaft der in einem Punkte sich schneidenden Kreissehnen,

* Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis heisst das Produkt der beiden zwischen ihm und dem Kreisumfange gelegenen Abschnitte jeder durch diesen Punkt gehenden geraden Linie.

$$P = -OS \, . \, OT = -OM \, . \, ON,$$

wo wieder MN eine beliebige durch O gezogene Sehne bezeichnen mag. P behält hiermit die vorhergehende Bedeutung, ist aber negativ in Rechnung zu ziehen, da die beiden als Faktoren der Potenz auftretenden Strecken eine entgegengesetzte Lage haben.

γ. Ist $e = k$, oder liegt der Anfangspunkt auf der Peripherie, so wird

$$P = 0,$$

was ebenfalls mit dem Begriffe der Potenz des Koordinatenanfanges für den Kreis insofern übereinstimmt, als hier einer der beiden Faktoren in Null übergeht.*

Kehren wir von dem im Vorhergehenden enthaltenen Exkurs zur Untersuchung der allgemeinen Kreisgleichung zurück, so lässt sich an den in Nr. 1) und 4) aufgestellten Formen das gemeinschaftliche Merkmal festhalten, dass in beiden die Beschränkung auf einen bestimmten Kreis von drei Konstanten a, b und k oder a, b und P abhängig gemacht ist, von denen P und k vermittelst der beiden andern Konstanten a und b durch die unter Nr. 5) gegebene Gleichung an einander gebunden sind. Sobald nun diese beständigen Grössen nicht unmittelbar gegebene Werte besitzen, erfordern sie zu ihrer Feststellung drei von einander unabhängige Bedingungsgleichungen. Wir gewinnen so aus der Gleichungsform das Resultat, dass zur Bestimmung eines Kreises drei Bedingungen nötig sind. Untersuchen wir den Fall, wenn der Kreis durch drei gegebene Punkte x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 hindurchgehen soll.

Zur Bestimmung der Konstanten sind bei dieser Aufgabe unter Festhaltung der Form 4) folgende drei Gleichungen vorhanden:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + P = 0,$$
$$x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2by_2 + P = 0,$$
$$x_3^2 + y_3^2 - 2ax_3 - 2by_3 + P = 0.$$

Werden je zwei derselben von einander subtrahiert, so entstehen die neuen Relationen:

---

* Dieselben Resultate werden auch gewonnen, wenn man Nr. 6) in

$$P = (e + k)(e - k)$$

umformt. Hierbei sind $e + k$ und $e - k$ als Strecken auf der Verbindungsgeraden des Koordinatenanfanges und des Kreismittelpunktes zu deuten.

$$x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2a(x_1 - x_2) - 2b(y_1 - y_2) = 0,$$
$$x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 - 2a(x_2 - x_3) - 2b(y_2 - y_3) = 0,$$
$$x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 - 2a(x_3 - x_1) - 2b(y_3 - y_1) = 0,$$

die so von einander abhängen, dass aus je zweien derselben die dritte gewonnen wird, wenn man die ersteren addiert und nachher sämmtliche Vorzeichen mit den entgegengesetzten vertauscht. Aus jedem Paare dieser Gleichungen können daher die Konstanten a und b berechnet werden, womit die Lage des Mittelpunktes bestimmt ist. Der Radius ergiebt sich dann als Entfernung des Punktes ab von einem der drei gegebenen Punkte. Wir wollen von dieser in der allgemeinen Ausführung etwas umständlichen, aber durchaus keine Schwierigkeit darbietenden Rechnung absehen und dafür durch Betrachtung der Form der drei letzten Gleichungen zu einer einfacheren Lösung zu gelangen suchen. Es genügt hierbei, nur eine dieser Gleichungen ins Auge zu fassen, da sie mit Vertauschung der Stellenzeiger für die drei Punkte sämtlich in der Form übereinstimmen.

Aus der ersten entsteht, wenn man gemeinschaftliche Faktoren aushebt und durch -2 dividiert,

$$(x_1 - x_2)\left(a - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) + (y_1 - y_2)\left(b - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.$$

Hierin bedeuten nach § 3 Nr. 11) $\frac{x_1 + x_2}{2}$ und $\frac{y_1 + y_2}{2}$ die Koordinaten des Mittelpunktes der Verbindungsgeraden von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$, die mit ξ und η bezeichnet werden sollen. Der Kreismittelpunkt ab ist hiernach auf der geraden Linie enthalten

$$(x_1 - x_2)(x - \xi) + (y_1 - y_2)(y - \eta) = 0,$$

wo x und y die variabelen Koordinaten ausdrücken. Die letzte Gleichung kann auf die Form

$$y - \eta = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(x - \xi)$$

gebracht werden und zeigt nach Nr. 6) im § 6 die Gleichung einer durch den Punkt $\xi\eta$ gehenden Geraden an, welche auf einer Geraden mit der Richtungskonstante $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ oder nach § 5 Nr. 9) auf der Verbindungslinie von $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ senkrecht steht. So gelangen wir zu dem bekannten Satze, dass der Mittelpunkt des durch drei

gegebene Punkte gehenden Kreises in den drei Perpendikeln gelegen ist, welche in den Mitten der diese drei Punkte verbindenden Sehnen errichtet werden können.

Ein zweites Merkmal, welches den für den Kreis aufgestellten Gleichungsformen anhaftet, ist, dass sie sämtlich in Beziehung auf die laufenden Koordinaten dem zweiten Grade angehören. Die allgemeinste Gestalt einer Gleichung zweiten Grades zwischen den Veränderlichen x und y ist aber, wenn man jedesmal die mit gleichen Faktoren versehenen Glieder in eines zusammenfasst,

$$7) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

worin A, B, $C \ldots F$ beliebige zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegene beständige Koefficienten vertreten, von denen immer einer, der jedoch von Null verschieden sein muss, durch Division entfernt werden kann. Soll es nun möglich sein, diese Gleichung 7) auf die in Nr. 4) gefundene Form der allgemeinen Kreisgleichung zurückzuführen, so ist die Erfüllung folgender Bedingungen notwendig und ausreichend:

α. Die Koefficienten der Quadrate von x und y müssen gleich, aber von Null verschieden sein, also: $A = B \gtrless 0$.

β. Es darf nicht das Produkt der beiden Grössen x und y vorkommen, d. h. es muss $C = 0$ sein.

Unter diesen Bedingungen erhält man nämlich mittels Division durch A aus Nr. 7)

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

eine Gleichung, die mit Nr. 4) vollständig übereinstimmt, wenn $\frac{D}{A} = -a$, $\frac{E}{A} = -b$ und $\frac{F}{A} = P$ gesetzt wird. a und b bedeuten dann die Koordinaten des Mittelpunktes eines durch die letzte Gleichung charakterisierten Kreises, dessen Radius mittels der aus Nr. 5) folgenden Relation

$$k = \sqrt{a^2 + b^2 - P}$$

berechnet werden kann. Soll dieser Kreis möglich sein, so ist es noch nötig, dass die Bedingung

$$a^2 + b^2 > P$$

erfüllt wird. Im gegenteiligen Falle ist kein Kreis, aber auch überhaupt keine Linie möglich.

Sobald nämlich $P = a^2 + b^2$, so entsteht aus Nr. 4)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0,$$

ein Resultat, dem in reellen Zahlen nur genügt wird, wenn gleichzeitig $x = a$ und $y = b$ ist. Der Kreis schwindet dabei in einen Punkt — den Mittelpunkt — zusammen.

Soll ferner $P > a^2 + b^2$ sein, so kann man

$$P = a^2 + b^2 + c^2$$

setzen, worin c eine reelle, von Null verschiedene Konstante bezeichnet. Man erhält dann aus der in Untersuchung stehenden Gleichung:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2 = 0.$$

Da die beiden ersten Glieder für keinen reellen Wert von x und y negativ werden können, so folgt, dass die Gleichung durch die Koordinaten keines Punkts der Ebene erfüllt wird.

Wir erkennen hieraus, dass eine den beiden oben gegebenen Bedingungen entsprechende Gleichung zweiten Grades zwischen x und y, wenn überhaupt eine Linie, notwendig einen Kreis geben muss. Zur Einübung benutzen wir die folgenden Aufgaben.

I. Man soll den Ort der Scheitel aller derjenigen Dreiecke suchen, welche auf einer gegebenen Grundlinie c stehen und in welchen die beiden anderen Seiten ein konstantes Verhältnis $1 : \varepsilon$ besitzen.

Die Grundlinie c werde zur x-Achse und einer ihrer Endpunkte zum Koordinatenanfange gewählt. Bezeichnen nun für irgend eine Lage des Dreiecks x und y die Koordinaten des Scheitels, so sind die Längen der beiden anderen Dreiecksseiten (vgl. § 3 Nr. 1)

$$\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

und wenn sich diese wie $1 : \varepsilon$ verhalten, so entsteht als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\varepsilon\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

oder nach Quadrierung und Verbindung der gleichnamigen Glieder

$$8) \qquad (x^2 + y^2)(1 - \varepsilon^2) - 2cx + c^2 = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass ε einen von der Einheit verschiedenen Wert besitzt, folgt hieraus:

$$x^2 + y^2 - 2\frac{c}{1 - \varepsilon^2}x + \frac{c^2}{1 - \varepsilon^2} = 0.$$

Die letztere Form zeigt für den gesuchten Ort einen Kreis an, der zu Mittelpunktskoordinaten $a = c : (1 - \varepsilon^2)$ und $b = 0$ hat. Die Potenz des Koordinatenanfanges für diesen Kreis ist $c^2 : (1 - \varepsilon^2)$ und man findet hieraus den Radius

$$k = \sqrt{\frac{c^2}{(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{c^2}{1-\varepsilon^2}} = \frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

für den Fall, dass $\varepsilon < 1$. Im entgegengesetzten Falle ist das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen.

Wenn $\varepsilon = 1$, d. h. wenn die Dreiecke gleichschenklig sein sollen, verschwinden in der ersten Gleichungsform unter Nr. 8) die quadratischen Glieder und es bleibt für die gesuchte Ortsgleichung nach gehöriger Hebung:

$$x = \tfrac{1}{2} c.$$

Der Kreis geht dann in eine gerade Linie über, welche die gemeinschaftliche Grundlinie der Dreiecke halbiert und rechtwinklig schneidet.

II. Zu n **festen Punkten soll der geometrische Ort eines beweglichen Punktes gesucht werden, welcher die Eigenschaft besitzt, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von allen gegebenen Punkten einem konstanten Quadrate** q^2 **gleich ist.**

Es seien $a_1 b_1,\ a_2 b_2, \ldots a_n b_n$ die Koordinaten der n festen Punkte und xy die des gesuchten Punktes in einer seiner Lagen, so führt die gestellte Aufgabe zu der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 \\ +\,(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 \\ +\ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \ \ . \\ +\,(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2 \end{array}\right\} = q^2.$$

Nach Auflösung der Klammern und Verbindung der in den einzelnen Horizontalreihen gleiche Stellung einnehmenden Glieder führen wir mit Anwendung des Summenzeichens Σ die abgekürzten Bezeichnungen ein:

$$\Sigma(a) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\Sigma(a^2) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \text{ u. s. f.}$$

Dann ergiebt sich für die gesuchte Ortsgleichung:

$$nx^2 + ny^2 - 2x \,.\, \Sigma(a) - 2y \,.\, \Sigma(b) + \Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2 = 0,$$

oder nach Division durch n:

$$x^2 + y^2 - 2x \cdot \frac{\Sigma(a)}{n} - 2y \cdot \frac{\Sigma(b)}{n} + \frac{\Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2}{n} = 0.$$

Man erkennt hierin einen Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten

$$a = \frac{\Sigma(a)}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

$$b = \frac{\Sigma(b)}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}.$$

Nach den bei der Aufgabe V. im § 3 gefundenen Ergebnissen sind dies die Koordinaten des Punktes der mittleren Entfernung für das gegebene System fester Punkte. Beachten wir hierbei, dass in der auf den gesuchten Kreis bezogenen Potenz $\frac{\Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2}{n}$ des angenommenen Koordinatenanfanges der Wert q immer so gewählt werden kann, dass der Radius eines der Aufgabe genügenden Kreises irgend einen gegebenen Wert enthält, so gelangen wir zu folgendem Lehrsatze:

Wenn man den Punkt der mittleren Entfernung in einem Systeme fester Punkte zum Centrum eines Systems koncentrischer Kreise wählt, so besitzen diese Kreise die Eigenschaft, dass die Quadrate der Entfernungen jedes ihrer Punkte von allen gegebenen Punkten eine für jeden einzelnen Kreis unveränderliche Summe geben.

§ 10.

Der Kreis und die Gerade.

Zur Aufsuchung der Beziehungen, welche zwischen einem Kreise und einer Geraden stattfinden, wenden wir, um für die erstere Linie eine möglichst einfache Gleichung zu erlangen, ein rechtwinkliges Koordinatensystem an, dessen Anfang im Kreismittelpunkte gelegen ist. Die Gleichungen der beiden Linien haben dann die Form:

$$x^2 + y^2 = k^2 \quad \text{und} \quad y = Ax + b,$$

wobei den Konstanten A und b die aus der Theorie der geraden Linie bekannten Deutungen zukommen.

Sollen beide Linien gemeinschaftliche Punkte besitzen, so müssen die Koordinaten dieser Punkte den beiden gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Durch Elimination von y findet sich dann für das zugehörige x:

$$1)\qquad (1 + A^2)\,x^2 + 2Abx + (b^2 - k^2) = 0.$$

Der Wert von y kann aus der Gleichung $y = Ax + b$ berechnet werden.

Die unter Nr. 1) aufgestellte Gleichung ist unter allen Umständen eine quadratische, da der zu x^2 gehörende Faktor $1 + A^2$ nie kleiner als die positive Einheit werden kann. Man erhält daher immer zwei Werte von x und eben so viele für die zugehörigen y, deren Beschaffenheit aus der sogenannten Diskriminante* dieser quadratischen Gleichung abgeleitet werden kann, nämlich aus:

$$\varDelta = A^2 b^2 - (1 + A^2)(b^2 - k^2),$$

oder, wie man nach einfacher Umformung erhält, aus:

$$\varDelta = (1 + A^2)\left(k^2 - \frac{b^2}{1 + A^2}\right).$$

Da in dem letzteren Ausdrucke der Faktor $1 + A^2$ weder verschwinden, noch einen Einfluss auf das Vorzeichen des Produktes ausüben kann, so hängt die Beschaffenheit der beiden Wurzeln lediglich von dem Faktor $k^2 - \frac{b^2}{1 + A^2}$ ab, und es sind dieselben reell und verschieden, reell und gleich oder endlich imaginär, je nachdem

$$k^2 \gtreqless \frac{b^2}{1 + A^2}.$$

---

* Aus der quadratischen Gleichung $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ findet man nach den gewöhnlichen Methoden:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\varDelta}}{\alpha},$$

worin zur Abkürzung des Ausdruckes

$$\varDelta = \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}$$

gesetzt ist. Die beiden Wurzeln sind hiernach reell und verschieden, reell und gleich oder endlich imaginär, je nachdem $\varDelta > 0$, $\varDelta = 0$ oder $\varDelta < 0$. Die Grösse $\varDelta$, deren Wert hierbei entscheidend ist, wird die Diskriminante oder Determinante der betrachteten quadratischen Gleichung genannt.

Die bei Unterscheidung dieser drei Fälle vorkommende Grösse $\frac{b^2}{1+A^2}$ ist nach Nr. 11) im § 6 das Quadrat der Entfernung der gegebenen geraden Linie vom Koordinatenanfange, d. i. hier vom Kreismittelpunkte; es kommen also die drei Fälle darauf hinaus, dieses Quadrat mit dem Quadrate des Halbmessers, oder, wenn wir zu den ersten Potenzen zurückgehen, den Radius mit der erwähnten Entfernung zu vergleichen. Je nachdem der Halbmesser grösser ist als die Entfernung, ihr gleich oder kleiner ist, haben Kreis und Gerade zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemein. Durch die gefundenen Bedingungen werden daher in der Sprache der analytischen Geometrie Sekanten, Tangenten und solche Gerade unterschieden, welche in allen ihren Punkten ausserhalb des Kreises liegen.

Bringt man die Gleichung 1), indem man durch $1+A^2$ dividiert, auf die Form

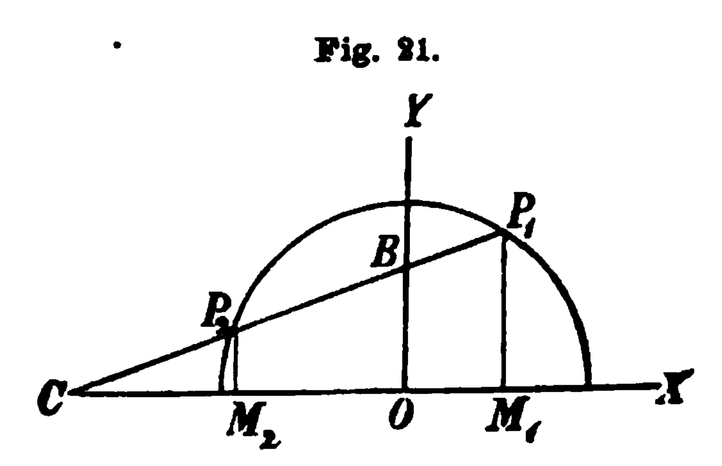
$$x^2 + 2x \cdot \frac{Ab}{1+A^2} + \frac{b^2-k^2}{1+A^2} = 0,$$

so finden nach der Theorie der quadratischen Gleichungen, wenn x_1 und x_2 die Wurzeln dieser Gleichung, d. i. die Abscissen der dem Kreise und der Geraden gemeinschaftlichen Punkte bedeuten, die Beziehungen statt:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{Ab}{1+A^2}, \quad x_1 x_2 = \frac{b^2-k^2}{1+A^2}.$$

Um zunächst die geometrische Bedeutung der letzten dieser beiden Gleichungen darzuthun, verweisen wir auf Fig. 21. Darin ist

Fig. 21.



$x_1 = OM_1$, $x_2 = OM_2$, $b = OB$, $A = \tan\alpha$, wenn α den $\angle M_1CP_1$ bezeichnet. Die fragliche Gleichung geht hiermit über in:

$$OM_1 \cdot OM_2 = \frac{b^2-k^2}{\sec^2\alpha}.$$

Wenn wir hierin beiderseitig mit $\sec^2\alpha$ multiplicieren und für $OM_1 \cdot \sec\alpha$ und $OM_2 \cdot \sec\alpha$ ihre Werte einsetzen, entsteht daraus:

$$BP_1 \cdot BP_2 = b^2 - k^2.$$

Das Produkt $BP_1 \cdot BP_2$ zeigt sich hiernach einzig von der Lage des Punktes B und dem Radius des Kreises abhängig, ohne

dass die Richtung der besonderen Geraden in Frage kommt, welcher die Durchschnittspunkte P_1 und P_2 ihre Entstehung verdanken. Die Untersuchung führt somit zu der bereits im vorigen Paragraphen benutzten Eigenschaft der Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen gegebenen Kreis zurück.

Was ferner den Wert von $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ betrifft, so wollen wir zunächst die Abkürzungen $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \xi$, $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \eta$ einführen, wobei y_1 und y_2 die den Abscissen x_1 und x_2 zugehörigen Ordinaten der Punkte P_1 und P_2 bedeuten sollen. Unter diesen Voraussetzungen sind ξ und η die Koordinaten des Halbierungspunktes der Sehne P_1P_2. Dann ist, mit Rücksicht darauf, dass dieser Punkt auf der Geraden $y = Ax + b$ liegt:

$$\xi = -\frac{Ab}{1 + A^2}, \quad \eta = A\xi + b.$$

Durch Elimination von b folgt hieraus das Resultat

$$\xi + A\eta = 0$$

als Gleichung für die Koordinaten der Mitten aller derjenigen Sehnen, welche nur in der Richtungskonstante A übereinstimmen, d. h. es ist die Gleichung des geometrischen Ortes der Mitten einer Schar paralleler Sehnen. Wird dieselbe in

$$\eta = -\frac{1}{A}\xi$$

umgestaltet, so zeigt sich aus Vergleichung mit Nr. 6) im § 6, dass sie einer durch den Koordinatenanfang (den Kreismittelpunkt) gehenden Geraden angehört, welche auf den parallelen Sehnen mit der Richtungskonstante A senkrecht steht. Die Mitten paralleler Sehnen liegen hiernach, wie schon aus der Elementargeometrie bekannt ist, auf einem zu den Sehnen normalen Durchmesser.

Da sich das letzte Resultat auf alle Geraden mit der Richtungskonstante A bezieht, so hat es auch dann noch Giltigkeit, wenn eine solche Gerade Tangente wird. Die beiden Punkte P_1 und P_2 fallen dann mit $\xi\eta$ in einen, nämlich den Berührungspunkt, zusammen, und die Gleichung

$$\xi + A\eta = 0$$

gehört, wenn man ξ und η als veränderliche Koordinaten betrachtet, dem im Berührungspunkte auf der Tangente errichteten Perpendikel oder der sogenannten Normale an. Die Form dieser Gleich-

ung zeigt, dass alle Normalen des Kreises durch seinen Mittelpunkt gehen. Mittels dieser bekannten Eigenschaft ist es leicht, die Gleichung einer an den Kreis gezogenen Tangente zu bilden, für welche der Berührungspunkt $x_1 y_1$ gegeben ist. Wir finden zunächst für die Richtungskonstante der Normale, da sie durch den Punkt $x_1 y_1$ und den Koordinatenanfang geht, nach Nr. 9) im § 5 den Wert $\frac{y_1}{x_1}$, folglich für die darauf senkrechte Tangente mit Rücksicht auf § 6 Nr. 6) die Gleichung:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

woraus nach einfacher Umformung

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$$

entsteht. Da $x_1 y_1$ ein Peripheriepunkt, also $x_1^2 + y_1^2 = k^2$ ist, so erhält man mit Einsetzung dieses Wertes für die Gleichung der im Punkte $x_1 y_1$ an den Kreis gelegten Tangente:

$$2) \qquad x_1 x + y_1 y = k^2.$$

Mit Umgehung der Normale gelangen wir zu derselben Gleichung, wenn wir in der Formel 1), welche für die Abscissen der dem Kreise und der Geraden gemeinschaftlichen Punkte giltig war. die Bedingung substituieren, unter welcher die beiden Durchschnittspunkte in einen zusammenfallen. Für den Berührungspunkt $x_1 y_1$ der an den Kreis $x^2 + y^2 = k^2$ gezogenen Tangente $y = Ax + b$ haben wir nämlich nach Nr. 1) die Gleichung:

$$(1 + A^2)\, x_1^2 + 2Abx_1 + (b^2 - k^2) = 0,$$

worin, damit die beiden Wurzeln gleich werden,

$$(1 + A^2)(b^2 - k^2) = A^2 b^2 \quad \text{oder} \quad b^2 - k^2 = \frac{A^2 b^2}{1 + A^2}$$

sein muss. Man erhält hiermit nach Division durch $1 + A^2$:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{Ab}{1 + A^2} + \left(\frac{Ab}{1 + A^2}\right)^2 = \left(x_1 + \frac{Ab}{1 + A^2}\right)^2 = 0,$$

$$x_1 = -\frac{Ab}{1 + A^2}.$$

Mittels der Gleichung $y_1 = Ax_1 + b$ findet sich ferner:

$$y_1 = \frac{b}{1 + A^2},$$

und durch Verbindung der beiden letzten Gleichungen entsteht für die Richtungskonstante der Tangente:

$$A = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Durch Substitution dieses Wertes in der Gleichung

$$y - y_1 = A\,(x - x_1),$$

welche allen durch den Punkt $x_1 y_1$ gehenden Geraden, also auch der Berührenden angehört, kommen wir zu der früher gefundenen Tangentengleichung zurück.

Die für eine Tangente mit gegebenem Berührungspunkte gefundene Gleichung 2) gewährt uns die Mittel, folgende Aufgabe zu lösen:

Von einem ausserhalb eines gegebenen Kreises gelegenen Punkte $x_1 y_1$ sollen an diesen Kreis Berührende gezogen werden; es sind die Berührungspunkte zu bestimmen.

Wird ein der gestellten Aufgabe genügender Berührungspunkt mit $\xi\eta$ bezeichnet, so erhält nach dem Vorigen die an diesen Punkt gelegte Tangente die Gleichung:

$$\xi x + \eta y = k^2,$$

die, wenn die Tangente durch den gegebenen Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, auch noch mit Einsetzung von x_1 und y_1 für x und y ihre Geltung behalten muss. Beachtet man ferner, dass der Punkt $\xi\eta$ auf der Kreisperipherie liegen soll, so hat man zu seiner Bestimmung folgende zwei Gleichungen:

$$\xi x_1 + \eta y_1 = k^2,$$
$$\xi^2 + \eta^2 = k^2.$$

Da die eine dieser beiden Gleichungen quadratisch ist, so müssen sich zwei zusammgehörige Paare von Werten für ξ und η finden; die Aufgabe lässt also im allgemeinen eine doppelte Lösung zu, was dem bekannten elementar-geometrischen Satze entspricht, dass von einem Punkte ausserhalb eines Kreises zwei Tangenten an diesen gezogen werden können. — Die Berechnung der Werte von ξ und η kann der Selbstübung überlassen bleiben. Einfacher gelangen wir auf die folgende Weise zum Ziele.

Wenn in der ersten der beiden zur Ermittelung von ξ und η führenden Gleichungen, nämlich in

$$\xi x_1 + \eta y_1 = k^2$$

ξ und η als veränderlich angesehen werden, so gehört dieselbe als Gleichung ersten Grades einer geraden Linie an, die durch die beiden gesuchten Berührungspunkte hindurchgehen muss. Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich die laufenden Koordinaten mit x und y, so ist mit geänderter Ordnung der Faktoren

$$3) \qquad x_1 x + y_1 y = k^2$$

die Gleichung der sogenannten Berührungssehne (dieselbe nach beiden Seiten hin unendlich verlängert gedacht), in deren Durchschnitten mit dem gegebenen Kreise sich die beiden Berührungspunkte vorfinden. Da die Form dieser Gleichung mit der unter Nr. 2) für die Tangente gefundenen vollkommen übereinstimmt, so besitzt die Berührungssehne wie die Tangente die Eigenschaft, auf der Verbindungsgeraden des Kreismittelpunktes mit dem Punkte $x_1 y_1$ senkrecht zu stehen.

Um den Punkt zu bestimmen, in welchem die Gerade OP_1 von der Berührungssehne geschnitten wird, drehen wir das Koordinatensystem und legen die neue Abscissenachse durch den Punkt P_1. Bezeichnet d die Strecke OP_1, so hat P_1 im neuen Systeme die Koordinaten d, 0. Die Gleichung der Berührungssehne wird daher, wenn die Abscissen mit ξ bezeichnet werden,

$$d\xi = k^2.$$

Diese Gleichung liefert

$$\xi = \frac{k^2}{d};$$

sie bestätigt zunächst, das die Berührungssehne normal zu OP_1 ist; ferner lehrt sie, dass der Radius k des Kreises das geometrische Mittel aus der Strecke OP_1 und der von der Berührungssehne auf OP_1 abgeschnittenen, an O liegenden Strecke ist.

§ 11.

Zwei Kreise.

Die gegenseitigen Lagen zweier Kreise können immer auf die eines Kreises und einer Geraden zurückgeführt werden. Sind nämlich, um von einer möglichst allgemeinen Auffassung auszugehen, die Gleichungen der beiden Kreise nach Nr. 4) im § 9 in der Form

$$1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+P_1=0, \\ x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+P_2=0 \end{cases}$$

gegeben, so muss für ihre etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte auch jede neue Gleichung giltig sein, welche als notwendige Folge der beiden gegebenen auftritt. Durch Subtraktion entsteht die Gleichung ersten Grades:

$$2)\qquad 2(a_1-a_2)x+2(b_1-b_2)y-P_1+P_2=0$$

d. i. die Gleichung derjenigen Geraden, welche die Durchschnittspunkte der beiden zu untersuchenden Kreise enthält, unter der Voraussetzung, dass solche Punkte vorhanden sind. Können hiernach die beiden Kreise nur Punkte mit einander gemein haben, welche gleichzeitig in dieser Geraden gelegen sind, so folgt zunächst mit Rücksicht auf den vorhergehenden Paragraphen, dass solcher Punkte höchstens zwei vorhanden sein werden. Die durch die Gleichung 2) charakterisierte Linie selbst stellt die gemeinschaftliche Sekante der beiden Kreise oder ihre gemeinschaftliche Tangente dar, oder liegt endlich ausserhalb beider Kreise, je nachdem dieselben sich schneiden, sich berühren oder keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen. Zu einer auf alle diese drei Lagen bezüglichen Eigenschaft der fraglichen Geraden gelangen wir durch die folgende Untersuchung.

Mit Einführung der abgekürzten Bezeichnung

$$3)\qquad \begin{cases} \Pi_1=x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+P_1, \\ \Pi_2=x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+P_2 \end{cases}$$

können die Gleichungen der beiden Kreise auf die Ausdrücke

$$\Pi_1=0 \text{ und } \Pi_2=0$$

reduciert werden. Die durch Subtraktion entstandene Gleichung 2) gewinnt hiermit die Form

$$\Pi_2-\Pi_1=0,$$

oder auch

$$4)\qquad \Pi_1=\Pi_2.$$

Hierin ist eine geometrische Eigenschaft der Linie enthalten, zu der man leicht gelangt, wenn man auf die Werte von Π_1 und Π_2 zurückgeht. Drücken wir zu diesem Endzwecke P_1 mit Benutzung der Formel 5) im § 9 durch a_1, b_1 und k_1 aus, wobei k_1 den Radius des Kreises bedeutet, für welchen a_1 und b_1 die

Mittelpunktskoordinaten darstellen, so kann die erste der Gleichungen unter Nr. 3) auf die Form

$$\Pi_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - k_1^2$$

gebracht werden. Nach einer bereits mehrfach angewendeten Formel stellt hierin die Quadratwurzel des Ausdruckes

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2$$

die Entfernung des Punktes xy vom Kreismittelpunkte $a_1 b_1$ dar, die wir mit e_1 bezeichnen wollen. Für Π_1 ergiebt sich hieraus der Wert:

$$\Pi_1 = e_1^2 - k_1^2.$$

Mit Rücksicht auf die im § 9 gewonnene Deutung der dortigen Gleichung 6), welche mit der jetzt gefundenen in der Form vollkommen übereinstimmt, bewährt sich hiernach Π_1 als Potenz des Punktes xy für den Kreis, welchem die Konstanten a_1, b_1 und k_1 zukommen. In ganz gleicher Weise gelangen wir zu der Erkenntnis, das Π_2 die Potenz des Punktes xy für den zweiten der in Untersuchung befindlichen Kreise darstellt. Hieraus folgt, dass die durch die Gleichung 4), also auch durch die hiermit identische unter Nr. 2) bezeichnete Gerade die Eigenschaft besitzt, dass jedem ihrer Punkte in Beziehung auf beide Kreise gleiche Potenzen zukommen. Nach dieser Eigenschaft soll sie die Linie gleicher Potenzen oder kurz Potenzlinie für die beiden Kreise genannt werden. Mittels der bekannten Bedeutung der Potenz eines Punktes für einen Kreis folgt hieraus unter anderem, dass, wenn man von einem ausserhalb der beiden Kreise gelegenen Punkte dieser Linie an beide Kreise Tangenten legt, die zwischen diesem Punkte und den Berührungspunkten gemessenen Strecken dieser Tangenten gleich lang sind, dass also z. B. die von den Berührungspunkten begrenzten Strecken der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise von der Potenzlinie halbiert werden. Hiernach führt sie auch die Benennung Linie der gleichen Tangenten.

Eine zweite allgemeine Eigenschaft der Potenzlinie wird gewonnen, wenn wir ihre in Nr. 2) enthaltene Gleichung auf die Form

$$y = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}x + \frac{P_1 - P_2}{2(b_1 - b_2)}$$

bringen, worin $-\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$ die Richtungskonstante bezeichnet. Nach

Nr. 5) im § 6 zeigt sich, dass eine Gerade mit der Richtungskonstante $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$ von ihr rechtwinklig durchschnitten wird. Diese letztere Konstante gehört aber nach Nr. 9) im § 5 der die Mittelpunkte der beiden Kreise verbindenden Centrallinie zu. Hieraus entsteht der Satz: Die Potenzlinie zweier Kreise steht auf der Centrallinie dieser Kreise senkrecht, wie für den Fall, wo die Potenzlinie in die gemeinschaftliche Sekante oder gemeinsame Tangente übergeht, aus der Elementargeometrie bekannt ist.

Wird zu den beiden Kreisen noch ein dritter hinzugefügt, so können nach Nr. 4) die Gleichungen der Potenzlinien dieser drei Kreise in der Form

$$\Pi_1 = \Pi_2, \quad \Pi_2 = \Pi_3, \quad \Pi_3 = \Pi_1$$

geschrieben werden. Da jede dieser drei Gleichungen eine notwendige Folge der beiden anderen ist, so muss ein Punkt, für welchen zwei dieser beiden Gleichungen gelten, auch der dritten genügen, also auch auf der dritten Potenzlinie gelegen sein, oder mit anderen Worten: Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte. Dieser Lehrsatz kann benutzt werden, um die Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden und auch nicht berührenden Kreise zu konstruieren. Legt man nämlich einen dritten Kreis so, dass er die beiden gegebenen Kreise schneidet, so sind die gemeinschaftlichen Sekanten zwei Potenzlinien, durch deren Durchschnittspunkt auch die dritte, den beiden gegebenen Kreisen angehörige hindurchgehen muss. Die durch diesen Punkt gelegte Senkrechte zur Centrallinie der beiden ersten Kreise stellt die gesuchte Gerade dar. Die Fällung der Senkrechten kann auch umgangen werden, wenn man einen vierten Kreis zu Hilfe nimmt, welcher wieder die beiden gegebenen schneidet, und mittels der gemeinsamen Sekanten einen zweiten Punkt der gesuchten Potenzlinie konstruiert.

Gehen wir zu der Aufgabe über, mittels der Potenzlinie die gegenseitigen Lagen zweier Kreise analytisch zu untersuchen, so soll zunächst zur Vereinfachung der Rechnung das Koordinatensystem so gelegt werden, dass die Gleichungen der beiden Kreise eine möglichst einfache Form gewinnen. Wir treffen hierzu folgende

Bestimmungen: Der Mittelpunkt des einen der beiden Kreise, und zwar bei Verschiedenheit der Halbmesser der Mittelpunkt des grösseren (mit dem Radius K) werde zum Koordinatenanfangspunkte gewählt und die positive Seite der x-Achse durch das Centrum des zweiten Kreises (dessen Radius k sein soll) gelegt; die positive Zahl a giebt den Abstand beider Mittelpunkte an. Die Gleichungen der zwei Kreise sind unter diesen Voraussetzungen:

$$5)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = K^2, \\ (x-a)^2 + y^2 = k^2. \end{cases}$$

Man erhält hieraus durch Substraktion als Gleichung der Potenzlinie

$$2ax - a^2 = K^2 - k^2,$$

welche leicht auf die Form

$$6)\qquad x = \frac{a^2 + K^2 - k^2}{2a} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{2} + \frac{K^2 - k^2}{2a}$$

gebracht werden kann. Nach dieser Form zeigt sich die Potenzlinie parallel zur y-Achse oder senkrecht zur x-Achse in Übereinstimmung mit der bereits bewiesenen Eigenschaft der rechtwinkligen Lage zur Centrallinie. Zugleich sehen wir, dass sie stets dem Mittelpunkte des kleineren Kreises näher gelegen sein muss, indem sie durch denjenigen Punkt der Centrallinie hindurchgeht, welcher um den nach den Voraussetzungen positiven Abstand $\frac{K^2 - k^2}{2a}$ von der Mitte der Strecke a entfernt ist. Im Falle der Gleichheit beider Kreise liegt die Potenzlinie von den Mittelpunkten gleichweit entfernt.

Zur Trennung der möglichen Lagen unterscheiden wir folgende drei Fälle:

α. Ist $x > K$, so liegt die Potenzlinie ausserhalb des grösseren, also auch ausserhalb des kleineren Kreises, da etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte stets allen drei Linien gemeinsam sein müssen. Nach Nr. 6) erhalten wir für diesen Fall die Bedingung

$$\frac{a^2 + K^2 - k^2}{2a} > K$$

und nach leichter Umgestaltung

$$(a - K)^2 - k^2 > 0$$

oder

$$\{a - (K + k)\}\{a - (K - k)\} > 0.$$

Der letzteren Ungleichung wird nur genügt, wenn

entweder $a > K + k$, wobei von selbst $a > K - k$,
oder $a < K - k$, " " " $a < K + k$.

Im ersteren dieser beiden Fälle ist $a^2 > (K + k)(K - k)$ oder $K^2 - k^2 < a^2$, folglich mit Rücksicht auf Nr. 6) $x < a$. Die Potenzlinie liegt hiernach zwischen beiden Kreisen, so dass dieselben vollständig von einander getrennt sind. Im zweiten Falle erhält man in gleicher Weise $K^2 - k^2 > a^2$ und $x > a$, die Potenzlinie liegt hierbei ausserhalb der beiden Kreise, von welchen der eine den andern umschliesst.

β. Wenn $x = K$, so ergiebt sich durch eine ähnliche Rechnung wie vorher die Bedingungsgleichung:

$$\{a - (K + k)\}\{a - (K - k)\} = 0,$$

welche nur Befriedigung erlangt, wenn entweder $a = K + k$ oder $a = K - k$. Die Potenzlinie ist hierbei gemeinsam Tangente der beiden Kreise, welche sich im ersten Falle von aussen, im zweiten von innen berühren.

γ. Sobald $x < K$, schneidet die Potenzlinie beide Kreise, die demnach einander selbst durchschneiden müssen. Als Bedingung hierfür entsteht:

$$\{a - (K + k)\}\{a - (K - k)\} < 0,$$

was nur möglich ist, wenn

$$K + k > a > K - k.$$

Die analytische Untersuchung der Potenzlinie führt hiernach auf die aus der Elementargeometrie bekannten Unterscheidungsmerkmale der Lagen zweier Kreise zurück.

§ 12.

Kreisgleichung für schiefwinklige Koordinaten.

Soll die allen vorhergehenden Betrachtungen zu Grunde gelegte Eigenschaft des Kreises, dass jeder Peripheriepunkt denselben Abstand vom Mittelpunkte besitzt, durch schiefwinklige Koordinaten ausgedrückt werden, so entsteht mit Beibehaltung der früher für die Mittelpunktskoordinaten und den Radius eingeführten Bezeichnungen nach Nr. 2) im § 3 als allgemeinste Gleichung:

$$1) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\omega = k^2,$$

worin wieder ω den Koordinatenwinkel darstellt. Zunächst kann diese Gleichung auf die Form

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2(a + b\cos\omega)x - 2(b + a\cos\omega)y$$
$$+ (a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega - k^2) = 0$$

gebracht werden, und wenn wir hierin zur Abkürzung

2) $$a + b\cos\omega = m, \qquad b + a\cos\omega = n,$$
$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega - k^2 = P$$

setzen, so geht sie über in:

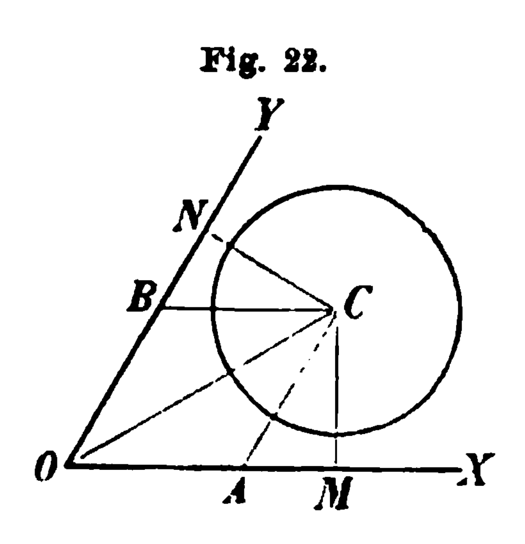
3) $$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2mx - 2ny + P = 0.$$

Was die Bedeutung der hierbei benutzten Konstanten m, n und P betrifft, so ist vor allen Dingen leicht ersichtlich, dass unter P wieder die Potenz des Koordinatenanfanges für den Kreis zu verstehen ist. Setzen wir nämlich

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\omega = e^2.$$

so stellt e nach Nr. 8) im § 2 die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Koordinatenanfangspunkte dar. Mit Substitution dieses Wertes in den Ausdruck für P kommen wir aber zur Gleichung 6) des § 9, folglich auch zu allen daraus gezogenen Folgerungen zurück. Rücksichtlich der Deutung der Konstanten m und n ist auf die erste der Gleichungen 6) im § 2 zu verweisen, nach welcher $m = b\cos\omega + a$ die Projektion des Radiusvektor des Mittelpunktes auf die x-Achse und n (wie sich sofort aus Vertauschung der Achsenbezeichnung ergiebt) die Projektion derselben Strecke auf die y-Achse darstellt. Bestätigt wird dieses Resultat in Fig. 22, worin $a = OA = BC$ und $b = OB = AC$, ferner $m = OM$ und $n = ON$ ist.

Fig. 22.



Wird die unter 3) gewonnene Gleichung des Kreises mit der im § 9 Nr. 7) angeführten allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

in Vergleichung gebracht, so zeigt sich, dass die letztere notwendig einem Kreise — wenn überhaupt einer Linie — angehören muss, sobald der Relation

4) $$A : B : C = 1 : 1 : \cos\omega$$

Genüge geleistet ist. Der Weg, welcher zu diesem Resultate führt,

ist mit dem im § 9 bei Nr. 7) eingeschlagenen vollkommen übereinstimmend.

Die im Vorigen aufgestellten Formeln gehen selbstverständlich in die für rechtwinklige Koordinaten giltigen über, wenn $\omega = 90^0$ gesetzt wird. Dabei vereinfachen sich aber die Beziehungen so sehr, dass es sich fast für alle auf den Kreis bezüglichen Untersuchungen empfiehlt, vom Gebrauche schiefwinkliger Koordinaten abzusehen. Wir beschränken uns daher einzig auf das folgende Beispiel:

Es soll die Gleichung eines Kreises aufgesucht werden, welcher die Achsen eines beliebigen Parallelkoordinatensystems berührt.

Aus Nr. 3) ergiebt sich bei noch unbestimmter Lage des Koordinatensystems für die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte des Kreises und der x-Achse mittels der Substitution $y = 0$ die Gleichung:

$$x^2 - 2mx + P = 0,$$

deren linke Seite zu einem vollständigen Quadrat werden muss, wenn die x-Achse Tangente sein soll; man erhält dafür die Bedingung:

$$P = m^2.$$

In gleicher Weise entsteht als Bedingung dafür, dass die y-Achse vom Kreise berührt wird:

$$P = n^2.$$

Treffen wir nun noch die Verfügung, dass beide Berührungspunkte in den positiven Teilen der Koordinatenachsen gelegen sein sollen, also im Vorzeichen übereinstimmen müssen, so führt die aus den beiden letzten Gleichungen folgende Relation $m^2 = n^2$ zu dem Resultate:

$$m = n.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die frühere allgemeine Gleichung erhalten wir

$$5) \qquad x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2mx - 2my + m^2 = 0$$

für die Gleichung des der gestellten Aufgabe entsprechenden Kreises. Die Substitutionen $x = 0$ und $y = 0$ zeigen, dass hierin m den Abstand der in den Achsen gelegenen Berührungspunkte vom Koordinatenanfange ausdrückt.*

* Dasselbe Resultat folgt auch aus der Bedeutung von P, verbunden mit der obigen Gleichung $P = m^2$.

Wird in der Gleichung 5) beiderseitig das Produkt

$$2xy(1 - \cos\omega) = 4xy\sin^2\tfrac{1}{2}\omega$$

addiert, so gewinnt sie die einfachere Form:

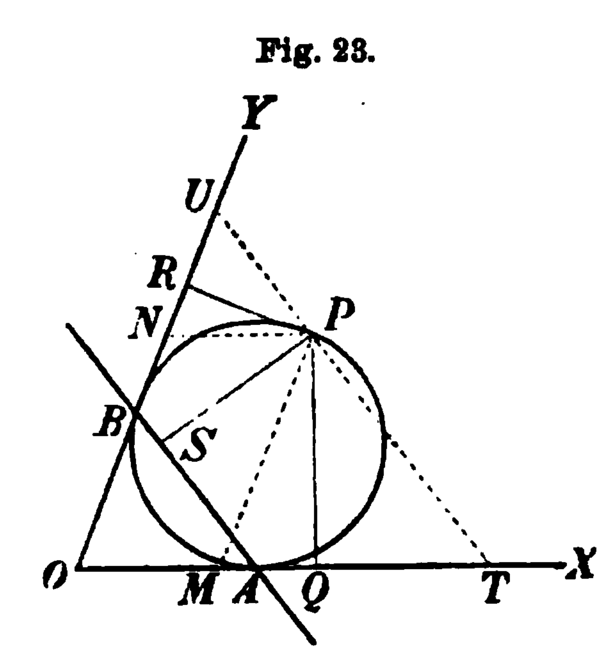
$$6)\qquad (x + y - m)^2 = 4xy\sin^2\tfrac{1}{2}\omega.$$

Multipliciert man hierin noch auf beiden Seiten mit $\cos^2\frac{1}{2}\omega$ und beachtet dabei, das $4\sin^2\frac{1}{2}\omega\cos^2\frac{1}{2}\omega = \sin^2\omega$, so kann das Resultat dieser Operation in folgender Weise geschrieben werden:

$$7)\qquad \left\{(x + y - m)\cos\tfrac{1}{2}\omega\right\}^2 = x\sin\omega \,.\, y\sin\omega.$$

Diese letztere Form der Gleichungen 5) und 6) führt zu einer einfachen geometrischen Deutung. Stellt nämlich in Fig. 23 AB die den tangierenden Koordinatenachsen zugehörige Berührungssehne dar, so lege man durch den beliebigen Peripheriepunkt P die Gerade $TU \parallel AB$. Dann ist, weil $OA = OB = m$, auch $NP = NU = x$ und $MT = MP = y$, folglich $x + y - m = AT = BU$, und $(x + y - m)\cos\frac{1}{2}\omega = SP$, wenn SP senkrecht zur Berührungssehne, also unter dem Winkel $\frac{1}{2}\omega$ gegen jede der beiden Koordinatenachsen gezogen ist. Ferner erhält man $x\sin\omega = RP$ und $y\sin\omega = QP$, wobei QP und RP rechtwinklig gegen die Koordinatenachsen gestellt sind. Hiermit gewinnt die Gleichung 7) die Deutung:

Fig. 23.



$$\overline{SP}^2 = RP\,.\,QP$$

und schliesst den folgenden Lehrsatz in sich: Im Kreise ist der Abstand jedes Peripheriepunktes von der Berührungssehne zweier Tangenten die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen desselben Punktes von den beiden Tangenten.

Zu einem wertvollen Resultate führt noch die Gleichung 5), wenn sie mit der Gleichung einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden $y = Ax$ in Verbindung gebracht wird. Durch

Elimination von y erhält man zunächst für die Koordinate x der Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises:

$$8)\quad (1 + A^2 + 2\,A\cos\omega)\,x^2 - 2\,m\,(1 + A)\,x + m^2 = 0.$$

Stellen wir uns nun die Aufgabe, auf der Sekante $y = Ax$ den zum Koordinatenanfange zugeordneten harmonischen Punkt zu suchen, während die Durchschnittspunkte mit dem Kreise die beiden anderen harmonischen Punkte darstellen sollen, so kommt, insofern die y dieser Punkte als Parallelen ein harmonisches Strahlenbüschel bilden, diese Aufgabe darauf hinaus, das harmonische Mittel der beiden Wurzeln der Gleichung 8) ausfindig zu machen. Zu diesem Zwecke sollen die beiden Wurzeln mit x_1 und x_2 bezeichnet werden; dann ergiebt sich für den gesuchten Punkt:

$$x = x_1 x_2 : \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m^2}{1 + A^2 + 2\,A\cos\omega} : \frac{m\,(1 + A)}{1 + A^2 + 2\,A\cos\omega},$$

oder:

$$x = \frac{m}{1 + A},$$

und zugleich, da er auf der gegebenen Sekante liegen soll,

$$y = Ax.$$

Wird aus den beiden letzten Gleichungen noch A eliminiert, so entsteht nach einfacher Umwandlung:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{m} = 1,$$

d. i. die Gleichung der Berührungssehne. Da dieses Resultat von A unabhängig bleibt, also für jede durch den Koordinatenanfang gehende Sekante Geltung behält, so folgt hieraus der Lehrsatz: Zieht man von einem ausserhalb des Kreises gegebenen Punkte aus beliebige den Kreis schneidende Strahlen, so wird auf jedem dieser Strahlen die zwischen dem Ausgangspunkte und der zugehörigen Berührungssehne enthaltene Strecke durch den Kreis harmonisch geteilt. Mit Anwendung des Gesetzes von der harmonischen Teilung der Diagonalen eines vollständigen Vierseits (vgl. § 8 IV) erwächst hieraus die folgende Linealkonstruktion zur Lösung der Aufgabe, von einem ausserhalb des Kreises gegebenen Punkte Tangenten an den Kreis zu legen (Fig. 24).

Man ziehe von dem gegebenen Punkte A aus die beliebigen Sekanten AB und AC, welche ausser in B und C den Kreis in D und E schneiden. Die Geraden BC und DE, sowie BE und CD geben dann die Durchschnittspunkte F und G, deren gerade Verbindungslinie FG die Berührungssehne darstellt. AH und AJ sind hiernach die gesuchten Tangenten. Da jede dritte zu Hilfe genommene Sekante in Verbindung mit einer der beiden vorher angewendeten zu derselben Berührungssehne führen muss, so lässt diese Konstruktion auch die in Fig. 25 enthaltene Abänderung zu. Hier sind durch A die drei Sekanten AB, AC und AC' gelegt und dann die Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises durch die Sehnen BE und CD, BE' und $C'D$ verbunden. Die hierdurch gewonnenen Schnittpunkte G und G' liegen wieder auf der Berührungssehne HJ.

Fig. 24.

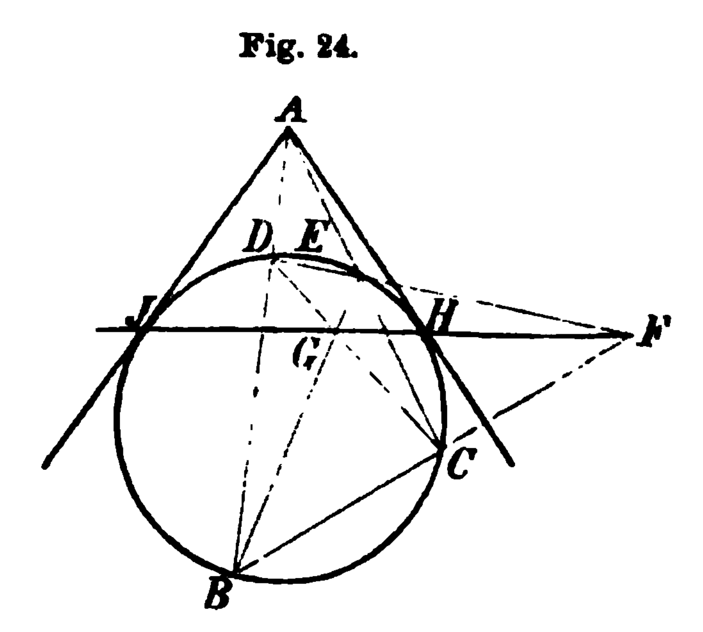
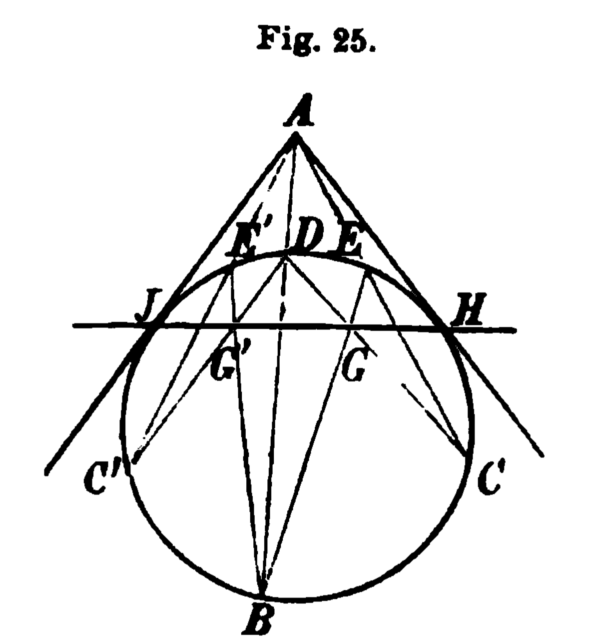


Fig. 25.



Die in den Figuren 24 und 25 dargelegten Konstruktionen, sowie der Lehrsatz, aus welchem sie entspringen, sind noch dadurch bemerkenswert, dass sich später zeigen wird, dass sie nicht allein für den Kreis, sondern überhaupt für alle Linien zweiten Grades Anwendung finden.

Viertes Kapitel.

Die Kegelschnitte.

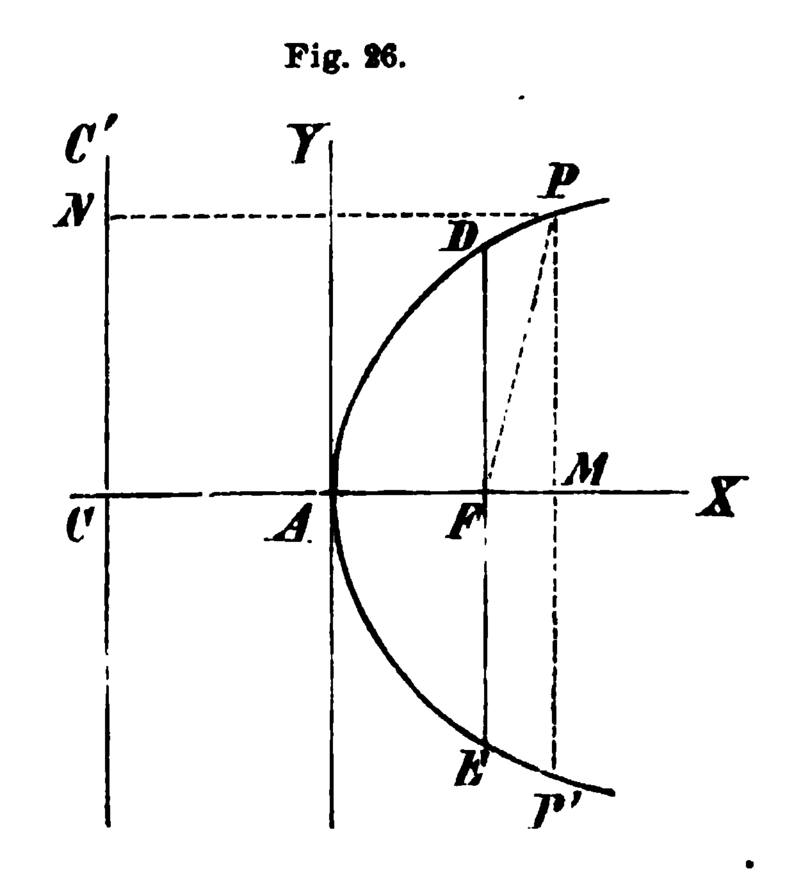
§ 13.

Allgemeine Formen der Kegelschnittsgleichung.

Aus dem Umstande, dass infolge der in den §§ 9 und 12 angestellten Betrachtungen die allgemeine Gleichung zweiten Grades für Parallelkoordinaten sich nur unter beschränkten Bedingungen einem Kreise angehörig zeigt, erwächst die Aufforderung, noch andere Linien zweiten Grades ausfindig zu machen. Ohne deshalb für jetzt auf die Gleichung selbst zurückzugehen, wenden wir uns zu einer Untersuchung, die uns mit noch mehreren Linien dieser Art bekannt machen soll.

Der geometrische Ort eines Punktes in der Ebene, dessen Entfernungen von einer festen Geraden und einem festen Punkte derselben Ebene in einem unveränderlichen Verhältnisse zu einander stehen, führt den Namen eines Kegelschnittes, weil er unter anderem auf der Oberfläche eines Rotationskegels mittels des Durchschnittes mit einer Ebene räumlich dargestellt werden kann. Wir stellen uns die Aufgabe, diesen Ort nach der gegebenen Eigenschaft und unabhängig von seiner stereometrischen Entstehung analytisch zu untersuchen. Ist CC' die feste Gerade (Direktrix), F der feste Punkt (Brennpunkt), und FC normal zu CC'; ist ferner P ein Punkt des Kegelschnitts

Fig. 26.



und PN normal zu CC', PM parallel CC', so ist die vorgelegte Bedingung

$$NP : FP = 1 : \varepsilon,$$

oder

1) $$FP = \varepsilon . NP = \varepsilon . CM.$$

Ein Punkt A der Kurve ist auf der Strecke CF enthalten; für denselben ist

$$FA = \varepsilon . CA,$$

also

$$CF = CA + FA = (1 + \varepsilon) . CA.$$

Wenn man den Abstand CF mit d bezeichnet, so hat man daher

2) $$CA = \frac{d}{1+\varepsilon}, \quad AF = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}.$$

Aus der Definition des Kegelschnitts folgt, dass derselbe symmetrisch gegen die Gerade CF liegt. Daher wählen wir dieselbe zur Abscissenachse des Koordinatensystems. Den Anfangspunkt legen wir der Einfachheit wegen in den Punkt A. Denn ist die Gleichung einer Kurve

$$F(x, y) = c,$$

wobei links durch das Zeichen $F(x, y)$ ein Polynom angedeutet ist, dessen Glieder sämtlich x oder y oder beide Koordinaten in der ersten oder in höheren Potenzen als Faktoren haben, so verschwindet die ganze linke Seite, wenn man $x = y = 0$, d. i. die Koordinaten des Anfangspunktes, substituiert; soll nun der Anfangspunkt auf der Kurve liegen, so müssen seine Koordinaten der Gleichung der Kurve genügen, es muss daher $c = 0$ sein. Hieraus folgt: Legt man den Anfangspunkt des Koordinatensystems auf einen Punkt der Kurve, so enthält die Gleichung der Kurve, falls sie von der oben angegebenen Form ist, kein von x und y freies Glied.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke FPM folgt

$$FP^2 = y^2 + \left(x - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Ferner ist

$$CM = x + \frac{d}{1+\varepsilon}.$$

Daher hat man die Gleichung

$$3)\qquad \left(x - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2\left(x + \frac{d}{1+\varepsilon}\right)^2,$$

oder entwickelt

$$y^2 + x^2 - 2\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}x + \left(\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\frac{\varepsilon^2 d}{1+\varepsilon}x + \left(\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Hieraus folgt

$$4)\qquad y^2 = 2\varepsilon dx - (1-\varepsilon^2)\,x^2.$$

Diese Gleichung ist rein quadratisch in Bezug auf y, und bestätigt dadurch die Symmetrie der Kurve gegen die x-Achse; denn zu jedem Werte von $x = AM$ gehören zwei entgegengesetzt gleiche Werte von y, MP und MP'; diese beiden Punkte P und P' liegen symmetrisch gegen die x-Achse.

Die Sehne ED, welche den Brennpunkt F enthält und normal zu AF ist, nennt man den Parameter der Kurve und bezeichnet ihn mit $2p$. Für den Halbparameter FD ergiebt sich aus der Definition der Kurve

$$FD = \varepsilon\,.\,CF;$$

daher hat man

$$5)\qquad p = \varepsilon d.$$

Führt man diesen Wert in die Kurvengleichung 3) ein, so erhält man

$$6)\qquad y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)\,x^2.$$

Der Punkt A wird als ein Scheitel des Kegelschnitts und demgemäss die Gleichung 5) als eine Scheitelgleichung bezeichnet.

Schreibt man dieselbe in der Form

$$y^2 = x\,[2p - (1-\varepsilon^2)\,x],$$

so erkennt man, dass y ausser für den Wert $x = 0$ auch noch verschwindet, wenn

$$7)\qquad x = \frac{2p}{1-\varepsilon^2}.$$

Die Kurve hat daher mit der Abscissenachse ausser dem Anfangspunkte noch den Punkt gemein, dessen Abscisse $2p:(1-\varepsilon^2)$ ist.

Diese Abscisse wird bei einem gegebenen Werte des Parameters um so grösser, je kleiner die Differenz $1 - \varepsilon^2$ ist.

Geht ε zur Grenze 1 über, so rückt der zweite Schnittpunkt des Kegelschnitts mit der Symmetrieachse AF in unendliche Ferne.

Die Kurvengleichung vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu

$$8) \qquad y^2 = 2px.$$

Dieser besondere Kegelschnitt wird als Parabel bezeichnet.

Ist $\varepsilon < 1$, so ist $1 - \varepsilon^2 > 0$ und daher auch

$$\frac{2p}{1 - \varepsilon^2}$$

positiv. Es liegt nahe, die Form der Kurvengleichung aufzusuchen, die man erhält, wenn der Anfangspunkt in die Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten der Kurve mit der Abscissenachse verlegt wird. Bezeichnet man die Abscissen im neuen Systeme wieder mit x, so hat man, um die Verlegung auszuführen, in der Gleichung 6) die Abscisse durch die Summe aus der neuen Abscisse x und der Abscisse $p:(1 - \varepsilon^2)$ des neuen Anfangspunktes zu ersetzen. Man erhält

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{1 - \varepsilon^2}\right) - (1 - \varepsilon^2)\left[x^2 + \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}\,x + \frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}\right]$$

$$= \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} - (1 - \varepsilon^2)\,x^2,$$

oder, anders geordnet,

$$9) \qquad (1 - \varepsilon^2)\,x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Die durch diese Gleichung charakterisierte Kurve wird als Ellipse bezeichnet.

Ist $\varepsilon > 1$, so ist $1 - \varepsilon^2$ negativ. Will man den Anfangspunkt wieder in die Mitte der auf der Abscissenachse enthaltenen Kurvensehne verlegen, so hat man in der Gleichung 6) die Abscisse durch $x - p:(\varepsilon^2 - 1)$ zu ersetzen. Man erhält

$$y^2 = -\frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1} + (\varepsilon^2 - 1)\,x^2,$$

oder passender

$$10)\qquad (\varepsilon^2 - 1)\, x^2 - y^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Die hierdurch charakterisierte Kurve heisst Hyperbel.

Wenn ε sich der Grenze Null nähert, so verschwinden die Abstände aller Kurvenpunkte vom Brennpunkte im Verhältnis zu ihren Abständen von der Direktrix; sollen daher nicht die Dimensionen der Kurve verschwinden, so muss der Abstand der Direktrix vom Brennpunkte ins Unendliche rücken.

Unter den Voraussetzungen $\varepsilon = 0$ und $d = \infty$ kann p einen endlichen Wert behalten; die Kurvengleichung geht alsdann über in

$$y^2 = 2px - x^2,$$

die Kurve wird daher ein Kreis, dessen Centrum F und dessen Halbmesser p ist.

§ 14.

Specielle Gleichungen für die drei Kegelschnittslinien.

I. Die Parabel. Die Fundamentaleigenschaft, aus welcher die Kegelschnitte zur Entstehung gelangten, geht, wenn $\varepsilon = 1$ gesetzt wird, in Gleichheit der Entfernungen jedes Parabelpunktes von Direktrix und Brennpunkt über. Der Scheitel kommt hierbei in die Mitte zwischen Brennpunkt und Direktrix zu liegen; es ist

$$1)\qquad p = d,\quad CA = AF = \tfrac{1}{2}p.$$

Wählen wir den Scheitel zum Koordinatenanfange, und die Symmetrieachse zur x-Achse, so ergiebt sich als Gleichung der Parabel für rechtwinklige Koordinaten (§ 13, Nr. 8)

$$2)\qquad y^2 = 2px.$$

Nach dieser Gleichung wird y für jedes negative x imaginär, während dagegen allen positiven Werten von x reelle y zugehören.

Bezeichnet man zwei Parabelpunkte mit xy und x_1y_1, so folgt aus den Gleichungen

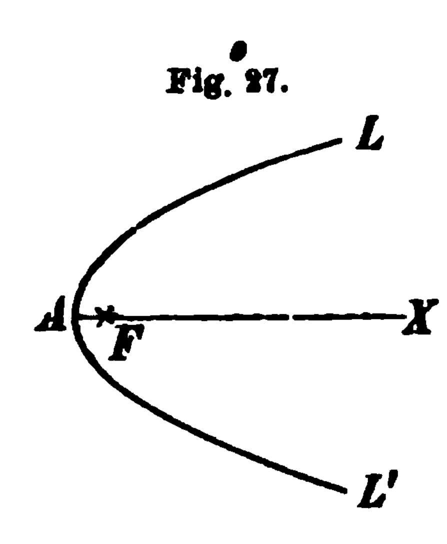
$$y^2 = 2px \quad \text{und} \quad y_1{}^2 = 2px_1$$

die Proportion:

$$x : x_1 = y^2 : y_1{}^2,$$

d. h. die Abscissen sind den Quadraten der Ordinaten proportional. Die y wachsen also gleichzeitig mit den x, jedoch nur proportional mit deren Quadratwurzeln, also in einem schwächeren Verhältnisse. Durch Verbindung dieser Eigenschaft mit der früher schon bewiesenen Symmetrie aller Kegelschnitte in Beziehung auf die Achse erhält die Parabel die Gestalt der Kurve LAL' (Fig. 27), so dass sie zu beiden Seiten der Achse AX ins Unendliche verläuft. A stellt hierbei den Scheitel und F den Brennpunkt dar.

Fig. 27.



Die Leitlinie ist in einem mit AF gleichen Abstande rückwärts von A senkrecht gegen die Achse gelegen.

II. Die Ellipse. Ist $\varepsilon < 1$, so ergiebt sich für ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x-Achse durch den Brennpunkt normal zur Direktrix gelegt ist und dessen y-Achse die auf der x-Achse enthaltene Kurvensehne halbiert, die Gleichung (§ 13, Nr. 9)

$$3)\qquad (1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Da diese Gleichung sowohl für x als y rein quadratisch ist, so hat die Ellipse in Beziehung auf beide Koordinatenachsen eine symmetrische Form, besteht demnach aus vier unter sich kongruenten Quadranten. Der Koordinatenanfang ist, wie hieraus leicht abgeleitet werden kann, Mittelpunkt der Ellipse, d. h. er besitzt die Eigenschaft, dass auf jeder hindurch gelegten Geraden zu beiden Seiten von ihm zwei Ellipsenpunkte in gleichem Abstande gelegen sind. Wird der Abstand des Scheitels A vom Mittelpunkte mit a bezeichnet, so ist (§ 13)

$$4)\qquad a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}.$$

Die Entfernung des Brennpunktes F vom Mittelpunkte führt den Namen lineare Excentricität, und wird mit c bezeichnet; dieselbe ergiebt sich aus

$$c = a - AF = \frac{p}{1-\varepsilon^2} - \frac{p}{1+\varepsilon}$$

zu

$$5)\qquad c = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2} = \varepsilon a.$$

Wenn man den aus 4) folgenden Wert

$$1 - \varepsilon^2 = \frac{p}{a}$$

in die Gleichung 3) einsetzt, so erhält man

$$\frac{p}{a} \cdot x^2 + y^2 = ap,$$

und hieraus entsteht, wenn man auf beiden Seiten durch ap dividiert,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ap} = 1.$$

Bezeichnen wir endlich die mittlere Proportionale zwischen a und p mit b, oder gebrauchen die Beziehung:

6) $$b^2 = ap,$$

so erlangt die Ellipsengleichung die symmetrische Form:

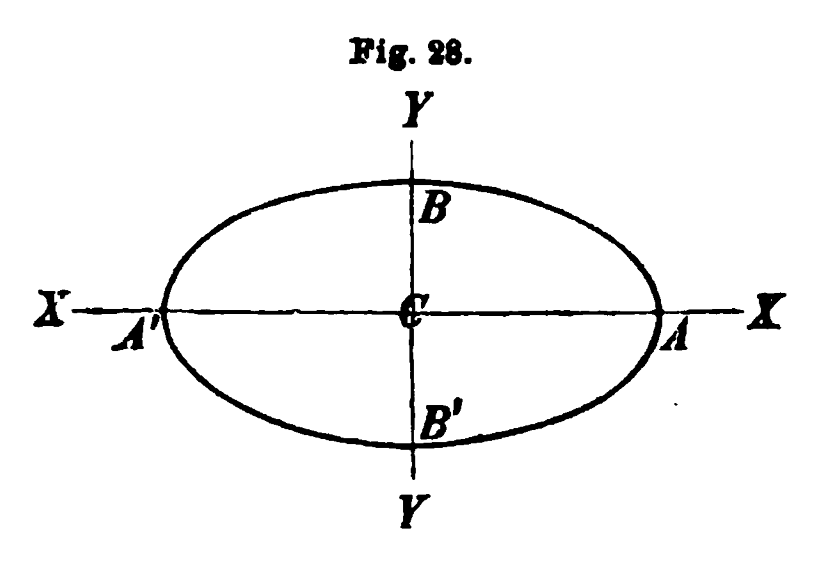
7) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgen für reelle Werte der Koordinaten die Bedingungen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \leqq 1, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqq 1,$$

wonach die Abscissen aller Ellipsenpunkte zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$, die Ordinaten zwischen $-b$ und $+b$ enthalten sind. Beschränken wir uns bei der Formübereinstimmung der vier Quadranten auf denjenigen, in welchem x und y positiv sind, so gehören der Gleichung zufolge wachsenden x abnehmende y zu. Die Ellipse zeigt sich daher als geschlossene Kurve in der Gestalt von Fig. 28. Für $y = 0$ und $x = 0$ finden sich $x = \pm a$ und $y = \pm b$ als Koordinaten der in den Achsen gelegenen Punkte A, A', B und B', der sogenannten Achsenscheitel. Die Strecken $A'A = 2a$, $B'B = 2b$ führen die Namen grosse und kleine Achse der Ellipse, die Konstanten a und b stellen also die beiden Halbachsen dar. Zu der Berechtigung, zwischen den beiden Achsen einen Gegensatz der

Fig. 28.



Grösse festzustellen, gelangt man mittels der beiden Gleichungen 5) und 6), aus denen die Ungleichung

$$a > b > p$$

folgt. Nur wenn $\varepsilon = 0$, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht, werden diese drei Werte unter sich gleich.

Zwischen den bei den vorhergehenden Gleichungen eingeführten beständigen Grössen finden noch einige Relationen statt, welche zur Herleitung von Eigenschaften der Ellipse benutzt werden können. Aus der Gleichung 5) erhält man

$$8) \qquad \varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Die Charakteristik ε erhält hiermit die Eigenschaft, die lineare Excentricität als Bruchteil der grossen Halbachse darzustellen, weshalb man ihr auch den Namen numerische Excentricität verleiht. Zugleich zeigt sich aber mit Rücksicht auf die frühere Bedeutung dieser Konstanten, dass zwischen der grossen Halbachse einer Ellipse und ihrer linearen Excentricität dasselbe Verhältnis stattfindet, in welchem die Abstände eines beliebigen Punktes dieser Kurve von der Leitlinie und dem zugeordneten Brennpunkte zu einander stehen.

Aus der Verbindung von 5) und 6) ergiebt sich ferner:

$$b^2 = (1 - \varepsilon^2)\, a^2,$$

und hieraus mit Benutzung der Relation 8) nach geänderter Ordnung der Glieder:

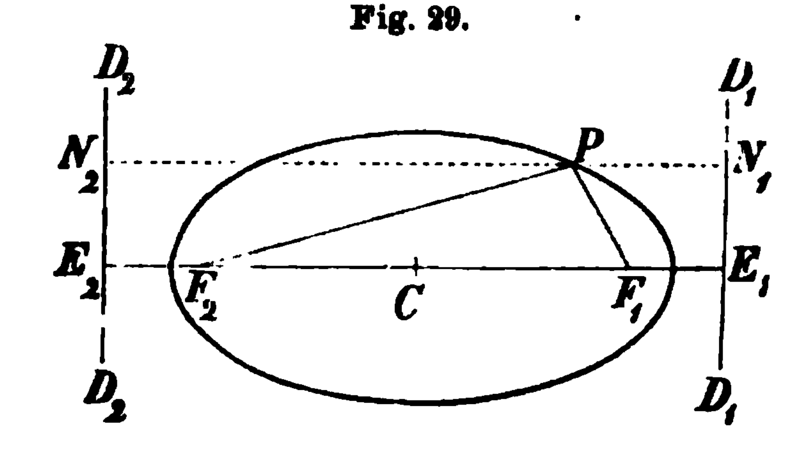
$$9) \qquad a^2 = b^2 + c^2.$$

Die Gleichungen 8) und 9) können dazu dienen, für eine mit ihren Achsen gegebene Ellipse die Lage des Brennpunktes und der zugeordneten Leitlinie ausfindig zu machen. Nach Nr. 9) giebt sich nämlich zunächst die lineare Excentricität als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks zu erkennen, in welchem die beiden Halbachsen die Hypotenuse und die andere Kathete darstellen; der Brennpunkt liegt daher in einer der grossen Halbachse gleichen Entfernung von den Scheiteln der kleinen Achse. Beachtet man ferner, dass der Abstand eines Scheitels der kleinen Achse von der Direktrix mit der Entfernung der letzteren Linie vom Mittelpunkte identisch ist, so folgt, wenn man die oben bei Nr. 8) gefundene Proportionalität auf diese Entfernung anwendet, dass der Abstand der

Direktrix vom Mittelpunkte, die grosse Halbachse und die lineare Excentricität eine stetige geometrische Proportion bilden. Nach diesen Bemerkungen gewährt es keine Schwierigkeit, Brennpunkt und Leitlinie zu konstruieren; man gelangt aber dabei, insofern jede dieser Konstruktionen zu beiden Seiten der kleinen Achse ausgeführt werden kann, zugleich zu der Wahrnehmung, dass zwei Leitlinien und zwei Brennpunkte vorhanden sein müssen, von denen jedesmal die auf derselben Seite vom Mittelpunkte aus gelegenen einander zugeordnet sind. In der Symmetrie der Ellipse gegen die kleine Achse findet diese Eigentümlichkeit ihre einfache Erklärung.

Die Existenz zweier Brennpunkte giebt noch zu der folgenden Betrachtung Veranlassung. Sind D_1D_1 und D_2D_2 die beiden Leitlinien der Ellipse in Fig. 29, ferner F_1 und F_2 die zugeordneten Brennpunkte, so gelten infolge der Eigenschaft, die wir der Entstehung der Kegelschnitte zu Grunde gelegt haben, die beiden Gleichungen: $PF_1 = \varepsilon \,.\, PN_1$, $F_2P = \varepsilon \,.\, N_2P$, und es folgt hieraus durch Addition:

Fig. 29.



$$F_2P + PF_1 = \varepsilon \,.\, E_2E_1.$$

Nach der zwischen der Entfernung einer Leitlinie vom Mittelpunkte, der grossen Halbachse und der linearen Excentricität stattfindenden stetigen Proportion ist

$$CE_1 = a^2 : c, \text{ also } E_2E_1 = 2a^2 : c = 2a : \varepsilon$$

und demnach

$$F_2P + PF_1 = 2a.$$

Geben wir dem Abstande eines Kegelschnittspunktes vom Brennpunkte den Namen **Brennstrahl**, wonach jedem Punkte einer Ellipse zwei Brennstrahlen zugehören, so führt das Vorhergehende zu dem Lehrsatze: **Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe der beiden Brennstrahlen unveränderlich gleich der grossen Achse.**

III. **Die Hyperbel.** Für den Fall $\varepsilon > 1$ ergab sich in § 13 gegenüber dem Falle $\varepsilon < 1$ der wesentliche Unterschied, dass der **Mittelpunkt** — wenn wir diese Bezeichnung vorläufig auch auf den Koordinatenanfang in § 13, Nr. 10 anwenden — und der Brenn-

punkt F von der Direktrix CC' getrennt werden, während bei der Ellipse F und der Mittelpunkt auf derselben Seite von CC' liegen. Bezeichnet man auch hier den Abstand des Scheitels A vom Mittelpunkte mit a, so hat man

$$10) \qquad a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Für die lineare Excentricität, den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte, hat man

$$c = AF + \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{p}{\varepsilon + 1} + \frac{p}{\varepsilon^2 - 1};$$

hieraus folgt

$$11) \qquad c = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Setzt man den aus 10) folgenden Wert

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{p}{a}$$

in die Gleichung der Kurve (§ 13, 10)

$$(\varepsilon^2 - 1)\, x^2 - y^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1},$$

so erhält man nach einfacher Umgestaltung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ap} = 1,$$

oder, wenn man wieder eine Hilfsgrösse b einführt, für welche die Relation 6) giltig ist,

$$12) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt vorerst wieder die Symmetrie der Hyperbel in Beziehung auf die x- und y-Achse; es besteht also auch diese Kurve in Übereinstimmung mit der Ellipse aus vier unter sich kongruenten Quadranten, und der Koordinatenanfang verdient ebenso wie dort den Namen Mittelpunkt. Dabei ist aber die Gestalt eine durchaus verschiedene, wie sich mittels der Bedingungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 > 1, \qquad \left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

ableiten lässt. Nach der ersten dieser Ungleichungen sind nämlich keine Hyperbelpunkte möglich, wenn

$$+a > x > -a,$$

also bei Übereinstimmung der Achsen und des Wertes a gerade innerhalb des Raumes, wo sich alle ausserhalb der x-Achse gelegenen Ellipsenpunkte befinden; nur für $y = 0$ fallen beide Kurven zusammen und geben $x = \pm a$ für die Abscissen der Achsenscheitel. Die Hyperbel zerfällt hiermit in zwei von einander getrennte, zu beiden Seiten der y-Achse gelegene Zweige. — Fassen wir ferner von den vier kongruenten Quadranten der Hyperbel denjenigen besonders ins Auge, innerhalb dessen beide Koordinaten positiv sind, so wachsen infolge der unter 12) gefundenen Gleichung die y gleichzeitig mit den x; dabei ist aber gemäss der Ungleichung $\left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{x}{a}\right)^2$ immer

$$y < \frac{b}{a} x,$$

d. h. die Hyperbelordinaten sind bei übereinstimmendem x kleiner als die y einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, in welcher die Richtungskonstante die Grösse $\frac{b}{a}$ besitzt. Zur näheren Untersuchung der gegenseitigen Lage der Hyperbel und dieser Geraden bringen wir die Hyperbelgleichung 12) auf die Form:

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 - y^2 = b^2$$

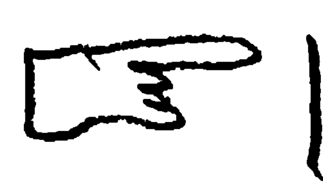
oder, indem wir linker Hand in Faktoren zerlegen:

$$\left(\frac{b}{a} x - y\right) \cdot \left(\frac{b}{a} x + y\right) = b^2.$$

Hieraus folgt für jeden Punkt der in Rede stehenden Hälfte des einen Hyperbelzweiges:

$$\frac{b}{a} x - y = \frac{ab^2}{bx + ay}.$$

Der auf der rechten Seite befindliche Quotient giebt für den Überschuss von $\frac{b}{a} x$ über y, d. i. für den in einer Parallelen zur y-Achse gemessenen Abstand der Geraden und Hyperbel, Werte, die sich bei gleichzeitig wachsenden x und y fort und fort verkleinern; ja es kann, wenn man x hinreichend gross wählt und damit auch y entsprechend anwachsen lässt, dieser Unterschied kleiner als jede

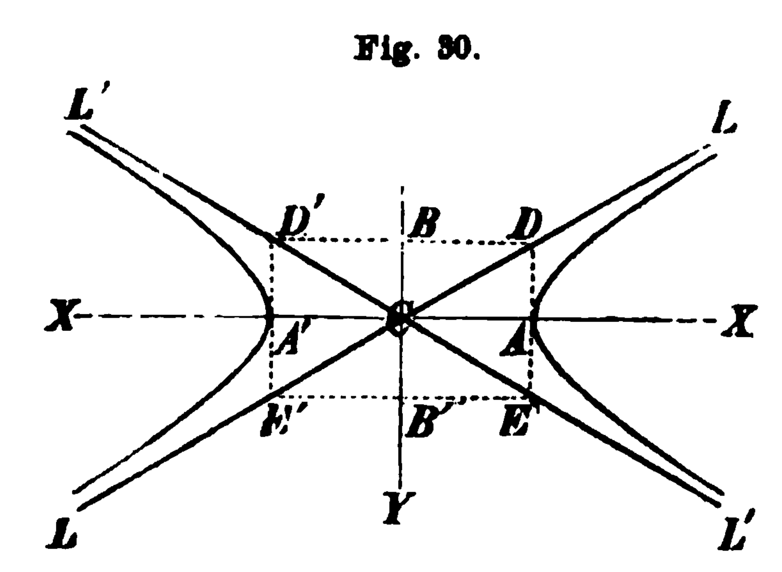


noch so kleine Grösse werden, ohne doch jemals ganz in Null überzugehen. Eine Gerade, wie die eben untersuchte, an welche sich eine krumme Linie mehr und mehr anschmiegt, ohne doch je mit ihr vollständig zusammenzufallen, heisst eine Asymptote der Kurve; die Hyperbel besitzt mit Rücksicht auf ihre Symmetrie gegen die von uns gewählten Koordinatenachsen zwei Asymptoten, die sich im Mittelpunkte schneiden. Die Gleichungen dieser Asymptoten sind:

$$13)\qquad y = +\frac{b}{a}x \quad \text{und} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

In Fig. 30 ist eine Hyperbel mit den Asymptoten LL und $L'L'$ dargestellt. Die geradlinige Strecke $A'A = 2a$ führt den Namen Hauptachse; die durch den Mittelpunkt senkrecht zur Hauptachse gelegte Gerade YY wird die Nebenachse genannt. Unter Länge der Nebenachse versteht man das Doppelte derjenigen Grösse, die wir mit b bezeichnet haben. Diese Länge kann durch eine Gerade $DE = D'E'$ dargestellt werden, welche man durch einen Achsenscheitel parallel zur Nebenachse zwischen den Asymptoten legt. Nach den Gleichungen der Asymptoten ist nämlich, wenn wir $\angle DCA$ oder die Hälfte des sogenannten Asymptotenwinkels DCE mit γ bezeichnen,

Fig. 30.



$$14)\qquad \tan\gamma = \frac{b}{a},$$

und hieraus folgt:

$$DA = a \,.\, \tan\gamma = b, \quad \text{also} \quad DE = 2b.$$

Von DE oder $D'E'$ aus wird diese Länge leicht auf die Nebenachse nach BB' übertragen. Zu bemerken ist dabei, dass eine Ellipse mit denselben Halbachsen a und b in dem zu dieser Konstruktion benutzten Rechteck $DEE'D'$ völlig eingeschlossen sein würde.

Die Relation $a > b$, welche bei der Ellipse Geltung fand, kommt für die Hyperbel in Wegfall. Es ergiebt sich diese Wahrnehmung unmittelbar aus der Gleichung 10), wonach $a > p$, wenn $\varepsilon^2 < 2$, dagegen $a < p$, wenn $\varepsilon^2 > 2$. Da nun b immer die mitt-

lere Proportionale zwischen a und p darstellt, so muss im ersteren Falle auch $a > b$ und im letzteren $a < b$ sein. Sobald $\varepsilon^2 = 2$, oder $\varepsilon = \sqrt{2}$, werden a, b und p unter sich gleich; die Hyperbel wird dann eine **gleichseitige** genannt. Aus Nr. 14) folgt ohne Schwierigkeit, dass der Asymptotenwinkel einer gleichseitigen Hyperbel ein rechter sein muss, während er für $a > b$ spitz und für $a < b$ stumpf ist.

Was die übrigen für die beständigen Grössen der Ellipse aufgestellten Beziehungen betrifft, so zeigen zunächst die Gleichungen 10) und 11), dass die Formel

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

ich für die Hyperbel Anwendung findet. Hiermit können aber gleich die daraus gezogenen Folgerungen übertragen werden. ur Nr. 9) erleidet eine Änderung, indem die Verbindung von 6) und 10) zu dem Resultate

$$b^2 = (\varepsilon^2 - 1)\, a^2$$

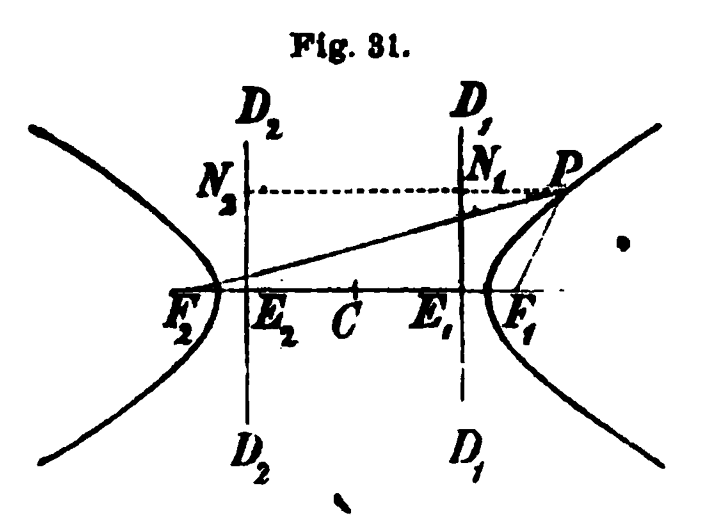
nführt, woraus mit Einsetzung des Wertes von ε und geänderter rdnung der Glieder die Relation

$$15) \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

hergeleitet wird. $CD = CE$ in Fig. 30 ist daher gleich dem Abstande des Brennpunktes vom Mittelpunkte.

In gleicher Weise wie bei der Ellipse gelangen wir auch bei der Hyperbel zu zwei Leitlinien und zwei Brennpunkten, von denen wieder die auf derselben Seite der Nebenachse gelegenen einander zugeordnet sind. In Fig. 31 sind diese beiden Leitlinien durch D_1D_1 und D_2D_2 dargestellt, mit den zugeordneten Brennpunkten F_1 und F_2. Bezeichnen wir mit ε die Charakteristik oder numerische Excentricität, so folgt aus einer ähnlichen Rechnung, wie die zu Fig. 29 bei Untersuchung der Brennstrahlen der Ellipse angestellte,

Fig. 31.



$$F_2P - F_1P = \varepsilon \,.\, E_2E_1,$$

und hieraus:

$$F_2P - F_1P = 2a.$$

Dies giebt den zur Konstruktion der Hyperbel brauchbaren Lehrsatz: Für jeden Hyperbelpunkt ist die Differenz der beiden Brennstrahlen unveränderlich gleich der Hauptachse.

Die zwischen der Ellipse und Hyperbel stattfindenden Analogien können analytisch auf die Zusammenstellung ihrer Gleichungen 7) und 12) zurückgeführt werden. Beide werden identisch, sobald man die elliptische Halbachse b in $b\sqrt{-1}$ übergehen lässt. Dadurch ist der Ausspruch gerechtfertigt: die Hyperbel kann als Ellipse mit imaginärer kleiner Achse aufgefasst werden. Um endlich noch eine Vergleichung mit der Parabel zu erlangen, muss man für alle drei Kurven die im § 13 unter Nr. 6) benutzte Gleichung anwenden, weil in der Parabel kein Mittelpunkt vorhanden ist. Bei Einführung der Beziehungen 4) und 10) entsteht hieraus das folgende System von Gleichungen:

$$16)\qquad \begin{cases} y^2 = 2px - \dfrac{p}{a}\,x^2, \\ y^2 = 2px, \\ y^2 = 2px + \dfrac{p}{a}\,x^2, \end{cases}$$

welche in der gewählten Reihenfolge zur Ellipse, Parabel und Hyperbel gehören. Ellipse und Hyperbel gehen nach dieser Zusammenstellung in die Parabel über, wenn man a unendlich werden lässt, während p endlich bleibt; hiernach kann die Parabel als eine Ellipse oder Hyperbel mit unendlich grosser Achse betrachtet werden.

Von dem allgemeinen Überblicke der drei Hauptformen der Kegelschnitte wenden wir uns in den folgenden Kapiteln zu der speciellen analytischen Untersuchung dieser Kurven. Wir gehen dabei von der Parabel aus, die insofern für die einfachste dieser drei Linien anzusehen ist, als ihre Gleichung nur von einer Konstanten abhängig gemacht werden kann, während für die Ellipse und Hyperbel die Einführung von zwei beständigen Grössen nötig wird.

Fünftes Kapitel.

Die Parabel.

---

§ 15.

Die Gleichung: $y^2 = 2px$.

Nachdem wir im vorigen Paragraphen unter I. aus der Gleichung

$$1) \qquad y^2 = 2px$$

bereits die Hauptumrisse der Gestalt für die dadurch repräsentierte Kurve — die Parabel — hergeleitet haben, wollen wir jetzt die Gleichung anwenden, um aus ihr die Mittel zu ihrer geometrischen Darstellung zu gewinnen.

I. Wird Nr. 1) in eine stetige Proportion aufgelöst, so erscheint y als mittlere Porportionale zwischen $2p$ und x, oder auch zwischen p und $2x$. Jede Konstruktion, durch welche die mittlere Proportionale zweier Strecken gefunden wird, ist daher brauchbar, um beliebig viele Punkte einer Parabel zu erlangen, deren Achse, Scheitel und Parameter gegeben sind. Trägt man z. B. aus dem Scheitel A (Fig. 32) die Abscisse AM auf der Achse rückwärts nach AT, macht $MN = p$ und konstruiert über dem Durchmesser $TN = 2x + p$ einen Halbkreis, so wird die Ordinate MP in einem Parabelpunkte P geschnitten, weil nach einer bekannten Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks MP die mittlere Proportionale zwischen TM und MN, d. i. zwischen $2x$ und p bildet. Die besondere Auftragung der Strecke MN kann hierbei noch erspart werden, wenn man beachtet, dass der Mittelpunkt des beschriebenen Halbkreises in den Brennpunkt F der Parabel fällt. Der Konstruktion zufolge ist nämlich

Fig. 32.

$$TF = TA + AF = x + \tfrac{1}{2}p,$$
$$= \tfrac{1}{2}(2x + p),$$
$$= \tfrac{1}{2}TN.$$

Das angegebene Verfahren empfiehlt sich namentlich insofern, als sich später zeigen wird, dass dabei gleichzeitig in TP und PN die Tangente und Normale des Parabelpunktes P zum Vorschein kommen.

II. Liegt ein Punkt auf zwei Geraden, für welche die Gleichungen

2) $$y = A_1 x$$

3) $$y = \frac{2p}{A_1}$$

gegeben sind, so gilt für seine Koordinaten auch die aus Multiplikation von 2) und 3) entstehende Gleichung:

$$y^2 = 2px;$$

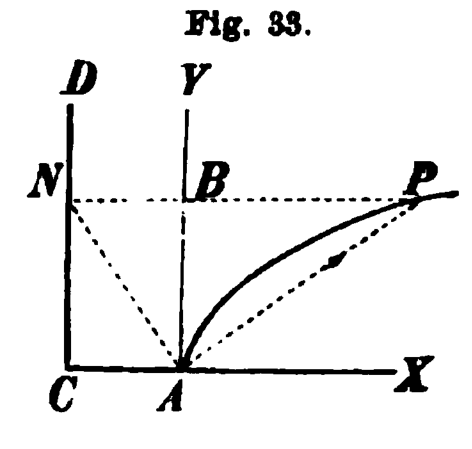
er ist also ein Parabelpunkt. Hierbei gehört, da A_1 aus der Rechnung fällt, die Gleichung 2) einer in beliebiger Richtung durch den Koordinatenanfang gelegten Geraden an, Nr. 3) dagegen einer Parallelen zur x-Achse durch denjenigen Punkt einer im Parabelscheitel auf der ersteren Geraden errichteten Senkrechten, für welchen $x = -2p$ ist. Letzteres folgt aus der Bemerkung, dass die Gleichung 3) auch in der Form

$$y = -\frac{1}{A_1}(-2p)$$

geschrieben werden kann. Dies führt zur folgenden Konstruktion:

Im Abstande $AC = 2p$ vom Scheitel (Fig. 33) errichte man die feste Gerade CD senkrecht zur Achse. Wird dann durch den Scheitel A die Gerade AP in beliebiger Richtung gelegt, hierauf das Perpendikel AN errichtet und zuletzt NP parallel zur Achse AX gezogen, so liegt der Punkt P auf der Parabel.

Fig. 33.



III. Da im § 14 die Gleichung der Parabel aus der Eigenschaft abgeleitet wurde, dass jeder Parabelpunkt gleiche Entfernung von dem Brennpunkte und der Leitlinie besitzt, so kann selbstverständlich auch von jener

Gleichung auf diese Eigenschaft zurückgegangen werden. Man gelangt hierzu, wenn man die Gleichung 1) in der Form

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

schreibt, woraus dann das Resultat

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

hervorgeht. Der linker Hand befindliche Wert giebt das Quadrat der Entfernung des Punktes xy von einem festen Punkte mit den Koordinaten $\frac{p}{2}$ und 0, d. i. vom Brennpunkte; rechter Hand befindet sich das Quadrat der Entfernung desselben Punktes von einer um die Strecke $\frac{p}{2}$ rückwärts von der y-Achse gelegenen Geraden, d. i. von der Direktrix. Die auf die Gleichheit dieser Entfernungen sich gründende Konstruktion von Parabelpunkten kann der Selbstübung des Lesers überlassen bleiben.

Werden die im Vorigen angewendeten Umformungen auf den Fall übertragen, wo die Entfernungen eines Punktes von Brennpunkt und Leitlinie ungleich sind, er also nicht auf der Parabel gelegen ist, so gehört von den hierbei möglichen zwei Fällen

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \gtrless \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

der erstere offenbar einem Punkte an, welcher ausserhalb des auf der konkaven Seite der Parabel befindlichen Teils der Ebene gelegen ist, weil die Entfernung eines solchen Punktes vom Brennpunkte bei gleicher Abscisse, also auch gleicher Entfernung von der Direktrix grösser als der Abstand des entsprechenden Parabelpunktes vom Brennpunkte sein muss. Der zweite Fall bezieht sich in gleicher Weise auf einen innerhalb der Parabel gelegenen Punkt. Hieraus folgt, dass durch die Ungleichung

$$4) \qquad y^2 > 2px$$

diejenigen Punkte bezeichnet werden, welche ausserhalb der Parabelfläche liegen*, während die Ungleichung

---

* Für den Fall eines negativen x, welchem imaginäre Parabelpunkte entsprechen, ist die Giltigkeit der Ungleichung 4) selbstverständlich.

5) $$y^2 < 2px$$

für Punkte innerhalb der Parabelfläche Geltung besitzt.

Die Beziehung der Lage von Parabelpunkten auf den Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie führt noch zu der Frage, ob vielleicht, wie bei Ellipse und Hyperbel, ausser dem bei der Konstruktion der Linie benutzten Brennpunkte noch ein zweiter vorhanden ist. Wir gehen bei Beantwortung dieser Frage von der bei Entstehung der Kegelschnitte zu Grunde gelegten Begriffsbestimmung aus, dass wir unter Brennpunkt einer Kurve einen in ihrer Ebene gelegenen Punkt verstehen, der im Vereine mit einer zugeordneten Geraden (Direktrix) die Eigenschaft besitzt, dass die Entfernungen jedes Kurvenpunktes von diesem festen Punkte und der zugehörigen Direktrix in einem konstanten Verhältnisse stehen. Bezeichnen wir nun die Koordinaten dieses Brennpunktes mit ξ und η und setzen für die Gleichung der Leitlinie

$$y = Ax + b,$$

so muss nach der angegebenen Fundamentaleigenschaft die Gleichung der Kurve die Form

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \varepsilon^2 \left\{\frac{y-(Ax+b)}{\sqrt{1+A^2}}\right\}^2$$

annehmen können, wobei ε einen unveränderlichen Faktor ausdrückt [vgl. § 3 Nr. 1) und § 6 Nr. 11)]. Werden hierin statt A, b und ε zur Abkürzung drei neue Konstanten α, β, γ eingeführt, für welche die Relationen

$$\alpha = -\frac{A\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \gamma = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}$$

giltig sind, so erlangt die Kurve, welche den Brennpunkt $\xi\eta$ besitzt, die Gleichung:

6) $$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 \text{*}$$

oder, wenn man die darin angedeuteten Operationen ausführt und nach Potenzen der Variabeln x und y ordnet,

7) $$\begin{cases}(1-\alpha^2)\,x^2 + (1-\beta^2)\,y^2 - 2\alpha\beta xy - 2\,(\xi+\alpha\gamma)\,x \\ \qquad - 2\,(\eta+\beta\gamma)y + \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0.\end{cases}$$

* Die Gleichung 6), in welcher α, β, γ beliebige Konstanten darstellen, lässt die Deutung zu, dass der Brennstrahl eine lineare Funktion der Koordinaten x und y darzustellen habe.

Die Form dieser Gleichung führt uns zu der aus der Entstehung der Kegelschnitte bereits ersichtlichen Bemerkung zurück, dass Brennpunkte nur bei Linien zweiten Grades vorkommen können. Soll nun eine solche Linie zur Parabel werden, so muss Nr. 7) in die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

übergehen. Hierzu sind die folgenden Bedingungsgleichungen nötig und ausreichend:

$$1 - \alpha^2 = 0, \qquad \alpha\beta = 0,$$
$$\eta + \beta\gamma = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0,$$

welche, da mit Rücksicht auf die beiden ersten dieser Resultate

$$\beta = 0$$

sein muss, sich auf

$$\alpha^2 = 1, \quad \eta = 0 \quad \text{und} \quad \xi^2 = \gamma^2$$

reducieren. Die Bedingung $\eta = 0$ zeigt, dass Brennpunkte nur in der Achse der Parabel gelegen sein können. — Mit Einsetzung der vorhergehenden Werte entsteht aus Nr. 7)

$$y^2 = 2(\xi + \alpha\gamma)\, x$$

als Gleichung einer Parabel, für welche

$$\xi + \alpha\gamma = p.$$

Wird diese letzte Bedingung mit den oben aufgestellten vereinigt, so gelangt man nach Elimination von α und γ zu dem Resultate:

$$p\,(p - 2\xi) = 0.$$

Dieser Gleichung kann aber in einer Parabel, deren Halbparameter p von Null verschieden sein muss, nur genügt werden, wenn

$$\xi = \frac{p}{2}.$$

Die Parabel besitzt demnach nur einen Brennpunkt, nämlich den auf der Achse im Abstande $\frac{1}{2}p$ vom Scheitel gelegenen.

§ 16.

Die Parabel und die Gerade.

Legen wir den folgenden Untersuchungen die Gleichung der Parabel wieder in der Form

$$1)\qquad y^2 = 2px$$

zu Grunde, so ist dabei in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Betrachtungen ein rechtwinkliges Koordinatensystem vorausgesetzt, dessen x-Achse mit der Parabelachse zusammenfällt und dessen Anfangspunkt im Scheitel gelegen ist. Was die hierbei angenommene y-Achse betrifft, so ergiebt sich, wenn wir ihre Gleichung

$$x = 0$$

mit der oben für die Parabel gegebenen verbinden, die Gleichung

$$y^2 = 0,$$

welche zwei gleiche Wurzeln $y = 0$ besitzt. Der Koordinatenanfang, soweit er gleichzeitig auf der y-Achse und Parabel liegt, ist daher so anzusehen, als wenn er aus zwei zusammenfallenden Punkten bestände, in denen zugleich beide Linien zusammenfallen. Hiermit gewinnt die y-Achse den Charakter einer Tangente, der man den Namen Scheiteltangente geben kann.

Gehen wir nach dieser Vorbemerkung zu den möglichen Lagen einer beliebigen Geraden gegen die Parabel über, so soll erstere durch die Gleichung

$$2)\qquad y = Ax + b$$

gegeben sein. Für etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte beider Linien gelten dann die beiden Gleichungen 1) und 2), aus denen, wenn man x eliminiert, welches in beiden Gleichungen nur in der ersten Potenz auftritt, für die Ordinaten dieser Punkte das Resultat

$$3)\qquad Ay^2 - 2py + 2bp = 0$$

entsteht. Die zugehörigen x finden sich ebensowohl aus Nr. 1) als aus 2).

Rücksichtlich der Gleichung 3) müssen wir die beiden Fälle unterscheiden, ob $A = 0$ oder von Null verschieden ist, d. h. ob die Gerade der Parabelachse parallel läuft oder sie schneidet. Im ersteren Falle giebt die Gleichung, weil sie in Beziehung auf y dem ersten Grade angehört, nur eine Wurzel, woraus das Resultat folgt, dass jede der Parabelachse parallele Gerade die

Parabel nur in einem Punkte schneidet.* Ist dagegen A von Null verschieden, so behält Nr. 3) ihre quadratische Form und es ist die Beschaffenheit der Wurzeln aus der Diskriminante

$$\Delta = p^2 - 2Abp$$

abzuleiten, welche auch in der Form

$$\Delta = 2p\left(\frac{p}{2} - Ab\right)$$

geschrieben werden kann. Da hierin der Parameter $2p$ immer einen entschieden positiven Wert besitzt, so hängt das Vorzeichen dieser Diskriminante, also auch die Beschaffenheit der Wurzeln und hiermit die gegenseitige Lage der Parabel und der Geraden von dem Vorzeichen der Differenz

$$\frac{p}{2} - Ab$$

ab. Je nachdem diese Differenz positiv, gleich Null oder negativ ist, haben die beiden Linien zwei verschiedene, einen oder besser gesagt zwei zusammenfallende Punkte oder endlich keinen Punkt gemein. Im ersteren Falle ist also die Gerade Sekante, im zweiten Tangente, im dritten liegt sie mit allen ihren Punkten ausserhalb der Parabel.

Zur geometrischen Deutung dieser Merkmale projiciere man den Brennpunkt rechtwinklig auf die Gerade. Die Gleichung der Projicierenden lautet nach Nr. 6) im § 6:

$$y = -\frac{1}{A}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

---

* Bringt man das aus Nr. 3) folgende Resultat

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 2Ab)}}{A}$$

durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit $p \mp \sqrt{p(p - 2Ab)}$ und nachfolgende Hebung von A in die Form

$$y = \frac{2bp}{p \mp \sqrt{p(p - 2Ab)}},$$

so umfasst es auch den Fall $A = 0$, und es fällt dabei, da die Wurzel mit dem obern Vorzeichen unendlich wird, der eine Durchschnittspunkt in die Unendlichkeit. Diese Bemerkung ist für die Vergleichung von Parabel und Ellipse nicht ohne Wichtigkeit.

und man erhält hieraus in Verbindung mit der obigen Gleichung Nr. 2) für die Abscisse der Brennpunktsprojektion:

$$x = \left(\frac{p}{2} - Ab\right) : (1 + A^2).$$

Da der Divisor dieses Wertes stets positiv ist, so hat die Differenz $\frac{1}{2}p - Ab$ mit dem gefundenen x gleiches Vorzeichen, und es ergiebt sich hieraus das folgende Merkmal: *Eine Gerade ist Tangente der Parabel, sobald die Projektion des Brennpunktes auf die Gerade in der Scheiteltangente liegt. Bei jeder anderen Lage ist die Gerade Sekante oder hat keinen Punkt mit der Parabel gemein, je nachdem die Brennpunktsprojektion von der Scheiteltangente aus auf die Seite der Parabel oder die entgegengesetzte Seite fällt.* Besonders wichtig ist von diesen drei Fällen der auf Tangenten bezügliche, indem er dazu benutzt werden kann, um bei gegebenem Brennpunkte alle auf Parabeltangenten bezüglichen Aufgaben durch Konstruktion zu lösen.

Wir wenden uns zur analytischen Behandlung solcher Aufgaben, wobei wir das Kennzeichen festzuhalten haben, dass jede Gerade, deren Konstanten die Bedingung

$$\frac{p}{2} - Ab = 0$$

oder

4) $$p = 2Ab$$

erfüllen, eine Tangente darstellt.

Aus Nr. 4) folgt zunächst, wenn die Richtung einer zu ziehenden Tangente gegeben ist,

$$b = \frac{p}{2A}$$

und hieraus für die Gleichung der Berührungslinie selbst:

5) $$y = Ax + \frac{p}{2A}.$$

Dieses Resultat zeigt, dass in gegebener Richtung stets nur *eine* Parabeltangente gelegt werden kann, und führt bei Konstruktion der Grösse $\frac{p}{2A}$ oder $\frac{p}{2} : A$ auf das oben für Tangenten festgesetzte

* because $\left(\frac{p}{2} - Ab\right)$ for a tangent line must be zero – see b 99.

Merkmal zurück. Auszuschliessen ist jedoch der Fall $A = 0$, in welchem die Tangente in die Unendlichkeit fällt.

Soll ferner eine Gerade $y = Ax + b$ die Parabel berühren und dabei durch einen festen Punkt $x_1 y_1$ hindurchgehen, so hat man zur Bestimmung der beständigen Grössen A und b die beiden Bedingungen:

$$p = 2Ab, \qquad y_1 = Ax_1 + b.$$

Hieraus entsteht, wenn man b eliminiert, zur Berechnung der Grösse A, für welche die Bedingung $A = 0$ bereits ausgeschlossen ist, die Gleichung:

$$6) \qquad 2A^2 x_1 - 2Ay_1 + p = 0.$$

Die zugehörigen b ergeben sich aus:

$$7) \qquad b = \frac{p}{2A}.$$

Mit Rücksicht auf die quadratische Form von Nr. 6) folgt, dass durch den Punkt $x_1 y_1$ zwei Tangenten, eine oder keine möglich sind, je nachdem

$$y_1^2 \gtreqless 2px_1,$$

was mit Rücksicht auf die Gleichung der Parabel in Verbindung mit den Ungleichungen 4) und 5) des vorigen Paragraphen darauf hinauskommt, ob der gegebene Punkt ausserhalb der Parabelfläche, auf der Peripherie oder innerhalb gelegen ist.

Soll der Punkt $x_1 y_1$ Berührungspunkt sein, so findet die Gleichung

$$8) \qquad y_1^2 = 2px_1$$

statt. Wird nun Nr. 6) mit p multipliciert, so entsteht mit Benutzung von 8):

$$A^2 y_1^2 - 2Apy_1 + p^2 = 0,$$

und hieraus folgt:

$$9) \qquad A = \frac{p}{y_1}.$$

Für die Konstante b ergiebt sich aus Nr. 7), wenn man den gefundenen Wert von A einsetzt,

$$10) \qquad b = \frac{y_1}{2},$$

und man erhält durch Substitution dieser Werte von A und b in die Gleichung der Geraden bei Beachtung von Nr. 8) als Gleichung einer Tangente mit dem Berührungspunkte $x_1 y_1$:

11) $$y_1 y = p(x + x_1).$$

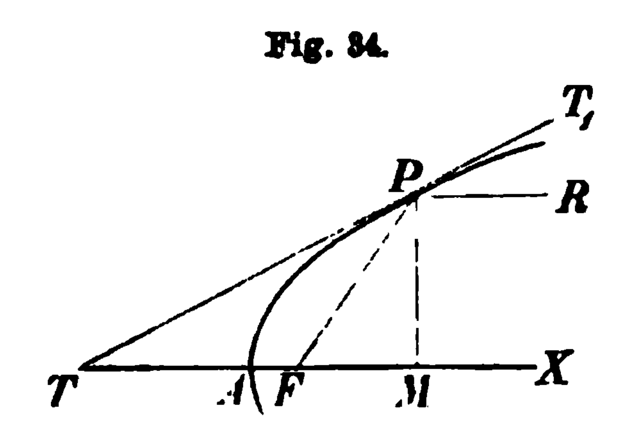
Setzt man hierin $y = 0$, so folgt für die Abscisse a desjenigen Punktes, in welchem die Tangente die Parabelachse schneidet,

12) $$a = -x_1.$$

Dieser letzte Wert ist besonders geeignet, um bei gegebenem Berührungspunkte die Tangente zu konstruieren.

Soll z. B. die Parabel im Punkte P (Fig. 34) von einer Geraden berührt werden, so hat man nur, wenn MP die Ordinate dieses Punktes darstellt, $TA = AM$ zu machen und TP zu ziehen, um die Tangente zu erhalten. Nach den zu Fig. 32 gemachten Bemerkungen ist hierbei $TF = FP$, folglich sind auch die Winkel PTF und TPF einander gleich. Dies giebt den Satz: Die Tangente an einem Parabelpunkte bildet mit der Parabelachse denselben Winkel, wie mit dem Brennstrahle jenes Punktes.* Legt man ferner PR parallel zur Achse, so sind nach dem Vorigen auch die Winkel T_1PR und TPF einander gleich. Hierauf beruhen die physikalischen Eigenschaften des Parabelbrennpunktes.**

Fig. 34.



Ist $x_1 y_1$ ein ausserhalb der Parabel gelegener Punkt, von welchem aus zwei Tangenten gezogen werden können, so lässt sich durch ein ganz ähnliches Verfahren, wie das zur Herleitung der Gleichung 3) im § 10 angewendete, nachweisen, dass für diesen Fall Nr. 11) die Gleichung der Berührungssehne darstellt. Bezeichnet man nämlich die Koordinaten eines der beiden Berührungspunkte mit x und y, so findet, da x_1 und y_1 einem Punkte ange-

---

* Dieses Resultat kann auch durch Vergleichung der Richtungskonstanten der Geraden FP und TP bestätigt werden.

** In einem Hohlspiegel, dessen spiegelnde Fläche durch Rotation einer Parabel um ihre Achse gebildet ist, werden Licht- oder Wärmestrahlen, die parallel zur Achse einfallen, im Brennpunkte vereinigt. Umgekehrt werden solche Strahlen, wenn sie vom Brennpunkte ausgehen, in einer mit der Achse parallelen Richtung reflektiert.

hören, welcher in der durch xy gehenden Tangente gelegen ist, zwischen x, x_1, y und y_1 nach 11) die Beziehung

$$y_1 y = p\,(x + x_1) \tag{13}$$

statt, wobei nur x und x_1, y und y_1 ihre Bedeutungen vertauscht haben. Ganz gleiches gilt auch für den zweiten Berührungspunkt; folglich ist die Gleichung 13), welche als Gleichung ersten Grades zweien mit xy bezeichneten Punkten Genüge leistet, der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte angehörig. Hiernach ist es leicht, die Berührungssehne zu konstruieren. Man findet, wie bei der Tangente, für die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der Parabelachse:

$$a = -x_1,$$

wodurch einer ihrer Punkte bestimmt ist; ferner für ihre Richtungskonstante:

$$A = \frac{p}{y_1},$$

d. h. mit Rücksicht auf Nr. 9): sie läuft mit der Tangente eines Parabelpunktes parallel, dessen Ordinate mit y_1 gleich ist.

Normalen der Parabel. Eine im Parabelpunkte $x_1 y_1$ errichtete Normale hat, weil sie auf der Tangente dieses Punktes senkrecht steht, nach Nr. 6) im § 6 die Gleichungsform:

$$y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1),$$

wobei A die der Tangente zugehörige Richtungskonstante bezeichnet. Mit Hilfe des in Nr. 9) gegebenen Wertes von A erhält man hieraus als Gleichung der Normale:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1). \tag{14}$$

Setzt man hierin $y = 0$, so ergiebt sich für die Abscisse ξ des Durchschnittspunktes der Normale und Parabelachse das Resultat:

$$\xi - x_1 = p. \tag{15}$$

Die Differenz $\xi - x_1$, d. i. die auf der x-Achse zwischen dem Fusspunkte der Ordinate und dem Einfallspunkte der Normale enthaltene Strecke führt den Namen Subnormale.* Mit Einführung dieser

* In ähnlicher Weise wird die zwischen dem Einfallspunkte der Tangente und dem Fusspunkte der Ordinate auf der x-Achse gelegene Strecke Subtangente genannt. Ihre Grösse ist in der Parabel nach Nr. 12) gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes.

Benennung entsteht aus Nr. 15) der Satz: Die Subnormale jedes Parabelpunktes ist beständig gleich dem Halbparameter.

Aus der Gleichheit der Winkel, welche eine Parabeltangente mit Brennstrahl und Achse einschliesst, kann noch auf einfache Weise das Resultat hergeleitet werden, dass die gleiche Eigenschaft auch für die Normale Geltung besitzt.

§ 17.

Fortsetzung.

Durchmesser der Parabel. Wenn man die in Nr. 3) des vorhergehenden Paragraphen für die Ordinaten der gemeinschaftlichen Punkte einer Parabel und einer Geraden aufgestellte Gleichung durch A dividiert, so kann diese Gleichung auf die Form

$$1)\qquad y^2 - 2\frac{p}{A}y + \frac{2bp}{A} = 0$$

gebracht werden, unter der Voraussetzung, dass A von Null verschieden ist, d. h. dass die Gerade nicht mit der Parabelachse parallel läuft. Der ausgeschlossene Fall ist also der, wo die Gerade nur einen Punkt mit der Parabel gemein haben kann.

Angenommen nun, die Gerade schneide die Parabel in zwei Punkten, so wollen wir mit y_1 und y_2 die Ordinaten dieser beiden Durchschnittspunkte bezeichnen. Dann folgt aus 1) nach dem algebraischen Lehrsatze über die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{A}.$$

Der linker Hand befindliche Wert drückt hier die Ordinate des Mittelpunktes der auf der Geraden abgeschnittenen Parabelsehne aus [vergl. § 3 Nr. 11)]. Bezeichnen wir diese Ordinate mit y, so gilt für die Sehnenmitte die Gleichung:

$$2)\qquad y = \frac{p}{A}.$$

Da diese Gleichung die Ordinate der Sehnenmitte nur von der Richtung der Sehne (mittels der Konstanten A) abhängig macht, so gilt sie zugleich für die Mittelpunkte aller mit der untersuchten Geraden

parallelen Sehnen und giebt als geometrischen Ort dieser Punkte eine zur Parabelachse parallele Gerade. So entsteht der Lehrsatz: In der Parabel liegen die Mitten paralleler Sehnen in einer zur Achse parallelen Geraden, oder, insofern man einer Linie den Namen Durchmesser einer Kurve giebt, wenn sie die Eigenschaft besitzt, ein System paralleler Sehnen zu halbieren: Alle Parabeldurchmesser laufen mit der Achse parallel. Der Abstand eines solchen Durchmessers von der Achse ergiebt sich, wenn die Richtung der Sehnen gegeben ist, aus der Gleichung 2). Durch Umkehrung des Satzes folgt hieraus, dass eine in der Entfernung y gezogene Parallele zur Parabelachse den Durchmesser aller derjenigen Sehnen darstellt, welche die Richtungskonstante

$$3) \qquad A = \frac{p}{y}$$

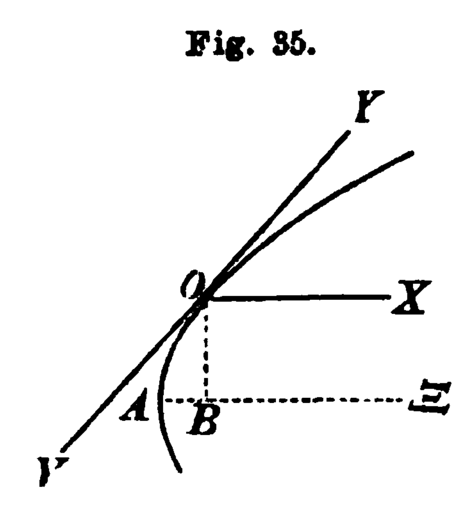
besitzen. Die Übereinstimmung dieser letzten Gleichung mit Nr. 9) des vorhergehenden Paragraphen zeigt zugleich, dass die zugehörigen Sehnen gleiche Richtung mit derjenigen Geraden haben, welche die Parabel in ihrem Durchschnittspunkte mit dem Durchmesser berührt.

Die soeben gefundenen Eigenschaften gewähren die Mittel, in einer gegebenen Parabel die Lage der Achse, des Brennpunktes und somit auch der Direktrix ausfindig zu machen. Mittels zweier parallelen Sehnen kann man nämlich einen Durchmesser und eine Tangente konstruieren; mit Hilfe der letzteren erhält man aber eine den Brennpunkt enthaltende Gerade durch Anwendung des Satzes, dass jede Parabeltangente gleiche Winkel mit dem Brennstrahle ihres Berührungspunktes und einer Parallelen zur Achse einschliesst. Wird dieselbe Konstruktion an einem zweiten Paare paralleler Sehnen wiederholt, so lässt sich hierdurch der Brennpunkt und aus diesem die Achse und die Direktrix vollständig bestimmen. Übrigens findet man auch die Achse bereits mittels eines Durchmessers ohne Vermittelung einer Tangente, wenn man beachtet, dass eine zu diesem Durchmesser senkrecht gelegte Sehne auch senkrecht zur Achse liegt und von derselben halbiert wird.

Ein Parabeldurchmesser und die Tangente des in ihm gelegenen Parabelpunktes bilden ein System zusammengehöriger Linien, für welches die Parabelachse und Scheiteltangente den speciellen Fall der senkrechten Lage beider Geraden darstellen. Wählt man daher

zwei Gerade der erstgenannten Art zur x- und y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so muss die für dieses System geltende Gleichung der Parabel die auf das bisher benutzte rechtwinklige System bezügliche Gleichung als besonderen Fall in sich schliessen. Mit Anwendung der im § 4 aufgestellten Transformationsformeln kann man rückwärts von der letzteren zu jener allgemeineren gelangen. Wir wollen hierzu den Koordinatenwinkel XOY in Fig. 35 mit ω bezeichnen, und die auf die Parabelachse $A\Xi$ und den Scheitel bezogenen rechtwinkligen Koordinaten des neuen Anfangspunktes $AB = a$ und $BO = b$ setzen. Dann folgt aus Nr. 3):

Fig. 35.



$$4) \qquad tan\,\omega = \frac{p}{b}$$

und aus der Parabelgleichung:

$$5) \qquad b^2 = 2pa.$$

Nach Nr. 9) im § 4 ist beim Übergange vom ursprünglichen bei allen früheren Untersuchungen angewendeten Koordinatensysteme zu dem neuen das frühere x mit

$$a + x + y\,cos\,\omega$$

und das frühere y mit

$$b + y\,sin\,\omega$$

zu vertauschen, da nämlich die im § 4 angewendeten Winkel α und β hier die Werte 0 und ω besitzen. Die Parabelgleichung wird hierdurch in die für das neue System geltende Gleichung

$$(b + y\,sin\,\omega)^2 = 2p\,(a + x + y\,cos\,\omega)$$

transformiert, welche nach Ausführung der darin angedeuteten Operationen und geänderter Ordnung der Glieder in die Form

$$y^2\,sin^2\,\omega = 2px + 2b\left(\frac{p}{b} - tan\,\omega\right) y\,cos\,\omega + (2pa - b^2)$$

übergeführt werden kann. Bei Beachtung von Nr. 4) und 5) folgt hieraus:

$$y^2\,sin^2\,\omega = 2px,$$

oder, wenn man beiderseitig durch $sin^2\,\omega$ dividiert:

$$6) \qquad y^2 = 2\,\frac{p}{sin^2\,\omega}\,x.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der bei allen vorhergehenden Untersuchungen benutzten vollständig überein, nur dass die Konstante p in die neue beständige Grösse $\frac{p}{\sin^2 \omega}$ übergegangen ist. Alle auf die Form jener Gleichung gestützten Untersuchungen der beiden vorhergehenden Paragraphen können daher, soweit sie von der rechtwinkligen Lage des Koordinatensystems unabhängig sind, auf das neue System übertragen werden.

Wiederholt man z. B., um nur einen hierher gehörigen Fall auszuheben, der eine konstruktive Anwendung zulässt, die auf Tangenten bezüglichen Untersuchungen in derselben Weise, wie im § 16, so kehrt auch die von der Grösse der Konstanten p und der rechtwinkligen Lage des Koordinatensystems unabhängige Relation 12) wieder, nach welcher der Berührungspunkt einer Tangente und ihr Durchschnittspunkt mit der x-Achse absolut gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Abscissen besitzen. Hierauf kann eine Lösung der Aufgabe gegründet werden, von einem ausserhalb der Parabel befindlichen Punkte Tangenten an die Parabel zu legen. Zieht man nämlich durch diesen Punkt einen Durchmesser, so läuft die Berührungssehne mit der Tangente des Durchschnittspunktes dieses Durchmessers und der Parabel parallel, und zwar ebenso weit von dieser Tangente entfernt, als dieselbe vom gegebenen Punkte absteht.

§ 18.

Die Parabel und der Kreis.

Nach Nr. 4) im § 9 kann bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Gleichung eines jeden Kreises in der Form

$$1) \qquad x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P = 0$$

geschrieben werden, wobei a und b die Mittelpunktskoordinaten bedeuten, P aber die Potenz des Koordinatenanfangs für den Kreis ausdrückt. Kehren wir nun zu dem früheren Koordinatensysteme zurück, dessen Anfang im Scheitel der Parabel lag und dessen x-Achse mit der Parabelachse zusammenfiel, so gestaltet sich die nachfolgende Betrachtung etwas einfacher, wenn wir der hierauf bezogenen Gleichung der Parabel durch Reduktion auf x die Form

$$2) \qquad x = \frac{y^2}{2p}$$

geben. Für etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte der Parabel und des Kreises entsteht dann durch Substitution des Wertes 2) in 1), wenn man noch ausserdem die ganze Gleichung mit $4p^2$ multipliciert:

$$3) \qquad y^4 + 4p(p-a)y^2 - 8bp^2y + 4p^2P = 0.$$

Die dieser Gleichung entsprechenden y sind die Ordinaten der gemeinschaftlichen Punkte, zu denen die zugehörigen Abscissen aus 2) berechnet werden können.

Die Form von Nr. 3) als einer Gleichung vierten Grades, die höchstens vier reelle Wurzeln besitzen kann, gewährt den Fundamentalsatz: Ein Kreis kann mit einer Parabel höchstens vier Punkte gemein haben. Alle Kombinationen von reellen und imaginären, gleichen und ungleichen Wurzeln, die in einer Gleichung vierten Grades zulässig sind, gewähren in gleicher Weise, wie dies bei den Untersuchungen über Parabel und Gerade mit den Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades geschehen ist, bei Anwendung auf Nr. 3) die möglichen Fälle der gegenseitigen Lage, welche zwischen Parabel und Kreis stattfinden können. Wir beschränken uns, da eine derartige allgemeine Untersuchung für eine Gleichung vierten Grades nicht ganz frei von Weitläufigkeiten und dabei von untergeordnetem praktischen Interesse ist, auf den Fall der gleichen Wurzeln, der sich zugleich für Auffindung der Beziehungen zwischen Parabel und Kreis als der wichtigste herausstellt.

Da die Gleichung 3) kein mit der dritten Potenz von y behaftetes Glied enthält, so kann sie vier gleiche Wurzeln in dem einzigen Falle besitzen, wenn alle ihre Glieder mit Ausschluss von y^4 zu Null werden.* Dies geschieht, wenn

$$a = p, \quad b = 0, \quad P = 0$$

gesetzt wird, oder mit Rücksicht auf die Bedeutung der Potenz P [vergl. § 9 Nr. 5)], wenn zu den beiden ersten dieser Gleichungen die Bedingung

---

* Ist nämlich jede der vier gleichen Wurzeln $= r$, so hat die Gleichung die Form:

$$(y-r)^4 = 0,$$

oder nach Entwickelung des linker Hand befindlichen Ausdruckes:

$$y^4 - 4ry^3 + 6r^2y^2 - 4r^3y + r^4 = 0.$$

Hierin kann ein Glied mit Ausschluss des ersten nur fehlen, wenn $r = 0$ ist; dann kommen aber auch alle r enthaltenden Glieder in Wegfall.

$$k = p$$

hinzutritt, wobei k wie früher den Radius des Kreises bezeichnen soll. Da nach Einsetzung dieser Werte Nr. 3) in

$$y^4 = 0$$

übergeht und diese Gleichung mit Hinzuziehung von Nr. 2) einzig durch den Parabelscheitel befriedigt wird, so hat der durch diese Konstanten bestimmte Kreis den Scheitel mit der Parabel gemein. Hierbei muss dieser gemeinsame Punkt so angesehen werden, als wenn er aus vier zusammenfallenden Punkten bestände, welche gleichzeitig auf der Parabel und dem Kreise gelegen sind. Diese innigste Berührung, welche zwischen einer Parabel und einem Kreise vorkommen kann, findet also nur in einem Punkte, nämlich im Scheitel, statt.

In jedem andern Falle kann die Gleichung 3) höchstens drei gleiche Wurzeln enthalten, d. h. die Parabel steht dann mit demjenigen Kreise in der innigsten Berührung, welcher drei zusammenfallende Punkte mit ihr gemein hat. Ein solcher Kreis wird Krümmungskreis, sein Mittelpunkt Krümmungsmittelpunkt, sein Radius Krümmungshalbmesser genannt. Die allgemeine Bedingungsgleichung für den Fall, wo ein Kreis in den Krümmungskreis einer Parabel übergeht, kann hiernach gefunden werden, wenn man das Kennzeichen aufsucht, von welchem das Vorhandensein dreier gleichen Wurzeln in Nr. 3) abhängig ist. Einfacher jedoch, als auf diesem für elementare Untersuchungen bei Gleichungen höherer Grade nicht ganz bequemen Wege, gelangt man zur Bestimmung von Krümmungskreisen einer Parabel, wenn man zunächst den Mittelpunkt eines Kreises sucht, welcher durch drei beliebige Parabelpunkte hindurchgeht, und dann hieraus diejenige Form des Resultates ableitet, welche sich in dem Grenzfalle ergiebt, wo die drei anfänglich getrennten Punkte in einen zusammenschwinden.

Der Mittelpunkt eines durch drei Punkte zu legenden Kreises befindet sich bekanntlich im Durchschnitte der auf den Mitten der Verbindungsgeraden je zweier dieser drei Punkte errichteten Senkrechten. Soll daher ein Kreis durch drei Parabelpunkte hindurchgehen, so hat man zur Auffindung seines Mittelpunktes sich zwei Sehnen gezogen zu denken, von denen jede zwischen zweien der gegebenen Punkte gelegen ist, und den gemeinschaftlichen Punkt

der auf den Mitten dieser Sehnen stehenden Perpendikel zu suchen. Wir wollen die beiden Sehnenmitten mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ bezeichnen. Nach Nr. 3) des vorigen Paragraphen gehört der ersten von den beiden Sehnen die Richtungskonstante

$$A = \frac{p}{y_1}$$

zu; die im Punkte $x_1 y_1$ darauf senkrechte Gerade hat demnach die Gleichung:

$$4) \qquad y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Ebenso findet sich für die zweite Senkrechte:

$$5) \qquad y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x - x_2),$$

und, wenn man aus 4) und 5) y eliminiert, für die Abscisse des gesuchten Kreismittelpunktes:

$$x = p + \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y_1 - y_2}$$

oder auch:

$$6) \qquad x = p + x_1 + \frac{y_2(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}.$$

Nach Nr. 9) im § 5 stellt $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ die Richtungskonstante der die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ verbindenden Geraden dar; bezeichnet man daher mit α den Winkel, welchen diese Gerade mit der x-Achse einschliesst, so ist

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \cot\alpha,$$

und aus Nr. 6) entsteht:

$$7) \qquad x = p + x_1 + y_2 \cot\alpha.$$

Wird endlich dieser Wert von x in der Gleichung 4) eingesetzt, so erhält man für die Ordinate des gesuchten Mittelpunktes:

$$8) \qquad y = -\frac{y_1 y_2}{p}\cot\alpha.$$

Die in Nr. 7) und 8) gefundenen Werte von x und y behalten noch eine bestimmte Grösse, wenn man die drei Parabelpunkte und damit auch die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in einen zusammenfallen lässt; sie gehen dann in die Koordinaten des einem Parabel-

punkte zugehörigen Krümmungsmittelpunktes über. Die Verbindungsgerade der Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ wird hierbei zur Parabeltangente; nach Nr. 9) im § 16 ist demnach in diesem Falle

$$\tan\alpha = \frac{p}{y_1}$$

zu setzen. Man erhält so für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$x = p + x_1 + \frac{y_1^2}{p}$$

oder mit Benutzung der Parabelgleichung:

$$9)\qquad x = p + 3x_1$$

und

$$10)\qquad y = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

Beachtet man, dass beim Zusammenfallen zweier Kurvenpunkte die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte in die Tangente, und die auf der Mitte der zugehörigen Sehne errichtete Senkrechte in die Normale desjenigen Kurvenpunktes übergeht, in welchem die beiden anfänglich getrennten Punkte zusammengetreten sind, so folgt hieraus, dass die im vorigen angewendete Methode auf die Aufgabe zurückgeführt werden kann, den Durchschnittspunkt zweier unmittelbar benachbarten Normalen zu suchen. In der That zeigt auch die Vergleichung mit Nr. 14) im § 16, dass die von uns angewendeten Gleichungen 4) und 5) die Gleichungen zweier Normalen in Parabelpunkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ darstellen. Da hiernach der Krümmungsmittelpunkt in der Normale des zugehörigen Kurvenpunktes gelegen sein muss, so genügt es zu seiner konstruktiven Darstellung, eine seiner beiden Koordinaten zu kennen, oder noch besser, sogleich die Länge des Krümmungshalbmessers ausfindig zu machen.

Wird wie im vorigen mit xy der einem Kurvenpunkte $x_1 y_1$ zugehörige Krümmungsmittelpunkt bezeichnet, so gilt für den Krümmungshalbmesser ϱ, welcher die Entfernung dieser beiden Punkte misst, die Gleichung:

$$11)\qquad \varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Mit Einsetzung der in 9) und 10) aufgestellten Werte von x und y entsteht hieraus im Falle der Parabel:

$$\varrho^2 = (p + 2x_1)^2 + \left(y_1 + \frac{y_1^3}{p^2}\right)^2,$$

und hieraus wieder mit Benutzung der Parabelgleichung nach einfacher Reduktion:

$$\varrho^2 = \frac{(p^2 + y_1^2)^3}{p^4},$$

also für den Krümmungshalbmesser selbst:

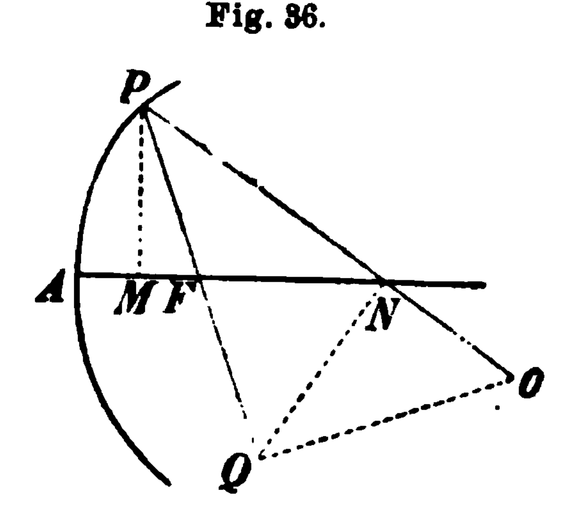
$$\text{12)} \qquad \varrho = \frac{(\sqrt{p^2 + y_1^2})^3}{p^2}.$$

Fasst man im Zähler dieses Wertes p als Subnormale auf, so ist leicht zu erkennen, dass $\sqrt{p^2 + y_1^2}$ die zwischen dem Parabelpunkte und der x-Achse enthaltene Strecke der Normale, die sogenannte Länge der Normale darstellt. Wird dieselbe mit u bezeichnet, so kann Nr. 12) in der Form

$$\text{13)} \qquad \varrho = u\left(\frac{u}{p}\right)^2$$

geschrieben werden. Dieser Ausdruck gewährt eine sehr einfache Konstruktion des Krümmungshalbmessers. Ist nämlich MP in Fig. 36 die Ordinate des Parabelpunktes P, und $MN = p$ seine Subnormale, also $NP = u$ die Länge der Normale, so wird

Fig. 36.



$$\frac{u}{p} = \sec MNP,$$

oder auch wegen der Gleichheit der Winkel, welche die Normale mit Brennstrahl und Achse einschliesst,

$$\frac{u}{p} = \sec NPF.$$

Setzen wir also $\angle NPF = \gamma$, so ist in der Figur

$$\varrho = NP \,.\, \sec^2\gamma.$$

Wird daher im Punkte N auf der Normale eine Senkrechte NQ errichtet, die den verlängerten Brennstrahl in Q schneidet, so ist

$$QP = NP \,.\, \sec\gamma,$$

und wenn man nachher wieder in Q eine Senkrechte auf QP zieht, bis sie im Punkte O die Normale trifft, so folgt:

$$OP = QP \cdot \sec\gamma = NP \cdot \sec^2\gamma.$$

OP ist also Krümmungshalbmesser und O Krümmungsmittelpunkt für den Parabelpunkt P.

§ 19.

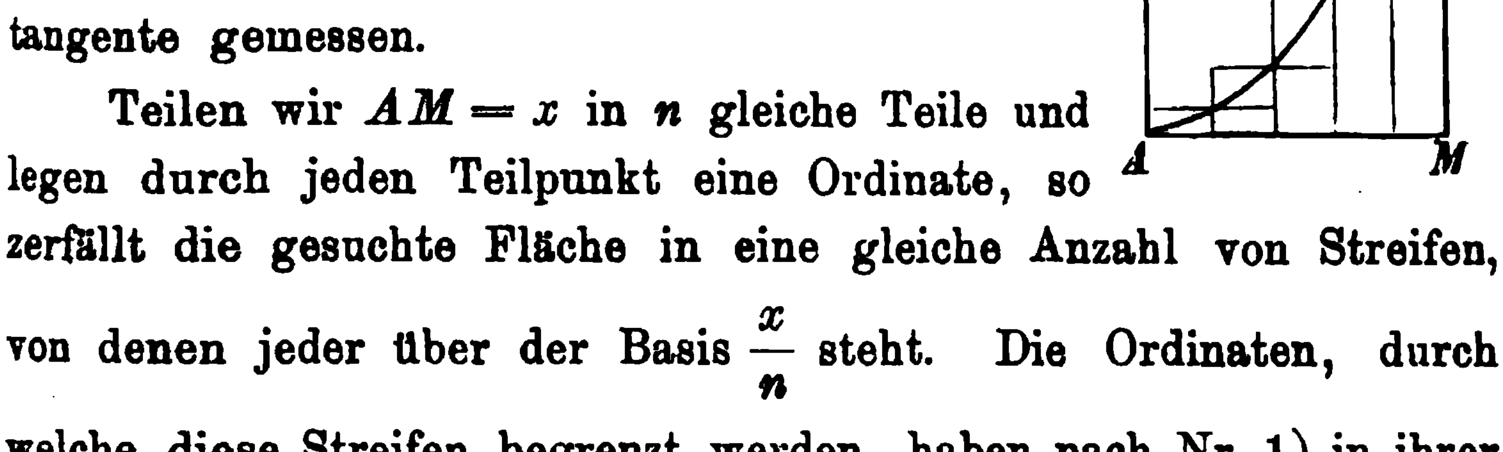
Die Quadratur der Parabel.

Wenn man in dem rechtwinkligen Koordinatensysteme, welches wir bis jetzt zur Untersuchung der Parabel benutzt haben, die x- und y-Achse unter einander vertauscht, also die Parabelachse zur Achse der y und die Scheiteltangente zur Achse der x werden lässt, so kann die Gleichung der Parabel in der Form

$$1)\qquad y = \frac{x^2}{2p}$$

geschrieben werden, indem bei dieser Vertauschung der Achsen die x und y lediglich ihre Stellen wechseln. Wir machen von dieser Gleichung Gebrauch zur Bestimmung des Inhalts der parabolischen Fläche APM (Fig. 37), welche von dem Parabelbogen AP und den Koordinaten des Punktes P, nämlich $AM = x$ und $MP = y$ begrenzt ist. Mit Rücksicht auf das zu Grunde gelegte Koordinatensystem stellt hierbei A den Parabelscheitel dar und die Abscisse AM ist auf der Scheiteltangente gemessen.

Fig. 37.



Teilen wir $AM = x$ in n gleiche Teile und legen durch jeden Teilpunkt eine Ordinate, so zerfällt die gesuchte Fläche in eine gleiche Anzahl von Streifen, von denen jeder über der Basis $\frac{x}{n}$ steht. Die Ordinaten, durch welche diese Streifen begrenzt werden, haben nach Nr. 1) in ihrer Reihenfolge vom Scheitel aus die Längen:

$$\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2p},\quad \frac{\left(\frac{2x}{n}\right)^2}{2p},\quad \frac{\left(\frac{3x}{n}\right)^2}{2p},\ \ldots\ \frac{\left\{\frac{(n-1)\,x}{n}\right\}^2}{2p},\quad \frac{\left(\frac{nx}{n}\right)^2}{2p},$$

oder auch:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 y,\quad \left(\frac{2}{n}\right)^2 y,\quad \left(\frac{3}{n}\right)^2 y,\quad \ldots\quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 y,\quad y.$$

Jeder einzelne von zwei solchen Ordinaten begrenzte Streifen kann nun in zwei Grenzen eingeschlossen werden, indem man über der Basis $\frac{x}{n}$ ein Mal ein Rechteck mit der Anfangsordinate, ein anderes Mal mit der Endordinate konstruiert. Ein Rechteck ersterer Art besitzt einen kleineren Inhalt, während das zweite grösser ist als die zugehörige Streifenfläche. Die Summe der letzteren Rechtecke ist hiernach ebenfalls grösser, die der ersteren dagegen kleiner als die gesuchte parabolische Fläche, welche wir F nennen wollen. Hieraus entstehen folgende zwei Ungleichungen:

$$F < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3} \cdot xy,$$

$$F > \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} \cdot xy.$$

Die Differenz dieser beiden Grenzen, zwischen welchen der Wert von F eingeschlossen ist, beträgt $\frac{1}{n}\,xy$, kann demnach kleiner als jede angebbare Grösse gemacht werden, wenn man n in entsprechender Weise wachsen lässt. Für unendlich wachsende n fallen beide Grenzen zusammen, und man erhält, wenn man den Grenzwert, gegen welchen beide Ausdrücke konvergieren, durch Vorsetzen der Silbe *Lim* (Abkürzung von *limes* = Grenze) bezeichnet,

$$F = Lim\, \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3} \cdot xy,$$

oder nach einem bekannten arithmetischen Satze*

---

* Aus dem für ganze positive m geltenden Divisionsresultate

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + ab^{m-2} + b^{m-1}$$

ergiebt sich für $a > b > 0$ die Richtigkeit der Ungleichung

$$ma^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > mb^{m-1}.$$

Hieraus wird, wenn man $m = p + 1$ und ein Mal $a = z + 1$, $b = z$, ein anderes mal $a = z$, $b = z - 1$ setzt, das Resultat

$$\frac{(z+1)^{p+1} - z^{p+1}}{p+1} > z^p > \frac{z^{p+1} - (z-1)^{p+1}}{p+1}$$

abgeleitet, wobei p eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Substituiert man hierin der Reihe nach $z = 1, 2, 3, \ldots n$, und addiert alle so entstehenden Ungleichungen, so folgt:

2) $$F = \frac{1}{3}xy,$$

und hieraus für die Fläche APN, welche F' heissen mag,

3) $$F' = \frac{2}{3}xy.$$

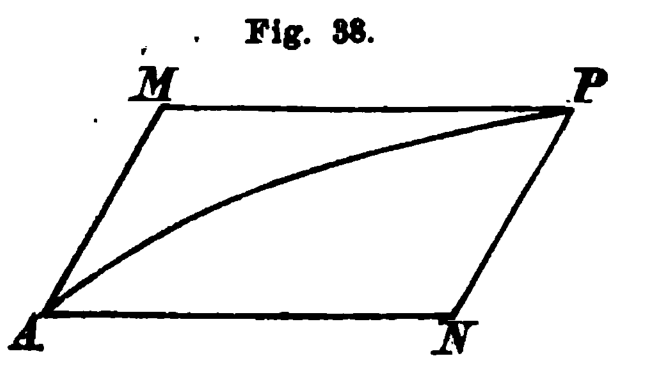
Eine grössere Verallgemeinerung erlangen die gefundenen Resultate, wenn man die zu ihrer Herleitung benutzte Methode auf das im § 17 zu Fig. 35 aufgestellte Koordinatensystem überträgt und dabei wieder eine Vertauschung der x- und y-Achse eintreten lässt.

Man erhält dann aus § 17 Nr. 6) die Parabelgleichung:

4) $$y = \frac{x^2 \sin^2 \omega}{2p},$$

welche in ähnlicher Weise wie die obige Gleichung 1) angewendet werden kann, um die zwischen einem Parabelbogen, der Tangente eines seiner Endpunkte und der durch den andern Endpunkt gelegten Parallelen zur Parabelachse enthaltene Fläche zu berechnen. Das hierbei sich ergebende Resultat lautet, dass, wenn in Fig. 38 der Parabelbogen AP in das Parallelogramm $AMNP$ so gelegt ist, dass er die Seite AM im Punkte A tangiert, während seine Achse mit der Seite AN parallel läuft, die durch den Parabelbogen gebildeten Parallelogrammteile AMP und ANP sich wieder wie $1:2$ verhalten.*

Fig. 38.



$$\frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1} > 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p > \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Die aus Division durch n^{p+1} sich ergebenden Resultate konvergieren bei unendlich wachsenden n gegen die gemeinschaftliche Grenze $\frac{1}{p+1}$ und man erhält hieraus:

$$Lim \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

In dem oben vorkommenden Falle war $p = 2$, also der Grenzwert $= \frac{1}{3}$.

* Sieht man bei Fig. 38 oder 37 von der Vertauschung der Koordinatenachsen ab, so stösst man bei Berechnung der Fläche ANP nach der angegebenen Methode auf einen Grenzwert von der Form

$$Lim \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}},$$

Die Simpsonsche Regel. Aus der obigen Gleichung 2) lässt sich noch eine allgemeine Methode zur näherungsweisen Be-

---

welcher gleich $\frac{2}{3}$ sein muss, wenn das Ergebnis mit dem vorher entwickelten in Übereinstimmung kommen soll. Ebendahin führt das Resultat der vorigen Anmerkung, wenn sich beweisen lässt, dass es auch für gebrochene Werte von p Geltung behält. Man gelangt hierzu durch folgende Betrachtung

Werden die Glieder einer beliebigen fallenden Zahlenreihe mit

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_{n-1} > u_n$$

bezeichnet, und ist

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

deren Summe, so folgt aus

$$S_n + u_{n+1} = S_{n+1}$$

nach Multiplikation mit n, wenn man $n u_{n+1}$ mit dem nach der gestellten Bedingung grösseren Werte S_n vertauscht,

$$(n+1) S_n > n S_{n+1}.$$

Dies giebt das Resultat:

$$\frac{S_n}{n} > \frac{S_{n+1}}{n+1} > \frac{S_{n+2}}{n+2} > \ldots$$

In gleicher Weise ist in einer steigenden Zahlenreihe

$$\frac{S_n}{n} < \frac{S_{n+1}}{n+1} < \frac{S_{n+2}}{n+2} < \ldots$$

Bei Anwendung auf das Divisionsresultat

$$\frac{a^r - b^r}{a - b} = a^{r-1} + a^{r-2} b + \ldots + a^{r-s-1} b^s + \ldots + b^{r-1},$$

worin $a > b > 0$ sein und r eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnen soll, liefern einerseits die s Anfangsglieder, andererseits die s Endglieder die Ungleichung

$$\frac{a^{r-s}(a^s - b^s)}{s(a-b)} > \frac{a^r - b^r}{r(a-b)} > \frac{b^{r-s}(a^s - b^s)}{s(a-b)},$$

woraus weiter

$$\frac{r}{s} a^{r-s} > \frac{a^r - b^r}{a^s - b^s} > \frac{r}{s} b^{r-s}$$

hervorgeht. Man gelangt hierdurch wieder zu der in der vorigen Anmerkung aufgestellten Ungleichung:

$$m a^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > m b^{m-1},$$

wenn man $\frac{r}{s}$ mit m und a mit $a^{\frac{1}{s}}$ vertauscht, nur dass sie jetzt auch für gebrochene Werte von m gilt, welche grösser sind als 1. Der Fortgang der Betrachtung bleibt dann wie vorher.

rechnung von ebenen Flächen herleiten, welche, über einer gegebenen Abscisse stehend, von zwei rechtwinkligen Ordinaten und einem beliebigen Kurvenbogen begrenzt sind. Hierzu führt folgende Voruntersuchung.

In Fig. 39 ist B der Scheitel einer Parabel, deren Achse BH mit der y-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems parallel läuft. Wir stellen uns die Aufgabe, die Fläche $P_3M_3M_1P_1$, die mit S bezeichnet werden mag, mittels der Koordinaten der drei Punkte P_3, P_2 und P_1 zu berechnen, wobei der Punkt P_2 so gewählt ist, dass durch seine Ordinate die Strecke M_3M_1 in zwei gleiche Teile geteilt wird. Verschieben wir die Koordinatenachsen parallel zu sich selbst in die Lage von BH und $B\Xi$, und bezeichnen die Koordinaten eines auf das neue System bezogenen Punktes mit ξ und η, so lautet nach Nr. 1) die Parabelgleichung:

Fig. 39.

$$5)\qquad \eta = \frac{\xi^2}{2p}.$$

Für den durch die Scheiteltangente $B\Xi$ von der zu berechnenden Fläche S abgeschnittenen Teil $P_3N_3N_1P_1 = T$ gilt dann nach 2) die Formel:

$$T = \frac{1}{3}(\xi_1\eta_1 - \xi_3\eta_3),$$

oder mit Benutzung von Nr. 5):

$$T = \frac{\xi_1^3 - \xi_3^3}{6p},$$

wobei $\xi_1\eta_1$ und $\xi_3\eta_3$ sich auf die Punkte P_1 und P_3 beziehen. Hieraus folgt, wenn man $M_3M_2 = M_2M_1 = \varepsilon$, also $\xi_1 - \xi_3 = 2\varepsilon$ setzt:

$$T = \frac{\varepsilon(\xi_1^2 + \xi_1\xi_3 + \xi_3^2)}{3p},$$

oder nach einfacher Umgestaltung:

$$T = \frac{\varepsilon\{\xi_1^2 + (\xi_1 + \xi_3)^2 + \xi_3^2\}}{6p}.$$

Nun ist aber $\frac{\xi_1 + \xi_3}{2} = \xi_2$, d. i. der Abscisse des Punktes P_2 gleich. Mit Wiedereinsetzung der Ordinaten aus Nr. 5) entsteht hiernach:

$$6)\qquad T = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,(\eta_1 + 4\,\eta_2 + \eta_3).$$

Kehren wir jetzt zum ursprünglichen Koordinatensysteme zurück und setzen

$$OA = a, \qquad AB = b,$$
$$M_1P_1 = y_1, \qquad M_2P_2 = y_2, \qquad M_3P_3 = y_3,$$

so ergiebt sich aus Nr. 6):

$$T = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,\{(y_1 - b) + 4\,(y_2' - b) + (y_3 - b)\},$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$T = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,(y_1 + 4y_2 + y_3) - 2b\varepsilon.$$

Hieraus folgt, wenn man beiderseitig

$$\text{Fläche } N_3M_3M_1N_1 = 2b\varepsilon$$

addiert,

$$7)\qquad S = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

Dieses Resultat bleibt von dem Vorzeichen von b unabhängig, gilt also auch noch dann, wenn die konkave Seite des Parabelbogens der x-Achse zugewendet ist.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen insofern eine Umkehrung zu, als, wenn drei Punkte in der Lage von P_1, P_2 und P_3 gegeben sind, es im allgemeinen möglich ist, durch dieselben eine Parabel zu legen, deren Achse den Ordinaten parallel läuft. Unter der gemachten Voraussetzung lautet nämlich nach Nr. 5) die Parabelgleichung:

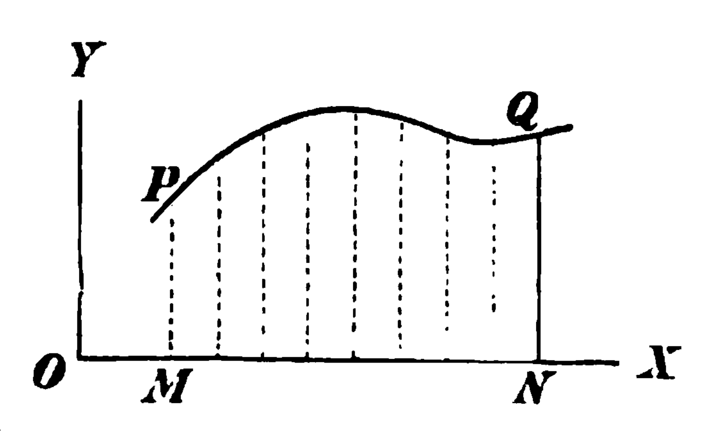
$$y - b = \frac{(x-a)^2}{2p},$$

und, wenn man hierin die Koordinaten der drei Punkte einsetzt, so erhält man drei Bedingungsgleichungen, aus denen sich die Konstanten a, b und p herleiten lassen. Die gestellte Forderung trägt in dem einzigen Falle einen Widerspruch in sich, wenn die drei Punkte in derselben geraden Linie liegen; doch lässt sich aus der Zusammensetzung der Formel 7) leicht übersehen, dass sie auch dann noch ihre Geltung behält. Jedesmal also, wenn man sich durch

die Endpunkte der drei um die Strecke ε von einander entfernten Ordinaten y_3, y_2 und y_1 eine Parabel gelegt denkt, deren Achse normal zu den Ordinaten ist, wird die Grösse der Fläche des zwischen y_3 und y_1 enthaltenen Streifens durch die Gleichung 7) ausgedrückt.

Hiervon kann Gebrauch zur annäherungsweisen Berechnung der Fläche $PMNQ$ (Fig. 40) gemacht werden. Zerlegt man die nach ihrem Inhalte zu bestimmende Fläche, die wir mit F bezeichnen wollen, durch Ordinaten in eine gerade Anzahl von Streifen, so mag wieder ε die Breite eines jeden solchen Streifens darstellen, während die auf einander folgenden Ordinaten die Bezeichnung y_0, y_1, $y_2 \ldots y_{2n}$ erhalten sollen. Man kann jetzt die Bogenstücke, welche drei auf einander folgende Ordinatenpunkte verbinden, näherungsweise als Parabelbögen ansehen, und erhält dann, wenn man für jedes Streifenpaar einen Ausdruck von der Form 7) aufstellt, durch Summierung aller Streifenpaare nach gehöriger Verbindung der gleichartigen Grössen:

Fig. 40.



$$8)\quad F = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,\{y_0 + y_{2n} + 4\,(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + 2\,(y_2 + y_4 + y_6 + \ldots + y_{2n-2})\}.$$

Diese unter dem Namen der Simpsonschen Regel bekannte Formel gewährt in den meisten Fällen einen nicht unbeträchtlichen, mit der Anzahl der Zwischenordinaten wachsenden Grad von Genauigkeit.

Sechstes Kapitel.

Die Ellipse.

§ 20.

Die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Bei Gelegenheit der im § 14 angestellten allgemeinen Betrachtung der Kegelschnitte haben wir unter Nr. 7) die Gleichung

$$1) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

einer Ellipse angehörig gefunden, deren grosse und kleine Achse $2a$ und $2b$ die Achsen der x und y darstellen. Die Form dieser Gleichung liess uns bereits die allgemeinen Umrisse der darin repräsentierten Kurve erkennen; es bleibt uns noch übrig, das Bild dadurch weiter auszuführen, dass wir der Gleichung die Mittel zur konstruktiven Darstellung der Linie entnehmen.

Wird Nr. 1) durch Entfernung der Nenner auf die Form

$$2) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

gebracht, so lässt sich mit Einsetzung von $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ die Ellipse auf ein Polarkoordinatensystem beziehen, welches den Mittelpunkt zum Pol und die grosse Achse zur polaren Achse hat. Es entsteht nach einfacher Umgestaltung:

$$3) \qquad r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\text{*},$$

oder, wenn wir nach § 14 Nr. 9) mittels der Gleichung

---

* Ein grösserer Wert von r^2 als der durch die Gleichung 3) ausgedrückte muss offenbar einem ausserhalb des von der Ellipse eingeschlossenen Teiles der Ebene gelegenen Punkte angehören, während kleinere Werte sich auf den innerhalb gelegenen Teil beziehen. Geht man in den sich hieraus ergebenden Ungleichungen auf die rechtwinkligen Koordinaten zurück, so findet man die Relation

$$b^2 = a^2 - c^2$$

die lineare Excentricität c einführen,

$$4) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}.$$

Beschränken wir uns auf die zwischen den Grenzen 0 und 90° gelegenen Polarwinkel, was insofern ausreicht, als damit einer der vier unter sich kongruenten Ellipsenquadranten vollständig umfasst wird, so erkennen wir hieraus, dass r bei wachsendem φ abnimmt, dass also a und b den grössten und kleinsten Radius der Ellipse darstellen. Ein vom Mittelpunkte aus mit dem Halbmesser a konstruierter Kreis ist daher so um die Ellipse beschrieben, dass er mit ihr nur die Scheitel der grossen Achse gemein hat; der konzentrische Kreis mit dem Radius b ist in ähnlicher Weise eingeschrieben. Beide Kreise sollen ausschliesslich der umgeschriebene und der eingeschriebene Kreis der Ellipse genannt werden. Kehren wir zum rechtwinkligen Koordinatensysteme zurück, so hat der erstere dieser Kreise die Gleichung:

$$5) \qquad x^2 + y^2 = a^2,$$

der zweite dagegen:

$$6) \qquad x^2 + y^2 = b^2.$$

Aus der Zusammenstellung dieser beiden Gleichungen mit Nr. 1) oder 2) finden wir Mittel zur konstruktiven Darstellung der Ellipse. Es genügt hierbei aus dem oben angegebenen Grunde wieder, wenn wir uns auf die Betrachtung des Quadranten beschränken, in welchem beide Koordinaten positive Werte besitzen.

Bezeichnen wir die Ordinaten der Ellipse und des umgeschriebenen Kreises, welche einer und derselben Abscisse angehören, mit y und y', so folgt aus 1) und 5)

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad y' = \sqrt{a^2 - x^2},$$

und hieraus durch Division:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 > a^2 b^2$$

als Kennzeichen der ausserhalb der Ellipse gelegenen Punkte, während die Ungleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 < a^2 b^2$$

für Punkte innerhalb der Ellipse gilt.

7) $$y : y' = b : a,$$

d. h. die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Ellipse und des umgeschriebenen Kreises stehen zu einander in dem unveränderlichen Verhältnisse der Halbachsen. Hiernach können beliebig viele Punkte einer Ellipse gewonnen werden, wenn man die auf demselben Durchmesser rechtwinkligen Ordinaten eines Kreises in einem konstanten Verhältnisse verkürzt.*

Bei Vergleichung der Ellipse mit dem eingeschriebenen Kreise sollen x und x'' die derselben Ordinate zugehörigen Abscissen der Ellipse und des Kreises darstellen. Dann ergiebt sich aus 1) und 6):

$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \qquad x'' = \sqrt{b^2 - y^2},$$

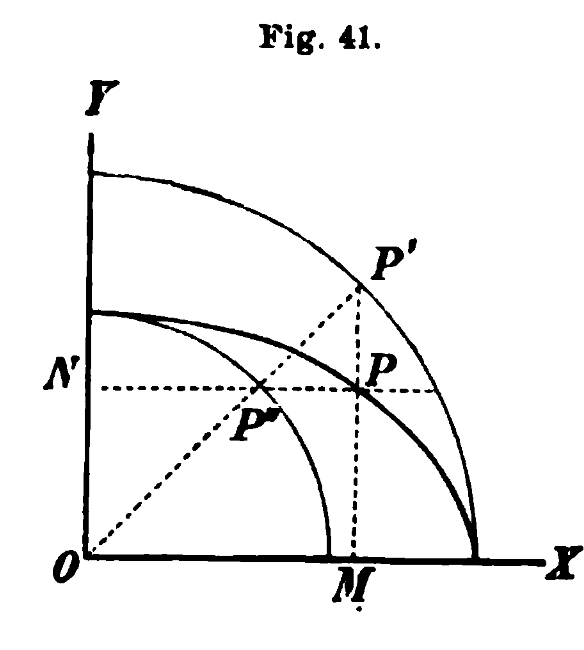
und dies führt zu der Proportion:

8) $$x : x'' = a : b.$$

Die Ellipse kann hiernach gebildet werden, indem man sämtliche Abscissen des eingeschriebenen Kreises in dem unveränderlichen Verhältnisse der elliptischen Halbachsen verlängert.

Die im vorigen enthaltene Vergleichung der Ellipse mit den beiden über ihren Achsen beschriebenen Kreisen führt auf die folgende einfache Konstruktion von beliebig vielen ihrer Punkte, mit gleichzeitiger Anwendung beider Kreise. Zieht man in Fig. 41 den Radius OP', welcher die beiden Kreise in den Punkten P' und P'' schneidet, und legt durch P' die Gerade $P'M$ parallel zur y-Achse, und NP'' durch P'' parallel zur x-Achse, so ist der Durchschnittspunkt P dieser beiden Geraden ein Ellipsenpunkt. Sobald nämlich mit Anwendung der obigen Bezeichnungen

Fig. 41.



* Dies geschieht z. B. bei geometrischer Projektion des Kreises auf eine zu diesem Durchmesser parallele gegen die Kreisebene geneigte Ebene. Diese Bemerkung ist insofern nicht ohne Wichtigkeit, als dadurch der Geometrie ein Mittel gegeben ist, Eigenschaften der Ellipse aus entsprechenden Kreiseigenschaften abzuleiten.

$$NP = OM = x, \qquad MP = ON = y,$$
$$NP'' = x'', \qquad MP' = y'$$

gesetzt wird, so ergiebt sich aus

$$MP : MP' = OP'' : OP'$$

die Proportion Nr. 7), und Nr. 8) aus:

$$OM : NP'' = OP' : OP''.$$

Zu bemerken ist hierbei noch, dass die angewendete Konstruktion eine einfache Bestätigung findet, wenn man die Quotienten $\frac{OM}{OP'} = \frac{x}{a}$ und $\frac{ON}{OP''} = \frac{y}{b}$ als trigonometrische Funktionen des Winkels $MOP' = NP''O$ auffasst. Bezeichnet man diesen Winkel (die sogenannte excentrische Anomalie) mit α, so ist

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha, \qquad \frac{y}{b} = \sin\alpha,$$

und hieraus folgt sogleich für den Punkt P die Ellipsengleichung 1).

Die hierin enthaltene Analogie zwischen der goniometrischen Gleichung

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

und der Gleichung der Ellipse kann zu einer zweiten Darstellungsweise dieser Kurve benutzt werden. Lässt man eine Gerade AB von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten A und B auf den Schenkeln OY und OX eines rechten Winkels gleiten und beobachtet den Weg, den dabei ein auf der Geraden gelegener fester Punkt P durchläuft, so ist, wenn man $AP = a$, $PB = b$, $OM = NP = x$, $MP = ON = y$ setzt, für jede Lage des Punktes P

Fig. 42.

$$\frac{x}{a} = \cos NPA, \qquad \frac{y}{b} = \sin OBA,$$

folglich, da $\angle NPA = \angle OBA$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Der Punkt P beschreibt also eine Ellipse. — Es ist leicht ersichtlich, dass hierbei der beschreibende Punkt auch auf der Verlängerung

der unveränderlichen Geraden gelegen sein kann. Die Gerade $A'B'$ in Fig. 42, die mit dem Punkte A' auf der y-Achse und mit B' auf der x-Achse gleitet, stellt diesen Fall dar. $A'P$ ist hier wieder $= a$ und $B'P = b$ angenommen.

Sowie im § 15 unter II. die Parabel durch Zerlegung der Seiten ihrer Gleichung in zwei Faktoren ersten Grades mittels des Durchschnittes von zwei veränderlichen Geraden dargestellt wurde, so lässt sich auch ein ähnliches Verfahren für die Ellipse und überhaupt für jede Linie zweiten Grades anwenden. Haben zwei Gerade die Gleichungen

$$9) \qquad \frac{y}{b_1} = 1 + \frac{x}{a},$$

$$10) \qquad \frac{y}{b_2} = 1 - \frac{x}{a},$$

so gilt für ihren Durchschnittspunkt auch die durch Multiplikation derselben entstehende Gleichung:

$$\frac{y^2}{b_1 b_2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1 b_2} = 1,$$

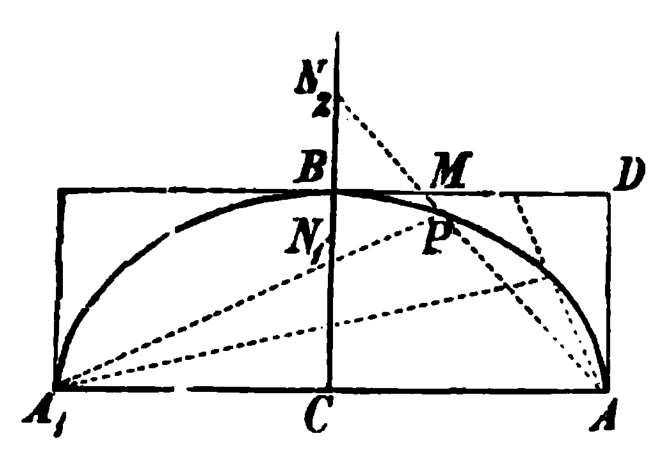
und diese gehört einer Ellipse an, wenn $b_1 b_2 = b^2$ oder wenn die stetige Proportion

$$11) \qquad b_1 : b = b : b_2$$

erfüllt wird. Hierauf gründet sich die folgende Konstruktion.

In dem Rechtecke $CADB$ (Fig. 43), dessen Seiten CA und CB die Halbachsen der zu konstruierenden Ellipse darstellen, teile man DB und CB in den Punkten M und N_1 so, dass die Proportion

Fig. 43.



$$DM : DB = CN_1 : CB$$

stattfindet. Legt man hierauf durch den Scheitel A der grossen Achse die Gerade AN_2 und durch den zweiten Scheitel A_1 die Gerade A_1N_1, so ist der Durchschnittspunkt P beider Geraden ein Ellipsenpunkt. Wird nämlich $CN_1 = b_1$, $CN_2 = b_2$ gesetzt und bezeichnen wir wie gewöhnlich die Halbachsen mit a und b, so stellt Nr. 9) die Gleichung der Geraden A_1N_1 und Nr. 10) die von AN_2 dar. Was die dabei zu erfüllende Bedingung 11) betrifft, so gilt der Konstruktion zufolge die Proportion:

$$DM : AC = AD : CN_2.$$

Hieraus ensteht aber, wenn man AC mit der gleichen Strecke DB vertauscht und die gegebene Relation

$$DM : DB = CN_1 : CB$$

anwendet, die verlangte Bedingung.

Brennpunkte der Ellipse. Soll die Ellipse mittels ihrer Brennpunkte konstruiert werden, so entsteht wieder, wie bei der Parabel, die Frage nach der Anzahl und Lage solcher Punkte. Wir haben im § 15 unter Nr. 6) und 7) gefunden, dass, wenn x und y die Koordinaten eines auf einer Linie zweiten Grades gelegenen Punktes, ξ und η dagegen die eines zugehörigen Brennpunktes darstellen, zwischen diesen Grössen eine Gleichung von der Form

$$12)\qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2$$

stattfinden muss, welche nach Ausführung der Rechnung in

$$13)\qquad \begin{cases} (1-\alpha^2)\,x^2 + (1-\beta^2)\,y^2 - 2\alpha\beta xy - 2\,(\xi + \alpha\gamma)\,x \\ \qquad - 2\,(\eta + \beta\gamma)\,y + \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0 \end{cases}$$

übergeht. Damit es möglich ist, diese Gleichung auf die Formen 1) oder 2) der Ellipsengleichung zurückzuführen, müssen die Bedingungen

$$\alpha\beta = 0, \quad \xi + \alpha\gamma = 0, \quad \eta + \beta\gamma = 0$$

erfüllt werden, von denen die erste und zweite, oder die erste und dritte nur dann neben einander bestehen können, wenn entweder zugleich $\alpha = 0$ und $\xi = 0$, oder $\beta = 0$ und $\eta = 0$ ist. Man sieht hieraus, dass Brennpunkte der Ellipse nur in einer der beiden Achsen gelegen sein können. Nehmen wir zunächst $\beta = 0$ und $\eta = 0$, suchen also solche Brennpunkte, die in der x-Achse gelegen sind, so ist nach der zweiten der zu erfüllenden Bedingungen $\alpha = -\frac{\xi}{\gamma}$ zu setzen. Mit Substitution dieser Werte kann Nr. 13) auf die Form

$$\frac{\gamma^2 - \xi^2}{\gamma^2} \cdot x^2 + y^2 = \gamma^2 - \xi^2$$

gebracht werden, woraus sich die Gleichung

$$\frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\gamma^2 - \xi^2} = 1$$

ergiebt. Dieselbe gehört einer Ellipse an, für deren Halbachsen die Beziehungen

$$a = \gamma, \quad b^2 = \gamma^2 - \xi^2$$

stattfinden. Durch Verbindung der beiden letzten Relationen entsteht:

14) $$\xi^2 = a^2 - b^2,$$

oder mit Einführung der linearen Excentricität c:

15) $$\xi = \pm c,$$

wodurch wir auf die zwei bereits in Fig. 29 dargestellten Brennpunkte zurückkommen.

Für Brennpunkte in der y-Achse müsste $\alpha = 0$ und $\xi = 0$ gesetzt und dazu die Bedingung $\beta = -\frac{\eta}{\gamma}$ gefügt werden. Wird mit Benutzung dieser Grössen die vorhergehende Rechnung wiederholt, so gelangt man durch blosse Buchstabenvertauschung zu dem Resultate:

16) $$\eta^2 = b^2 - a^2,$$

was, da $a > b$ vorausgesetzt ist, zu imaginären Werten hinführt. Die Ellipse enthält also nur die beiden in der grossen Achse zu beiden Seiten des Mittelpunktes im Abstande c gelegenen Brennpunkte.

Bezeichnen wir mit z_1 den Abstand eines Ellipsenpunktes xy von dem auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkte, so ist in der aus Nr. 12) folgenden Gleichung

$$z_1{}^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2$$

nach den oben gefundenen Relationen

$$\gamma = a, \quad \beta = 0, \quad \alpha = -\frac{\xi}{\gamma} = -\frac{c}{a} = -\varepsilon$$

zu setzen, wobei ε wie früher (vgl. § 14 Nr. 8) die numerische Excentricität darstellt. Hieraus folgt:

$$z_1{}^2 = (a - \varepsilon x)^2,$$

und, da für jedes x (also z. B. auch für $x = 0$) nur positive Werte von z_1 zulässig sind,

17) $$z_1 = a - \varepsilon x.$$

In gleicher Weise findet sich, wenn man $\xi = -c$ nimmt, für den auf den andern Brennpunkt bezogenen Brennstrahl:

18) $$z_2 = a + \varepsilon x,$$

und endlich aus der Verbindung von 17) und 18):

19) $$z_1 + z_2 = 2a.$$

So gelangen wir durch die analytische Untersuchung der Ellipsengleichung zu der bereits im § 14 aus Fig. 29 hergeleiteten Unveränderlichkeit der Summe der Brennstrahlen zurück. Es gewährt durchaus keine Schwierigkeit, dieser Eigenschaft die Mittel zur Konstruktion einer Ellipse zu entnehmen, für welche die grosse Achse und die Brennpunkte gegeben sind.

§ 21.

Die Ellipse und die Gerade.

Für die Koordinaten derjenigen Punkte, welche gleichzeitig in einer Ellipse mit der Gleichung

$$1)\qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

und einer Geraden

$$2)\qquad y = Mx + n^*$$

gelegen sind, müssen die Gleichungen beider Linien Geltung finden. Durch Elimination von y erhält man hieraus für die Abscissen dieser Punkte:

$$3)\qquad (a^2M^2 + b^2)\,x^2 + 2a^2\,Mnx + a^2\,(n^2 - b^2) = 0.$$

Das y, welches einem jeden hieraus folgenden x zugehört, ist aus Nr. 2) zu berechnen.

Da $a^2M^2 + b^2$ in einer Ellipse nicht gleich Null sein kann, so ist die Gleichung 3) stets quadratisch, gewährt also rücksichtlich der Beschaffenheit ihrer Wurzeln die bei quadratischen Gleichungen möglichen drei Fälle, welche nach dem Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta = a^4M^2n^2 - a^2\,(n^2 - b^2)\,(a^2M^2 + b^2)$$

zu beurteilen sind. Durch einfache Umformung des letzteren Ausdruckes gelangt man zu dem Resultate

$$\Delta = a^2b^2\,(a^2M^2 + b^2 - n^2),$$

wonach, da a^2b^2 immer positiv sein muss, die Unterscheidung der drei Fälle einzig davon abhängt, ob die Differenz

---

* Um Verwechselungen mit den Konstanten der Ellipse zu vermeiden, ist die Richtungskonstante der Geraden mit M und die Ordinate ihres in der y-Achse gelegenen Punktes mit n bezeichnet worden.

$$a^2 M^2 + b^2 - n^2$$

positiv, gleich Null oder negativ ist. Im ersteren Falle stellt die Gerade eine Sekante, im zweiten eine Tangente der Ellipse dar; im dritten sind keine gemeinschaftlichen Punkte vorhanden.

Um dem gefundenen Unterscheidungsmerkmale eine geometrische Deutung abzugewinnen, wollen wir uns zunächst auf den einfachen und praktisch wichtigsten Fall beschränken, wo die angegebene Differenz gleich Null ist, die Gerade also den Charakter einer Tangente an sich trägt. Das hierfür geltende analytische Kennzeichen

$$4) \qquad a^2 M^2 + b^2 = n^2$$

kommt, wenn man mittels der Gleichung

$$b^2 = a^2 - c^2$$

die lineare Excentricität c einführt, auf die Form:

$$a^2 (1 + M^2) = c^2 + n^2.$$

Bezeichnen wir nun mit α den von der Geraden und der x-Achse eingeschlossenen Winkel, so ist bekanntlich

$$1 + M^2 = sec^2 \alpha,$$

und es entsteht hiermit aus der vorhergehenden Gleichung:

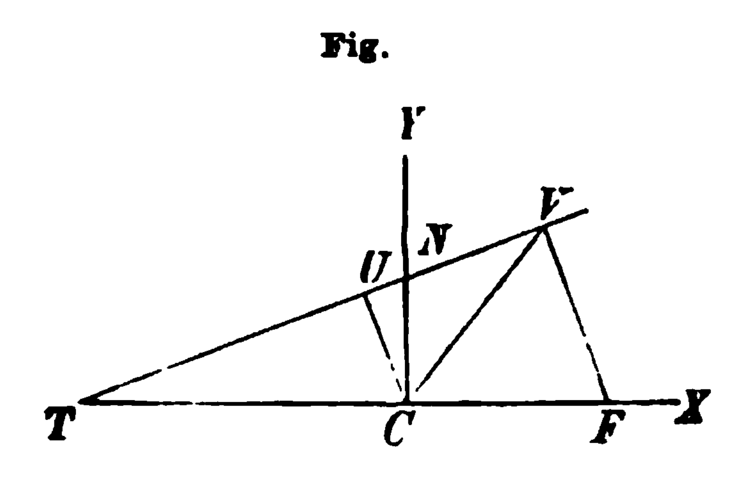
$$a^2 sec^2 \alpha = c^2 + n^2$$

oder:

$$5) \qquad a^2 = (c \cos \alpha)^2 + (n \cos \alpha)^2.$$

Um diese Gleichung zu deuten, ist in Fig. 44 $CF = c$ gesetzt, indem C den Mittelpunkt und F einen Brennpunkt der Ellipse darstellt. TV ist die zu untersuchende Tangente, also $CN = n$. Zieht man CU und FV senkrecht auf TV, so wird

Fig.



$$UV = c \cos \alpha, \quad CU = n \cos \alpha;$$

folglich erhält man aus 5):

$$a^2 = \overline{UV}^2 + \overline{CU}^2 = \overline{CV}^2, \quad a = CV.$$

Der Fusspunkt V des vom Brennpunkte F auf die Tangente gefällten Perpendikels oder die Projektion des Brennpunktes auf die Tangente liegt hiernach im Abstande a vom Mittelpunkte der Ellipse, d. i. auf der Peripherie des umgeschriebenen Kreises.

Untersucht man in gleicher Weise die beiden noch übrigen Fälle, was durch blosse Vertauschung der Gleichheits- und Ungleichheitszeichen in den letzten Formeln geschehen kann, so gelangt man zu dem Satze: Eine Gerade schneidet eine Ellipse in zwei Punkten, berührt sie in einem Punkte oder hat keinen Punkt mit ihr gemein, je nachdem die Projektionen der Brennpunkte auf die Gerade innerhalb, auf oder ausserhalb der Peripherie des über der grossen Achse beschriebenen Kreises liegen. — Durch Umkehrung dieses Satzes kommt man unter anderem zu dem Resultate, dass, wenn man auf einer Ellipsentangente in den beiden Punkten, worin sie den umgeschriebenen Kreis schneidet, Senkrechte errichtet, jede dieser Senkrechten durch einen der beiden Brennpunkte hindurchgehen muss.

Tangenten der Ellipse. Die auf Tangenten bezüglichen Fundamentalaufgaben, eine Berührende in gegebener Richtung oder durch einen gegebenen Punkt an eine Ellipse zu legen, können leicht geometrisch mit Hilfe des umgeschriebenen Kreises nach dem obigen Lehrsatze gelöst werden. Die analytische Behandlung dieser Aufgaben stützt sich auf die Bedingungsgleichung 4), welche das Kennzeichen für den Fall enthält, in welchem eine Gerade zur Tangente der Ellipse wird.

Soll erstens eine Gerade, deren Richtungskonstante den Wert M besitzt, die Ellipse berühren, so gelten für diesen Fall die Gleichungen:

$$y = Mx + n, \qquad a^2M^2 + b^2 = n^2,$$

aus denen die unbekannte Konstante n eliminiert werden kann. Es folgt dann als Gleichung der Tangente bei gegebener Richtung:

$$6) \qquad y = Mx \pm \sqrt{a^2M^2 + b^2}.$$

Da hierin die Wurzelgrösse nicht verschwinden kann, so sind nach jeder Richtung hin zwei parallele Tangenten möglich, welche mit Rücksicht auf die Form von Gleichung 6) die y-Achse zu beiden Seiten des Mittelpunktes in gleichem Abstande durchschneiden. Was die Koordinaten der zugehörigen Berührungspunkte betrifft, so ergeben sich dieselben aus den Resultaten der folgenden Aufgabe.

Wird nämlich zweitens die Forderung gestellt, durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1$ Tangenten an die Ellipse zu legen, so läuft unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen diese Aufgabe darauf hinaus, M und n zu berechnen, wenn x_1 und y_1 gegeben sind. Die hierzu nötigen Bedingungsgleichungen können aber ebenfalls benutzt werden, um die Werte von x_1 und y_1 aus M und n abzuleiten.

Mit Rücksicht auf die gestellten Bedingungen, dass die Gerade mit den Konstanten M und n Tangente sein und auf ihr der Punkt $x_1 y_1$ liegen soll, gelten die Gleichungen:

$$a^2 M^2 + b^2 = n^2, \qquad y_1 = M x_1 + n,$$

woraus durch Elimination von n die zur Berechnung von M dienende Gleichung

$$7) \qquad (a^2 - x_1^2) M^2 + 2 x_1 y_1 M + (b^2 - y_1^2) = 0$$

entsteht. Die Konstante n, welche einem jeden hieraus berechneten M zugehört, ergiebt sich aus

$$8) \qquad n = y_1 - M x_1.$$

Die Form von Nr. 7) zeigt, dass durch den gegebenen Punkt entweder zwei Tangenten gelegt werden können, oder nur eine oder endlich keine möglich ist, je nachdem

$$x_1^2 y_1^2 \gtreqless (a^2 - x_1^2)(b^2 - y_1^2)$$

oder auch

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 \gtreqless a^2 b^2,$$

und es geht aus der zu Nr. 3) im § 20 gemachten Bemerkung hervor, dass diese zu unterscheidenden Fälle darauf hinauskommen, ob der gegebene Punkt ausserhalb, auf der Peripherie oder innerhalb der Ellipse gelegen ist.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, wo sich der Punkt $x_1 y_1$ auf der Peripherie befindet, also den Berührungspunkt abgiebt, so erhalten wir aus Nr. 7) auf sehr einfache Weise die Richtung der Tangente, wenn wir vor allen Dingen diese Gleichung mit $a^2 b^2$ multiplizieren. In dem hieraus entstehenden Resultate

$$a^2 b^2 (a^2 - x_1^2) M^2 + 2 a^2 b^2 x_1 y_1 M + a^2 b^2 (b^2 - y_1^2) = 0$$

kann nämlich, wenn $x_1 y_1$ Peripheriepunkt ist, nach der Ellipsengleichung 1)

$$b^2 (a^2 - x_1^2) = a^2 y_1^2, \qquad a^2 (b^2 - y_1^2) = b^2 x_1^2$$

gesetzt werden, und man erhält hieraus:

$$a^4 y_1^2 M^2 + 2 a^2 b^2 x_1 y_1 M + b^4 x_1^2 = 0$$

oder nach Wurzelausziehung und Reduktion auf M:

9) $$M = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

(Aus dieser für die Richtungskonstante der Tangente im Berührungspunkte $x_1 y_1$ geltenden Gleichung) folgt unter anderem, dass, solange M einen gegebenen Wert besitzt, auch der Quotient $\frac{y_1}{x_1}$ konstant bleiben muss, wonach sich mit Rücksicht auf die Gleichung 1) im § 5 die Berührungspunkte paralleler Tangenten, deren es nach dem Resultate der vorigen Aufgabe je zwei giebt, auf einer durch den Mittelpunkt der Ellipse (den Koordinatenanfang) gehenden Geraden befinden.

Wird das Ergebnis von Nr. 9) in 8) eingesetzt, so findet sich bei neuer Reduktion mit Hilfe der Ellipsengleichung:

10) $$n = \frac{b^2}{y_1}.$$

Die Gleichungen 10) und 9) sind auf y_1 und x_1 zu reduzieren, wenn aus den Konstanten einer gegebenen Tangente die Koordinaten des Berührungspunktes abgeleitet werden sollen. Die Ausführung hiervon kann der Selbstübung des Lesers überlassen bleiben.

Durch Einsetzung der in 9) und 10) gefundenen Werte in die Gleichung der Geraden ergiebt sich für die Gleichung der durch den Berührungspunkt $x_1 y_1$ gehenden Tangente:

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot x + \frac{b^2}{y_1},$$

woraus nach gehöriger Reduktion

11) $$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

hergeleitet wird. Für die Abscisse des in der x-Achse gelegenen Punktes, die wir mit m bezeichnen wollen, folgt hieraus:

12) $$m = \frac{a^2}{x_1}.$$

Die Werte 10) und 12) sind besonders zur geometrischen Darstellung der Tangente geeignet. Da nämlich m nur von a und x_1 abhängt, so müssen in allen über derselben grossen Achse konstruierten Ellipsen die Berührenden solcher Punkte, die eine gleiche Abscisse besitzen, die x-Achse in demselben Punkte schneiden; es gilt dies also auch, da die kleine Achse ganz ausser dem Spiele bleibt, für die Tangente im umgeschriebenen Kreise. In gleicher Weise wird mit Rücksicht auf Nr. 10) die y-Achse bei gleich bleibender Ordinate der Berührungspunkt von den Tangenten aller über derselben kleinen Achse befindlichen Ellipsen in demselben Punkte geschnitten, also auch von der Tangente im eingeschriebenen Kreise. Hiernach kann die Darstellung der Tangente leicht mit der in Fig. 41 enthaltenen Konstruktion der Ellipse aus den über den Achsen beschriebenen Kreisen in Verbindung gebracht werden.

Befindet sich der Punkt $x_1 y_1$, durch welchen Berührende an die Ellipse gelegt werden sollen, ausserhalb der Peripherie, so führt eine gleiche Schlussfolgerung, wie die zur Herleitung von Nr. 3) im § 10 und Nr. 13) im § 16 angestellte, zu dem Resultate, dass

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Berührungssehne darstellt. Hiermit lässt sich in ähnlicher Weise, wie es bei den Tangenten geschah, die Berührungssehne in der Ellipse mit den entsprechenden Linien im umgeschriebenen und im eingeschriebenen Kreise in Zusammenhang bringen.

Normalen der Ellipse. Für die Normale im Ellipsenpunkte $x_1 y_1$ ergiebt sich mittels der in Nr. 9) gefundenen Richtungskonstante der hierzu senkrechten Tangente die Gleichung:

$$13)\qquad y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Wird hierin $y = 0$ gesetzt, so entsteht, wenn wir die zugehörige Abscisse mit ξ bezeichnen, für die Subnormale der Wert:

$$14)\qquad \xi - x_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2},$$

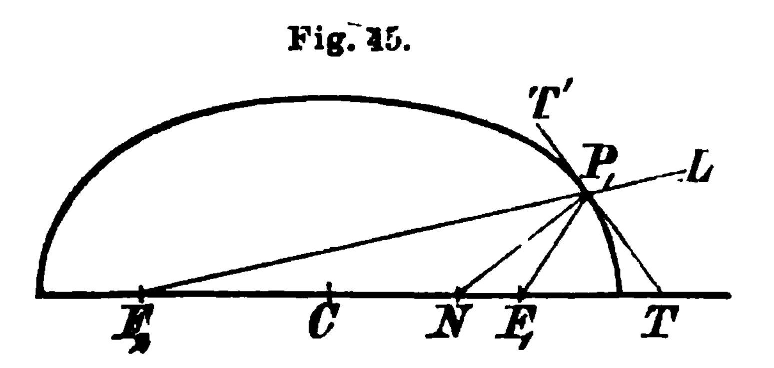
und hieraus für ξ selbst mit Einführung der numerischen Excentricität nach bekannten Reduktionsformeln:

$$15)\qquad \xi = \varepsilon^2 x_1.$$

Hieraus wird unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die x aller Ellipsenpunkte zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ enthalten sind, leicht abgeleitet, dass die grosse Achse von jeder Normale zwischen den beiden Brennpunkten und zwar, von der kleinen Achse aus gerechnet, auf derselben Seite geschnitten wird, auf welcher sich der zugehörige Ellipsenpunkt befindet.

Sind nun in Fig. 45 F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte, ist ferner C der Mittelpunkt der Ellipse und P_1N die Normale des Punktes P_1, so hat man $\xi = CN$, und hiernach folgt für die Abstände des Punktes N von den beiden Brennpunkten:

Fig. 45.



$$NF_1 = c - \xi = \varepsilon\,(a - \varepsilon x_1)$$
$$F_2N = c + \xi = \varepsilon\,(a + \varepsilon x_1).$$

Mit Rücksicht auf die im § 20 unter 17) und 18) gefundenen Längen der Brennstrahlen P_1F_1 und P_1F_2 ist also

$$NF_1 = \varepsilon\,.\,P_1F_1, \qquad F_2N = \varepsilon\,.\,F_2P_1.$$

Dies giebt die Proportion:

$$16) \qquad F_2N : NF_1 = F_2P_1 : P_1F_1,$$

woraus nach einem bekannten geometrischen Satze geschlossen wird, dass die Normale P_1N den Winkel $F_2P_1F_1$ halbiert.* Man erhält so den Satz: die Normale eines jeden Ellipsenpunktes bildet mit den zugehörigen Brennstrahlen gleiche Winkel. Geometrisch wird hieraus abgeleitet, dass die Tangente $T'T$ den Winkel F_1P_1L halbiert, welchen ein Brennstrahl mit der Verlängerung des andern einschliesst. Zu demselben Resultate gelangt

* Setzt man $\angle NP_1F_1 = \gamma_1$, $\angle F_2P_1N = \gamma_2$, $\angle P_1NF_1 = \nu$, so gelten die Proportionen:

$$\sin\gamma_1 : \sin\nu = NF_1 : P_1F_1,$$
$$\sin\gamma_2 : \sin\nu = F_2N : F_2P_1.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} : 1 = \frac{F_2N}{NF_1} : \frac{F_2P_1}{P_1F_1},$$

also mit Rücksicht auf 16):

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = 1, \quad \sin\gamma_2 = \sin\gamma_1 \text{ u. s. f.}$$

man durch Berechnung der Strecken F_2T und F_1T mit Hilfe von Nr. 12); dieselben stehen ebenfalls im Verhältnis der Brennstrahlen.

Die Länge der Normale P_1N, die wir mit u bezeichnen wollen, findet sich aus der Formel:

$$u^2 = (x_1 - \xi)^2 + y_1^2.$$

Mit Benutzung des obigen Wertes von ξ und der für $x_1 y_1$ geltenden Ellipsengleichung erhält man hieraus nach einfachen Reduktionen:

$$17)\qquad u^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2),$$

oder, wenn man für die Brennstrahlen P_1F_1 und F_2P_1 die bereits im § 20 angewendeten Bezeichnungen z_1 und z_2 gebraucht,

$$18)\qquad u^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot z_1 z_2.$$

Hierauf kann eine einfache Formel für die Grösse des Winkels basiert werden, welchen die Normale mit jedem der Brennstrahlen einschliesst, und den wir mit γ bezeichnen wollen. Nach einem bekannten trigonometrischen Satze erhält man nämlich im Dreieck $F_2P_1F_1$ Fig. 45, dessen drei Seiten gleich z_2, z_1 und $2c$ sind,

$$\cos^2\gamma = \frac{(z_1 + z_2 + 2c)(z_1 + z_2 - 2c)}{4 z_1 z_2},$$

also mit Rücksicht auf § 20 Nr. 19) und § 14 Nr. 9)

$$\cos^2\gamma = \frac{b^2}{z_1 z_2}.$$

Wird diese Gleichung durch Multiplikation mit Nr. 18) verbunden, so entsteht das Resultat:

$$u^2 \cos^2\gamma = \frac{b^4}{a^2},$$

oder nach § 14 Nr. 6), bei Beachtung des Umstandes, dass nur positive Werte von $\cos\gamma$ in Frage kommen können,

$$19)\qquad u \cos\gamma = p,$$

wobei p den Halbparameter darstellt. Nach dieser Formel kann der Winkel γ leicht berechnet werden; zugleich ist darin der Lehrsatz enthalten: In der Ellipse giebt die Projektion der Nor-

male auf einen Brennstrahl des zugehörigen Peripheriepunktes den Halbparameter.*

§ 22.
Fortsetzung.

Durchmesser der Ellipse. Wir sind berechtigt, die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen durch $a^2M^2 + b^2$ zu dividieren, weil dieser Wert immer von Null verschieden sein muss. Dann entsteht für die Abscissen derjenigen Punkte, welche die in Untersuchung stehende Gerade mit der Ellipse gemein hat, die Gleichung:

$$1) \qquad x^2 + 2 \cdot \frac{a^2 Mn}{a^2 M^2 + b^2} \cdot x + \frac{a^2 (n^2 - b^2)}{a^2 M^2 + b^2} = 0.$$

Angenommen nun, die Ellipse werde von der Geraden in zwei reellen Punkten geschnitten und es seien x und y die Koordinaten des Mittelpunktes der zwischen den beiden Durchschnittspunkten enthaltenen Sehne, so ist

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

wenn unter x_1 und x_2 die Wurzeln der obigen Gleichung und unter y_1 und y_2 die zugehörigen Ordinaten verstanden werden. Mit Rücksicht auf die Summe der Wurzeln von Nr. 1) und auf die Gleichung der Geraden ergiebt sich:

$$2) \qquad x = -\frac{a^2 Mn}{a^2 M^2 + b^2}, \qquad y = Mx + n.$$

Hieraus erhält man durch Elimination von n für die Mitten einer Schar paralleler Sehnen (mit der gemeinschaftlichen Richtungskonstante M) die Gleichung:

$$3) \qquad a^2 My + b^2 x = 0,$$

aus deren geometrischer Deutung sich der Lehrsatz ergiebt: Die Mitten aller parallelen Sehnen einer Ellipse liegen in

* Da sich dieser Satz unabhängig von der Grösse der Achsen zeigt, so muss er auch für die Parabel gelten, von der wir früher (vgl. die aus der Zusammenstellung der Gleichungen unter Nr. 16 im § 14 gezogenen Folgerungen) gesehen haben, dass sie als Ellipse mit unendlicher grosser Achse aufgefasst werden kann. Ohne alle Rechnung ergiebt sich übrigens für die Parabel dieselbe Eigenschaft aus der Grösse der Subnormale mittels der zu Fig. 36 angestellten Betrachtungen.

einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden. Die Kurve besitzt also geradlinige Durchmesser, die sich sämtlich im Mittelpunkte schneiden, und es kann hiernach dieser Punkt mittels des Durchschnittes zweier Geraden konstruiert werden, von denen jede zwei parallele Sehnen halbiert. Bei einer vollständig gegebenen Ellipse reicht übrigens hierzu bereits die Konstruktion eines einzigen Durchmessers hin, da dessen Mitte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen muss.

Bringen wir Nr. 3) auf die Form

$$y = -\frac{b^2}{a^2 M} x,$$

so findet sich für die Richtungskonstante des Durchmessers, die wir mit M' bezeichnen wollen, die Gleichung:

$$M' = -\frac{b^2}{a^2 M},$$

oder auch:

$$4) \qquad MM' = -\frac{b^2}{a^2},$$

d. h. die Richtungskonstanten eines beliebigen Systems paralleler Sehnen und ihres zugehörigen Durchmessers bilden für jede Ellipse ein unveränderliches Produkt. Da hierbei, unbeschadet der Richtigkeit der Gleichung, die Faktoren M und M' ihre Rollen austauschen können, so folgt, dass, wenn man den Sehnen die Richtung des zugehörigen Durchmessers giebt, letzterer die Richtung der Sehnen annimmt. Legt man also zu den Sehnen, welche von einem Durchmesser halbiert werden, eine Parallele durch den Mittelpunkt, so ist diese Parallele selbst wieder Durchmesser für diejenigen Sehnen, welche mit dem ersten gleiche Richtung haben. Zwei in der angegebenen Weise von einander abhängige Durchmesser heissen **zugeordnete** oder **konjugierte Durchmesser**. Einer derselben kann immer in beliebiger Richtung durch den Mittelpunkt der Ellipse gelegt werden; man findet dann den andern, wenn man den Halbierungspunkt einer dazu parallelen Sehne geradlinig mit dem Mittelpunkte verbindet. Ebenso folgt, dass, wenn man durch den Mittelpunkt zwei Gerade so legt, dass von jeder eine zu der andern parallele Sehne halbiert wird, diese Geraden konjugierte Durchmesser sein müssen. Man erreicht dies z. B., wie leicht geometrisch nachgewiesen werden kann, wenn man durch den

Mittelpunkt Parallelen zu zwei Sehnen zieht, welche die Enden eines Durchmessers mit einem beliebigen Punkte der Ellipse verbinden. Sehnen dieser Art werden Supplementarsehnen genannt; man erhält also den Satz: Durchmesser der Ellipse, die mit zwei Supplementarsehnen parallel laufen, sind konjugiert.

Die beiden Achsen der Ellipse sind als ein specieller Fall der konjugierten Durchmesser zu betrachten, und zwar als der einzige, wo diese Linien senkrecht auf einander stehen. Für jeden andern Fall gilt nämlich, wenn mit α und β die in der Drehrichtung der Polarwinkel gemessenen Winkel bezeichnet werden, welche die Richtung der beiden Durchmesser gegen die Achse der positiven x bestimmen, nach Nr. 4) die Gleichung:

$$5)\qquad \tan\alpha \,.\, \tan\beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Bei rechtwinkliger Lage müsste das darin enthaltene Produkt zu -1 werden, was bei Ausschliessung des vorerwähnten speciellen Falles, in welchem das Produkt der beiden Winkeltangenten die unbestimmte Form $0 \,.\, \infty$ annimmt, allgemein nur möglich ist, wenn $b = a$, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht. — Die Bemerkung, dass die beiden Achsen den einzigen Fall darstellen, in welchem konjugierte Durchmesser einen rechten Winkel einschliessen, gewährt ein einfaches Mittel, in einer Ellipse mit gegebenem Mittelpunkte die Lage der Achsen zu bestimmen. Beschreibt man nämlich über einem Durchmesser einen die Ellipse schneidenden Halbkreis und verbindet den Durchschnittspunkt geradlinig mit den Enden des Durchmessers, so erhält man zwei auf einander senkrechte Supplementarsehnen; die hierzu parallelen Durchmesser sind also die beiden Achsen.

Das in Nr. 5) rechter Hand befindliche Vorzeichen weist darauf hin, dass von den Winkeln α und β der eine immer spitz, der andere stumpf sein muss, dass also jeder der beiden Durchmesser von den vier Quadranten der Ellipse zwei gegenüberliegende durchschneidet. Verstehen wir nun unter α den spitzen dieser beiden Winkel, so ist $\beta - \alpha$ der von der kleinen Achse durchschnittene Winkel, welcher die beiden Durchmesser zu Schenkeln hat; in die Nebenwinkel des letzteren fällt die grosse Achse. Bezeichnen wir dieses Supplement von $\beta - \alpha$ mit ω, so ist

$$tan\,\omega = tan\,(\alpha - \beta) = \frac{tan\,\alpha - tan\,\beta}{1 + tan\,\alpha\,.\,tan\,\beta},$$

und es folgt hieraus, wenn mit Hilfe von Nr. 5) der Winkel β eliminiert wird,

$$6) \qquad tan\,\omega = \frac{a^2\,tan\,\alpha + b^2\,cot\,\alpha}{a^2 - b^2}.$$

Da dieser Wert immer positiv ist, so zeigt sich, dass von den beiden durch die konjugierten Durchmesser begrenzten Nebenwinkeln der stumpfe von der kleinen und der spitze von der grossen Achse durchschnitten wird. Der letztere (in unserer Bezeichnung ω) führt den Namen: Konjugationswinkel. Für die Grösse desselben gilt die Formel 6), woraus nach goniometrischen Sätzen das Resultat

$$sin^2\,\omega = \frac{(a^2\,tan\,\alpha + b^2\,cot\,\alpha)^2}{(a^2 - b^2)^2 + (a^2\,tan\,\alpha + b^2\,cot\,\alpha)^2},$$

oder nach einfacher Umformung

$$7) \qquad sin^2\,\omega = \frac{(a^2\,sin^2\,\alpha + b^2\,cos^2\,\alpha)^2}{a^4\,sin^2\,\alpha + b^4\,cos^2\,\alpha}$$

abgeleitet wird. Die letztere Formel wird später dazu dienen, die Grösse des Konjugationswinkels von den Längen der Durchmesser abhängig zu machen.

Die konjugierten Durchmesser lassen sich noch in eine einfache Beziehung zu den Tangenten der Ellipse bringen, wenn man auf Nr. 3) zurückgeht. Reduziert man nämlich auf M, so entsteht:

$$8) \qquad M = -\frac{b^2 x}{a^2 y},$$

wobei x und y als Koordinaten des Sehnenmittelpunktes einen Punkt des zugehörigen Durchmessers und M als Richtungskonstante der Sehne die Richtung des konjugierten Durchmessers anzeigen. Da der Durchmesser mit dem Punkte xy durch den Koordinatenanfang geht, so gilt, wenn wir mit x_1 und y_1 die Koordinaten eines der beiden Punkte bezeichnen, worin er die Ellipse schneidet, die Proportion:

$$x : x_1 = y : y_1,$$

durch deren Anwendung Nr. 8) in die Formel 9) des vorhergehenden Paragraphen übergeführt werden kann. Da durch diese Formel die Richtung der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ bestimmt wurde, so

folgt der Satz: **Jeder Durchmesser der Ellipse läuft parallel mit den Tangenten der in seinem konjugierten Durchmesser gelegenen Ellipsenpunkte.*** Hiernach ist es leicht, eine Tangente mittels des durch ihren Berührungspunkt gehenden Durchmessers zu konstruieren, indem man die Richtung des hierzu konjugierten Durchmessers ermittelt.

Legt man durch den Mittelpunkt der Ellipse ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen mit zwei konjugierten Durchmessern zusammenfallen, so müssen nach der Eigenschaft dieser Linien jedem Werte der einen Koordinate Doppelwerte der andern Koordinate von gleicher Grösse und entgegengesetzten Vorzeichen zugehören; die auf dieses System bezogene Gleichung der Ellipse muss daher wieder in Beziehung auf x sowohl, als auf y rein quadratisch sein. Wir können diese Bemerkung durch Anwendung der Transformationsformeln bestätigen. Sind α und β die Winkel, welche der Reihe nach in der im § 4 zu Fig. 10 festgestellten Drehrichtung die neue x- und y-Achse mit der grossen Achse der Ellipse bilden, so ist beim Übergange zum neuen Systeme nach Nr. 1) des angeführten Paragraphen

$$x \cos\alpha + y \cos\beta \text{ für } x$$
$$x \sin\alpha + y \sin\beta \text{ „ } y$$

zu setzen. Man erhält dann als Gleichung der Ellipse:

$$\left(\frac{x \cos\alpha + y \cos\beta}{a}\right)^2 + \left(\frac{x \sin\alpha + y \sin\beta}{b}\right)^2 = 1,$$

und hieraus nach einfachen Umformungen:

$$\frac{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{a^2 b^2} \cdot x^2 + \frac{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}{a^2 b^2} \cdot y^2$$
$$+ 2 \cdot \frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta}{a^2 b^2} \cdot xy = 1.$$

Aus Nr. 5) ergiebt sich, dass für konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen der Zähler des letzten Bruches zu Null wird. Gebraucht man daher noch die Abkürzungen:

---

* Veranschaulicht wird dieser Satz durch parallele Verschiebung der Sehne, wobei, wenn schliesslich beide Endpunkte zusammenfallen, die Gerade, von welcher die Sehne eine begrenzte Strecke darstellte, in eine Tangente übergeht.

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a_1{}^2} = \dfrac{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{a^2 b^2}, \\ \dfrac{1}{b_1{}^2} = \dfrac{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}{a^2 b^2}, \end{cases}$$

so bleibt die auf zwei konjugierte Durchmesser bezogene Ellipsengleichung:

$$10)\quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Die Vergleichung der Formeln 9) mit der in § 20 Nr. 3) aufgestellten Polargleichung der Ellipse zeigt, dass hierin a_1 und b_1 die in den Koordinatenachsen gelegenen Halbmesser darstellen. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn wir in Nr. 10) eine der beiden Koordinaten zu Null werden lassen.

Aus der Übereinstimmung der Form von Nr. 10) mit der auf die beiden Achsen der Ellipse bezüglichen Gleichung dieser Kurve folgt, dass alle aus dieser Form entnommenen Schlussfolgerungen, soweit sie von der rechtwinkligen Lage des Koordinatensystems unabhängig bleiben, auch dann noch Anwendung finden, wenn bei schiefwinkligem Koordinatensystem die Achsen die Rolle konjugierter Durchmesser spielen. Was z. B. die im § 20 gegebenen Konstruktionen der Ellipse betrifft, so kann die in Fig. 43 dargestellte unverändert beibehalten werden, wenn man das mit den Halbachsen gebildete Rechteck gegen ein über zwei konjugierten Halbmessern beschriebenes Parallelogramm austauscht. Auch alle übrigen Konstruktionen lassen sich auf die konjugierten Durchmesser übertragen, wenn man anfangs eine Ellipse mit den Halbachsen a_1 und b_1 bildet und dann die den einzelnen Abscissen zugehörigen Ordinaten durch Drehung um die mit der x-Achse gebildeten Durchschnittspunkte in die nötige schiefe Lage überführt. Ebenso behalten die auf die Tangentengleichung bezüglichen Entwickelungen, insofern man von der goniometrischen Deutung der Richtungskonstante absieht, ihre volle Geltung. Die Gleichung

$$11)\quad \frac{x_1 x}{a_1{}^2} + \frac{y_1 y}{b_1{}^2} = 1$$

stellt wieder die Gleichung der Tangente im Berührungspunkte $x_1 y_1$ dar, oder gehört der Berührungssehne an, wenn der Punkt $x_1 y_1$ ausserhalb der Ellipse gelegen ist.

Formeln von bemerkenswerter Einfachheit ergeben sich, wenn man die excentrischen Anomalien (§ 20) φ und ψ der Endpunkte zweier konjugierter Diameter beachtet. Sind x_1 und y_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes des ersten Ellipsendiameters, x_2 und y_2 die des andern, bezogen auf die Achsen, so ist

$$x_1 = a \cos\varphi, \qquad y_1 = b \sin\varphi,$$
$$x_2 = a \cos\psi, \qquad y_2 = b \sin\psi.$$

Hieraus und aus der Gleichung 5) folgt

$$\tan\varphi \,.\, \tan\psi = -1,$$

und dies ergiebt

12) $$\psi = \varphi + 90^0.$$

Man hat daher den Satz: Die excentrischen Anomalien der Endpunkte zweier konjugierter Diameter unterscheiden sich um einen rechten Winkel. Die Koordinaten x_2 und y_2 kann man hiernach durch φ ausdrücken und erhält

13) $$\begin{cases} x_1 = a \cos\varphi, & y_1 = b \sin\varphi, \\ x_2 = -a \sin\varphi, & y_2 = b \cos\varphi. \end{cases}$$

Für die Strecken a_1 und b_1 ergiebt sich

14) $$\begin{cases} a_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi, \\ b_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi. \end{cases}$$

Aus 13) folgen die Gleichungen

$$\tan\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a} \cdot \tan\varphi,$$

$$\sin\alpha = \frac{b \sin\varphi}{a_1}, \qquad \cos\alpha = \frac{a \cos\varphi}{a_1},$$

$$a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha = \frac{a^2 b^2}{a_1^2},$$

$$a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha = \frac{a^2 b^2}{a_1^2} (a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi) = a^2 b^2 \cdot \frac{b_1^2}{a_1^2}.$$

Daher erhält man aus 7) für den Sinus des Konjugationswinkels

$$\sin^2\omega = \frac{a^2 b^2}{a_1^2 b_1^2}.$$

Hieraus folgt

15) $$a_1 b_1 \sin\omega = ab.$$

Dies giebt unter anderm die geometrische Deutung: In einer Ellipse sind alle Parallelogramme, welche entstehen,

wenn man die Endpunkte irgend zweier konjugierter Durchmesser geradlinig verbindet, flächengleich.

Durch Addition der Gleichungen 14) folgt ferner

$$16) \qquad a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. in einer Ellipse ist die Summe der Quadrate irgend zweier konjugierter Halbmesser konstant.

Die Unveränderlichkeit der Summe $a_1^2 + b_1^2$ zeigt, dass das Produkt $a_1^2 b_1^2$, also auch $a_1 b_1$ möglichst gross und damit nach Nr. 13) der Sinus des Konjugationswinkels möglichst klein werden muss, wenn die beiden konjugierten Durchmesser gleich lang sind. Mit Rücksicht auf die Ausdrücke 9) findet sich leicht, dass dies nur vorkommen kann, wenn $\beta = 180^0 - \alpha$, d. h. wenn die grosse Achse den Konjugationswinkel halbiert. Aus

$$\tan\beta = -\tan\alpha \quad \text{und} \quad \tan\alpha \,.\, \tan\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

folgt dann, wenn wir immer noch unter α den spitzen Winkel verstehen,

$$17) \qquad \tan\alpha = \frac{b}{a}.$$

Die Diagonalen eines Rechteckes, dessen Seiten die Tangenten der Achsenscheitel bilden, enthalten hiernach die gleichen konjugierten Durchmesser und schliessen den kleinsten in der Ellipse möglichen Konjugationswinkel ein. Bezeichnen wir mit k einen dergleichen Halbmesser, so ergiebt sich aus 14):

$$18) \qquad k^2 = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

und für den zugehörigen kleinsten Konjugationswinkel folgt

$$19) \qquad \sin\omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

ein Wert, der leicht mittels der Formel 17) durch Berechnung von $\sin 2\alpha$ verifiziert werden kann. — Die auf die gleichen Durchmesser als Koordinatenachsen bezogene Ellipsengleichung lautet nach 10):

$$20) \qquad x^2 + y^2 = k^2,$$

ist also mit der auf zwei im Mittelpunkte sich rechtwinklig schneidende Koordinatenachsen bezogenen Kreisgleichung identisch, nur

dass sie bei der Ellipse für ein einziges Koordinatensystem, und zwar für ein schiefwinkliges, Geltung findet.

Mit Hilfe der Gleichungen 15) und 16) können irgend zwei der darin enthaltenen fünf Grössen berechnet werden, wenn die drei anderen gegeben sind; man kann daher z. B. aus zwei nach Lage und Grösse bestimmten konjugierten Durchmessern die Achsen finden. Am leichtesten gelangt man hierbei zum Ziele, wenn man Summe und Differenz der beiden Halbachsen als Unbekannte betrachtet. Aus der Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen entstehen nämlich die Formeln:

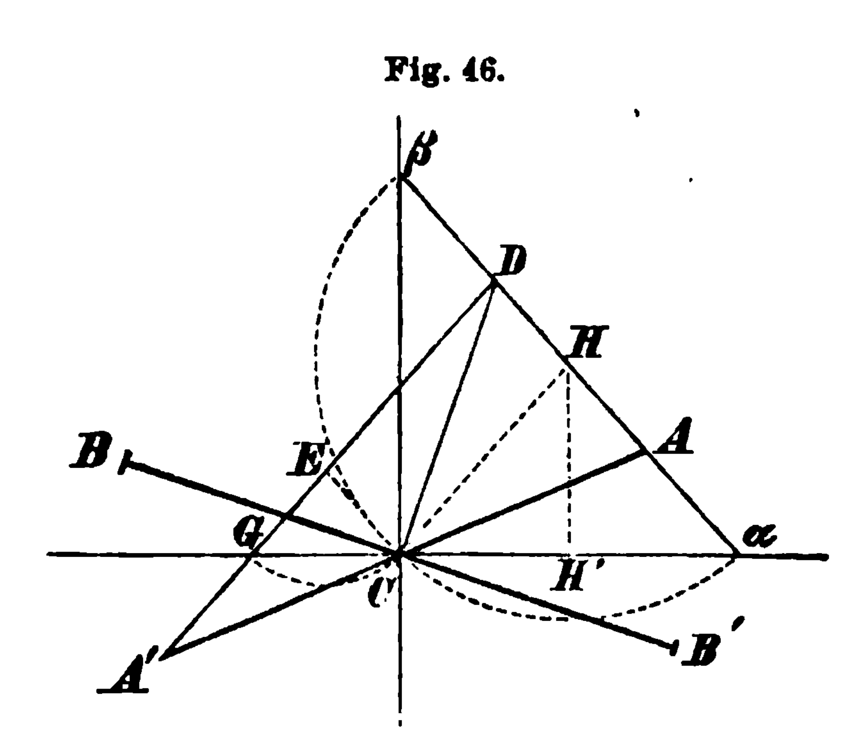
$$(a+b)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 \sin\omega,$$
$$(a-b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \sin\omega,$$

oder:

$$21)\quad \begin{cases} (a+b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos(90^0+\omega), \\ (a-b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos(90^0-\omega). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lassen eine einfache geometrische Konstruktion zu, da die rechter Hand stehenden Werte mit Hilfe zweier Dreiecke dargestellt werden können, für deren jedes zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind. Stellen nämlich $CA = A'C = a_1$ und $CB = B'C = b_1$ in Fig. 46 die konjugierten Durchmesser dar, welche den Konjugationswinkel $ACB = \omega$ einschliessen, so errichte man $CD = CB$ senkrecht auf BB'; dann ist $AD = a - b$ und $A'D = a + b$. Zieht man nun $CE \perp AD$, so wird

Fig. 46.



$$CE = \frac{a-b}{2},\quad ED = \frac{a+b}{2},$$

folglich, wenn man $GE = CE$ nimmt, $GD = a$, $A'G = b$.

Werden die Koordinaten von D in Bezug auf die Hauptachsen mit $x_3 y_3$ bezeichnet, so ist, weil CD normal auf BC und gleich BC ist (Nr. 13)

$$22)\quad \begin{cases} x_3 = y_2 = b\cos\varphi, \\ y_3 = -x_2 = a\sin\varphi. \end{cases}$$

Für den Mittelpunkt H der Strecke AD ergeben sich daher die Koordinaten und der Abstand vom Centrum

$$23)\quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(a+b)\cos\varphi, \quad \eta = \frac{1}{2}(a+b)\sin\varphi, \\ CH = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \frac{1}{2}(a+b). \end{cases}$$

Die einfachen Werte für x_1, y_1, x_3, y_3 veranlassen, die Ausdrücke zu bilden, durch welche die Strecken $C\alpha$ und $C\beta$ bestimmt sind, welche die Gerade AD von den Achsen abschneidet. Nach den im § 5 Nr. 11) enthaltenen Formeln ist

$$C\alpha = \frac{x_3y_1 - x_1y_3}{y_1 - y_3}, \qquad C\beta = \frac{y_3x_1 - x_3y_1}{x_1 - x_3}.$$

Setzt man hier die in Nr. 13) und 21) gegebenen Werte ein, so erhält man

$$C\alpha = (a+b)\cos\varphi, \qquad C\beta = (a+b)\sin\varphi.$$

Vergleicht man dies mit Nr. 23), so erkennt man, dass

$$\alpha H = H\beta = CH.$$

Die Hauptachsen gehen daher durch die Punkte, in welchen der um H beschriebene, C enthaltende Kreis die Gerade AD schneidet.

§ 23.

Die Krümmungskreise der Ellipse.

Bei Untersuchung der möglichen gegenseitigen Lagen der Ellipse und eines Kreises, deren Gleichungen beiderseits dem zweiten Grade angehören, ergiebt sich in gleicher Weise, wie bei der entsprechenden auf Parabel und Kreis bezüglichen Betrachtung (§ 18), eine Gleichung vierten Grades, aus deren Wurzeln die gemeinschaftlichen Punkte beider Linien zu entnehmen sind. Beschränkt man sich hierbei wieder auf den besonders wichtigen Fall, wo drei dieser Punkte zusammenfallen, also die Gleichung drei gleiche Wurzeln enthält und der Kreis nach den im § 18 aufgestellten Begriffen die Bedeutung des Krümmungskreises erhält, so gelangt man jedoch einfacher als durch Diskussion der Gleichung vierten Grades zur Bestimmung des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes, wenn man auf Grund der an der angegebenen Stelle gewonnenen Begriffe diesen Punkt als den Grenzort auffasst, in welche der Durchschnittspunkt der Normalen zweier Ellipsenpunkte übergeht, wenn die letzteren in einen einzigen zusammenschwinden. Von dieser Auffassung aus ergiebt sich der folgende Rechnungsgang.

Nehmen wir die beiden Achsen der Ellipse in der früheren Weise als Koordinatenachsen an, so lautet nach § 21 Nr. 13) die Gleichung der Normale im Ellipsenpunkte $x_1 y_1$:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Durch einfache Umgestaltung kommt dieselbe auf die Form:

$$1) \qquad a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1.$$

In gleicher Weise erhält man für eine zweite Normale im Punkte $x_2 y_2$ die Gleichung:

$$2) \qquad a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2,$$

aus deren Verbindung mit Nr. 1) die Koordinaten des Durchschnittes beider Linien zu berechnen sind. Man erhält durch Elimination von y:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \cdot x_1 x_2,$$

oder, wenn wir die numerische Excentricität ε und die Abkürzung

$$m = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

einführen:

$$x = \varepsilon^2 \cdot \frac{x_1 x_2}{m}.$$

Nach § 5 Nr. 11) stellt hierbei m die Abscisse desjenigen Punktes der x-Achse dar, in welchem sie von der Verbindungsgeraden der Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ geschnitten wird. Lässt man nun, um zum Krümmungsmittelpunkte zu gelangen, die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in einen übergehen, so wird die Verbindungsgerade zur Tangente im Punkte $x_1 y_1$, folglich nach § 21 Nr. 12)

$$m = \frac{a^2}{x_1}.$$

Hieraus entsteht für die Abscisse des zu $x_1 y_1$ zugehörigen Krümmungsmittelpunktes der Wert:

$$3) \qquad x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}.$$

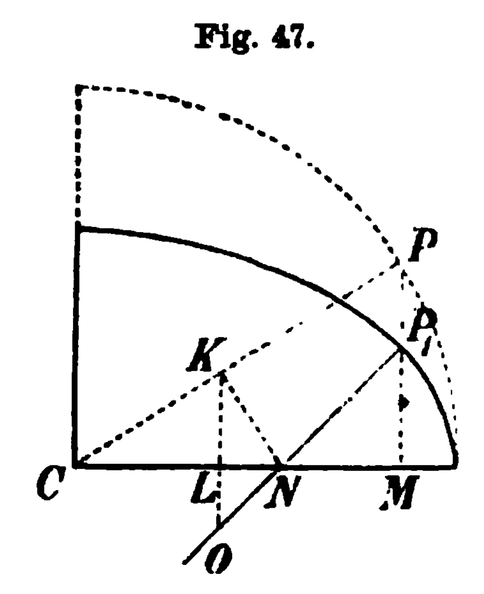
Dieser Ausdruck kann leicht konstruiert und damit der in der Normale gelegene Krümmungsmittelpunkt gefunden werden. Nach § 21 Nr. 15) ist nämlich $\varepsilon^2 x_1$ die Abscisse des Durchschnittspunktes

von Normale und x-Achse, die wir wie an der angegebenen Stelle mit ξ bezeichnen. Daher folgt:

$$x = \xi\left(\frac{x_1}{a}\right)^2,$$

wobei sich der in der Klammer enthaltene Quotient mittels des über der grossen Achse beschriebenen Kreises darstellen lässt. Ist P in Fig. 47 derjenige Punkt dieses Kreises, der mit P_1 die Abscisse $CM = x_1$ gemein hat, so ist, wenn wir $\angle MCP = \alpha$ setzen, so dass α die excentrische Anomalie des Punktes P_1 darstellt:

Fig. 47.



$$\frac{x_1}{a} = \cos\alpha.$$

Wird nun die Normale P_1N des Punktes P_1 gezogen, so ist

$$x = CN \, . \cos^2\alpha,$$

folglich, wenn NK senkrecht auf CP, und KO senkrecht auf CM errichtet wird, $CL = x$ und O der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Substituieren wir den Wert von x in der Gleichung 1) der Normale, so erlangen wir für die Ordinate von O das Resultat:

$$y = -\frac{\varepsilon^2 y_1 (a^2 - x_1^2)}{b^2},$$

oder, wenn wir mittels der Ellipsengleichung x_1 durch y_1 ausdrücken:

$$4) \qquad y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

Die Einsetzung von x und y in die Gleichung

$$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

(vgl. § 18 Nr. 11) lässt den Krümmungshalbmesser ϱ berechnen. Man erhält, wenn man beide Koordinaten durch x_1 ausdrückt und soweit als möglich reduziert:

$$5) \qquad \varrho^2 = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^2}{a^2 b^2}.$$

Nach § 21 Nr. 17) ist hierin

$$a^2 - \varepsilon^2 x_1^2 = \frac{a^2 u^2}{b^2},$$

wenn u die Länge der Normale bezeichnet, folglich

$$\varrho^2 = \frac{a^4 u^6}{b^8} = \frac{u^6}{p^4},$$

und

6)
$$\varrho = \frac{u^3}{p^2},$$

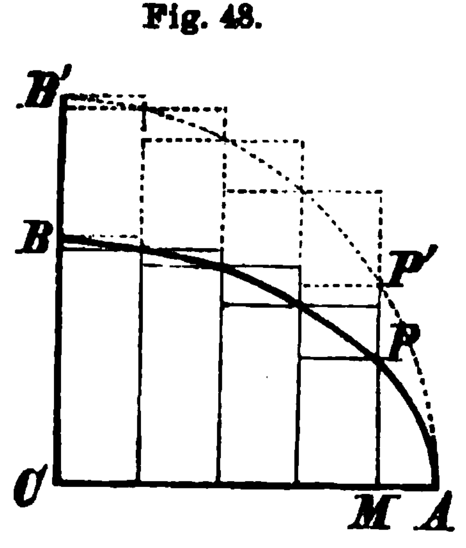
übereinstimmend mit dem in § 18 Nr. 13) gefundenen Werte des Krümmungshalbmessers der Parabel. Beachten wir, dass nach § 21 Nr. 19) der Ausdruck $\frac{u}{p}$ wie in der Parabel die Sekante des von Normale und Brennstrahl eingeschlossenen Winkels bedeutet, so gelangen wir zu dem Resultate, dass die in Fig. 36 enthaltene Konstruktion des Krümmungshalbmessers auch für die Ellipse ungeänderte Anwendung findet.

§ 24.

Die Quadratur der Ellipse.

Auf die in § 20 Nr. 7) gefundene Proportionalität, welche zwischen den Halbachsen einer Ellipse und den zu gleicher Abscisse gehörenden Ordinaten der Ellipse und des über der grossen Achse beschriebenen Kreises stattfindet, lässt sich eine Vergleichung der Ellipsenfläche mit der Fläche dieses Kreises gründen. Wir teilen zu diesem Zwecke die Abscisse $CM = x$ (Fig. 48) in n gleiche Teile, ziehen durch alle Teilpunkte Ordinaten und konstruieren mit der Anfangsordinate eines jeden hierdurch gebildeten Streifens und der Strecke $\frac{x}{n}$ ein Rechteck; dann ist die Summe dieser Rechtecke, welche S heissen möge, grösser als die elliptische Fläche $CBPM = F$.

Fig. 48.



Bezeichnen wir CB mit y_0, und mit $y_1, y_2, y_3 \ldots, y_n = MP$ der Reihe nach die darauf folgenden Ordinaten, so ist

$$S = \frac{x}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}),$$

oder, wenn $CB' = \eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots, \eta_n = MP'$ die mit $y_0, y_1, y_2 \ldots, y_n$ zu gleichen Abscissen gehörenden Ordinaten des umgeschriebenen Kreises ausdrücken:

$$1)\qquad S = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{n} (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots \eta_{n-1}).$$

Setzen wir ferner

$$2)\qquad S' = \frac{x}{n} (\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1}),$$

so bedeutet, wenn die vorhergehende Konstruktion auf den über der grossen Achse beschriebenen Kreis übertragen wird, S' die Summe der dort in gleicher Weise wie in der Ellipse gebildeten Rechteckflächen, und stellt eine obere Grenze für die teilweis vom Kreise begrenzte Fläche $CB'P'M = F'$ dar. Aus der Verbindung von 1) und 2) folgt:

$$S = \frac{b}{a} \cdot S',$$

oder in Proportionsform:

$$3)\qquad S : S' = b : a.$$

Dasselbe Verhältnis muss aber auch zwischen den Flächen F und F' stattfinden, weil mit fortwährender Vergrösserung der Zahl der auf der Abscisse gebildeten Teile schliesslich S mit F und S' mit F' zum Zusammenfallen gebracht werden kann. Bildet man nämlich in der elliptischen Fläche mit der Strecke $\frac{x}{n}$ und den Endordinaten der einzelnen Streifen, worein sie zerlegt wurde, eingeschriebene Rechtecke, so folgt für deren Summe, die s heissen mag, in ähnlicher Weise wie oben das Resultat:

$$4)\qquad s = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{n} (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_n).$$

Die Vergleichung von 1) und 4) giebt:

$$S - s = \frac{b}{a} \cdot \frac{x(\eta_0 - \eta_n)}{n},$$

und dieser Wert kann kleiner als jede beliebige Zahl gemacht werden, wenn man nur n hinreichend gross annimmt. Bei unendlichem Anwachsen der Zahl n fallen also S und s, folglich nach der Ungleichung

$$S > F > s$$

um so mehr S und F zusammen. In gleicher Weise kann unter gleichen Umständen das Zusammenfallen von S' und F' bewiesen werden, und es folgt dann aus Nr. 3):

5) $$F : F' = b : a,$$

d. h. die über irgend einer Abscisse stehende Ellipsenfläche verhält sich zu der über derselben Abscisse befindlichen Fläche des umgeschriebenen Kreises wie die kleine Halbachse zur grossen.

Lässt man den Punkt M nach A rücken, so ergiebt sich, wenn wir die Fläche der ganzen Ellipse mit E bezeichnen,

$$\frac{1}{4} E = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{4} a^2 = \frac{\pi}{4} ab,$$

folglich

6) $$E = \pi ab.$$

Nach § 22 Nr. 13) entsteht hieraus, wenn a_1, b_1 und ω zwei konjugierte Halbmesser nebst ihrem Konjugationswinkel bedeuten,

7) $$E = \pi a_1 b_1 \sin \omega.$$

Mittels dieser Formel kann die Ellipsenfläche aus irgend zwei nach Lage und Grösse gegebenen konjugierten Durchmessern berechnet werden.

Siebentes Kapitel.

Die Hyperbel.

---

§ 25.

Die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Die in der Überschrift enthaltene Gleichung

$$1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

welche durch Multiplikation mit $-a^2b^2$ in

$$2)\qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

umgeformt werden kann, gehört nach § 14 Nr. 12) einer Hyperbel an, deren Hauptachse $2a$ mit der x-Achse und deren Nebenachse $2b$ mit der y-Achse zusammenfällt. So wesentlich sich nun auch diese Kurve in ihrer Gestalt von der im vorigen Kapitel untersuchten Ellipse unterscheidet, so stehen doch beide Linien rücksichtlich der analytischen Entwickelung ihrer Eigenschaften in der innigsten Beziehung. Da nämlich die Gleichung 1) durch blosse Vertauschung von b^2 mit $-b^2$ aus der Gleichung hervorgeht, welche wir der Untersuchung der Ellipse zu Grunde gelegt haben, so befinden wir uns in der günstigen Lage, den grössten Teil der für letztere Kurve angestellten Rechnungen mit Anbringung eines einfachen Zeichenwechsels auf die Hyperbel übertragen zu können. Neu treten allein die auf die Asymptoten bezüglichen Betrachtungen auf.

Um den im § 20 bei der Ellipse benutzten Gang der Untersuchung festzuhalten, wollen wir zunächst die x und y der Gleichung 2) in Polarkoordinaten transformieren, deren Achse mit der Achse der positiven x identisch ist. Daraus entsteht die Polargleichung:

$$3)\qquad r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

Wird hierin mittels der aus § 14 Nr. 15) folgenden Formel

$$b^2 = c^2 - a^2$$

die lineare Excentricität c eingeführt, so ergiebt sich:

$$4) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2 \varphi - a^2}.$$

Die Gleichung 3) zeigt, dass reelle r von endlicher Grösse nur solange möglich sind, als die Differenz

$$b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi$$

einen positiven Wert giebt. Setzen wir nun nach § 14 Nr. 14)

$$\frac{b}{a} = \tan \gamma,$$

wobei γ den von einer Asymptote und der Hauptachse gebildeten spitzen Winkel oder die Hälfte des Asymptotenwinkels bezeichnet, so folgt nach einfacher Umgestaltung, dass für die Hyperbelpunkte die Ungleichung

$$\tan^2 \varphi < \tan^2 \gamma$$

gelten muss. Wir werden so zu der bereits bekannten Eigenschaft zurückgeführt, dass beide Zweige der Hyperbel von den Asymptoten umschlossen werden. Spitze Werte von φ, welche einen der vier unter sich kongruenten Quadranten der Hyperbel in sich fassen, müssen daher zwischen den Grenzen 0 und γ enthalten sein. Aus Nr. 4) ist dann ersichtlich, dass innerhalb dieser Grenzen r gleichzeitig mit φ wächst, dass also die beiden Achsenscheitel die dem Mittelpunkte am nächsten gelegenen Punkte der Hyperbel darstellen. Ein über der Hauptachse als Durchmesser beschriebener Kreis, den wir Hauptkreis nennen wollen, wird in den Scheiteln von der Hyperbel berührt; alle übrigen Hyperbelpunkte liegen ausserhalb des Hauptkreises.

An die Stelle der Beziehungen, welche zwischen den Ordinaten der Ellipse und ihres umgeschriebenen Kreises, oder zwischen ihren Abscissen und denen des eingeschriebenen Kreises stattfinden, treten bei der Hyperbel entsprechende Relationen für ihre Vergleichung mit zwei gleichseitigen Hyperbeln, deren eine die Strecke a, die andere die Länge b zur Halbachse hat. Diese beiden Kurven sind durch die Gleichungen

5) $$x^2 - y^2 = a^2, \qquad x^2 - y^2 = b^2$$

bestimmt; sie können aber nicht wie die beiden Kreise der Ellipse zu einer bequemen Konstruktion von Hyperbelpunkten verwendet werden, weil sie selbst nicht eine wesentlich einfachere Darstellung als alle anderen Hyperbeln zulassen.

An die Stelle der goniometrischen Gleichung

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

deren Analogie mit der Ellipsengleichung zur Auffindung von Ellipsenpunkten gebraucht wurde, tritt hier die Gleichung:

$$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1,$$

wenn wir $\frac{x}{a} = \sec\alpha$ und $\frac{y}{b} = \tan\alpha$ setzen. Durch Konstruktion der Werte $x = a\sec\alpha$ und $y = b\tan\alpha$ sind daher, wenn α einen beliebigen Winkel bedeutet, die zusammengehörigen Koordinaten eines Hyperbelpunktes bestimmt. Die Ausführung dieser Konstruktion können wir um so mehr übergehen, als wir später einfachere Mittel zur Darstellung der Hyperbel kennen lernen werden.

Was ferner die im § 20 Nr. 9) und 10) angewendete Zerlegung der beiden Seiten der Ellipsengleichung in zwei Faktoren ersten Grades betrifft, so kann dieselbe mittels eines einzigen Zeichenwechsels für die Hyperbel brauchbar gemacht werden. Die Gleichungen der beiden Geraden, durch deren Durchschnitt ein Hyperbelpunkt bestimmt wird, lauten nämlich

$$\frac{y}{b_1} = 1 + \frac{x}{a}, \qquad -\frac{y}{b_2} = 1 - \frac{x}{a},$$

wobei wieder die Relation

$$b_1 : b = b : b_2$$

gelten muss. Der Leser wird leicht die einfache Änderung ausfindig machen, welche hiernach an der in Fig. 43 gegebenen Konstruktion anzubringen ist, wenn sie zur Gewinnung von Hyperbelpunkten benutzt werden soll.

Geben wir der Gleichung 1) die Form:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2,$$

so kann davon eine Darstellung der Hyperbel mit Benutzung der Asymptoten abgeleitet werden. Mit Einführung des halben Asymptotenwinkels entsteht nämlich:

$$x^2 = a^2 + y^2 \cot^2 \gamma, \tag{6}$$

wonach das x eines Hyperbelpunktes als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten a und $y \cot \gamma$ zu konstruieren ist. Auch hier wird die Ausführung der Konstruktion keine besondere Schwierigkeit gewähren.

Brennpunkte der Hyperbel. Zur Aufsuchung von Brennpunkten der Hyperbel können fast wörtlich dieselben Schlüsse wiederholt werden, welche bei der gleichen auf die Ellipse bezüglichen Untersuchung zum Ziele führten; nur ist in den Endresultaten b^2 mit $-b^2$ zu vertauschen. Aus der Gleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2,$$

in welcher x und y einen beliebigen Punkt einer Linie zweiten Grades, sowie ξ und η einen Brennpunkt dieser Linie bezeichnen, folgern wir zunächst wie bei der Ellipse, dass Brennpunkte nur in einer der Achsen gelegen sein können. Für Brennpunkte in der x-Achse gelten dann die Gleichungen:

$$\beta = 0, \qquad \xi + \alpha\gamma = 0, \qquad \eta = 0,$$

woraus durch Zusammenstellung mit der Gleichung der Hyperbel die Resultate

$$\gamma = a, \qquad \xi^2 = a^2 + b^2 = c^2 \tag{7}$$

hervorgehen. Dies giebt

$$\xi = \pm c,$$

d. i. die beiden bekannten Brennpunkte der Hyperbel. Für die Konstante α folgt noch aus $\xi + \alpha\gamma = 0$:

$$\alpha = -\frac{\xi}{a} = \mp \varepsilon,$$

wobei ε wie früher die numerische Excentricität bezeichnet. — Brennpunkte in der Ordinatenachse führen zu imaginären Werten; die Hyperbel enthält also keine weiteren Brennpunkte, als die beiden auf der Verlängerung der Hauptachse gelegenen.

Stellt z_1 den Brennstrahl eines Hyperbelpunktes xy für den auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkt und z_2 den andern Brennstrahl desselben Hyperbelpunktes dar, so ergiebt sich aus den berechneten Werten in Übereinstimmung mit den für die Ellipse gefundenen Resultaten:

$$z_1^2 = (a - \varepsilon x)^2, \qquad z_2^2 = (a + \varepsilon x)^2.$$

Beachtet man, dass diese beiden Werte auch in der Form

$$z_1^2 = (\varepsilon x - a)^2, \qquad z_2^2 = (\varepsilon x + a)^2$$

geschrieben werden können, so lässt sich rücksichtlich der in den hieraus hervorgehenden Formeln

$$8) \qquad z_1 = \pm (\varepsilon x - a), \qquad z_2 = \pm (\varepsilon x + a)$$

zur Geltung zu bringenden Vorzeichen mittels der für die Scheitel der Hauptachse geltenden Substitution $x = \pm a$, unter Berücksichtigung des stetigen Verlaufes der Kurve innerhalb eines jeden der beiden Hyperbelzweige leicht die Regel ableiten, dass für positive x das obere, für negative dagegen das untere Zeichen zu verwenden ist. Dieselbe Regel gilt für das Vorzeichen in dem aus Subtraktion der beiden Gleichungen 8) entstehenden Resultate:

$$9) \qquad z_2 - z_1 = \pm 2a,$$

welches zu dem bereits im § 14 aus Fig. 31 abgeleiteten, zur Konstruktion von Hyperbelpunkten brauchbaren Lehrsatze zurückführt.

§ 26.

Die Hyperbel und die Gerade; die Krümmungskreise.

Die auf die gegenseitigen Lagen einer Hyperbel und einer Geraden bezüglichen Untersuchungen, soweit sie nicht die neu auftretenden Eigenschaften der Asymptoten berühren, sind, wenn wir Wiederholung derselben Rechnungen vermeiden wollen, am einfachsten auf die entsprechenden Betrachtungen im § 21 und im § 22 zurückzuführen. Bezeichnen wir daher wie dort die Gleichung der Geraden mit

$$1) \qquad y = Mx + n,$$

während

$$2) \qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung der Hyperbel darstellt, so gilt für die Abscissen der etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte beider Linien die Gleichung:

$$3) \qquad (a^2M^2 - b^2)\,x^2 + 2a^2Mnx + a^2(n^2 + b^2) = 0.$$

Dieselbe ist immer quadratisch, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn

$$a^2M^2 = b^2$$

oder

$$M = \pm \frac{b}{a},$$

d. i. wenn die Gerade mit einer der beiden Asymptoten parallel läuft. Dann bleibt aus Nr. 3) eine Gleichung ersten Grades, und es folgt hieraus der Satz: Jede Parallele zu einer Asymptote schneidet die Hyperbel in einem Punkte.*

In jedem anderen Falle, d. h. sobald die Gerade die Asymptoten schneidet, behält, wie schon bemerkt wurde, die Gleichung 3) ihre quadratische Form; die Gerade und die Hyperbel besitzen also höchstens zwei gemeinschaftliche Punkte. Aus der für die Ellipse geführten Rechnung leiten wir her, dass hierbei die Gerade Sekante oder Tangente darstellt, oder endlich keinen Punkt mit der Hyperbel gemein hat, je nachdem

$$- a^2 b^2 (a^2 M^2 - b^2 - n^2) \gtreqless 0.$$

Die Beachtung des Umstandes, dass der ausserhalb der Parenthese befindliche Faktor einen negativen Wert besitzt, zeigt, dass das Eintreten des ersten, zweiten oder dritten Falles davon abhängig gemacht werden muss, ob die Differenz

$$b^2 + n^2 - a^2 M^2$$

positiv, gleich Null oder negativ ist. Soll die Gerade die Hyperbel in einem Punkte berühren, so muss die Gleichung

$$4) \qquad a^2 M^2 = b^2 + n^2$$

Geltung finden. Führen wir hierin mittels der Relationen

$$M = \tan \alpha, \qquad b^2 = c^2 - a^2$$

den zwischen der Geraden und der x-Achse enthaltenen Winkel α und die lineare Excentricität c ein, so kommen wir auf die Gleichung 5) des § 21 zurück, die genau so wie dort geometrisch gedeutet werden kann. Es folgt das Resultat, dass der Fusspunkt eines von einem Brennpunkte auf die Tangente gefällten Perpendikels oder die Projektion des Brennpunktes auf die Tangente auf der Peripherie des Hauptkreises gelegen ist. Werden endlich mit Anwendung derselben Hilfsmittel die beiden noch übrigen Fälle

---

* In gleicher Weise wie bei den zur Parabelachse parallelen Geraden lässt sich auch hier ableiten, dass die Parallelen zu einer Hyperbelasymptote als Sekanten aufgefasst werden können, bei welchen der eine Durchschnittspunkt in die Unendlichkeit fällt.

untersucht, so ergiebt sich als Seitenstück zu dem früher für die gegenseitigen Lagen einer Geraden und einer Ellipse gefundenen Kriterium der folgende Satz: Eine Gerade, die nicht parallel mit einer Asymptote läuft, kann die Hyperbel in zwei Punkten schneiden, in einem Punkte berühren oder keinen Punkt mit ihr gemein haben; der erste, zweite oder dritte dieser Fälle findet statt, je nachdem die Projektionen der Brennpunkte auf die Gerade ausserhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des Hauptkreises liegen.*

Tangenten der Hyperbel. Zur analytischen Lösung der auf Tangenten bezüglichen Aufgaben dient die obige Gleichung 4), welche zu diesem Zwecke in ganz gleicher Weise wie Nr. 4) im § 21 zu benutzen ist. Für die Gleichung einer Tangente von gegebener Richtung folgt dann nach Analogie von § 21 Nr. 6):

5) $$y = Mx \pm \sqrt{a^2M^2 - b^2}.$$

Die hierin unter dem Wurzelzeichen befindliche Differenz lässt erkennen, dass nicht wie bei der Ellipse nach jeder Richtung hin Tangenten möglich sind, sondern nur unter der Bedingung, dass die Relation

$$M^2 \geqq \frac{b^2}{a^2}$$

stattfindet. Es giebt dies die geometrische Deutung, dass der von einer Tangente und der Hauptachse gebildete spitze Winkel immer zwischen den Grenzen 90^0 und γ enthalten sein muss, wobei γ wie früher den halben Asymptotenwinkel bezeichnet. Berechnen wir die Koordinaten der Berührungspunkte, so zeigt sich, dass die Asymptoten selbst Tangenten für unendlich ferne Punkte der Hyperbel darstellen, d. h. dass sie als äusserste Grenzen der Tangenten auftreten. Die Form der Rechnung bleibt hierbei dieselbe wie bei der Ellipse, und es gelten auch im übrigen rücksichtlich der Lage der Berührungspunkte die dort gefundenen Resultate.

Soll die Aufgabe, eine Tangente an die Hyperbel durch einen Punkt $x_1 y_1$ zu legen, analytisch gelöst werden, so sind zu diesem

* Die zu einer Asymptote parallelen Geraden haben rücksichtlich des Fusspunktes die geometrische Eigenschaft der Sekanten; die Asymptoten selbst fallen unter die Tangenten.

Zwecke die zur Herleitung von § 21 Nr. 7) bis 12) angewendeten Entwickelungen zu wiederholen, wobei nur an b^2 der mehrfach erwähnte Zeichenwechsel angebracht werden muss. Als Gleichung der Tangente im Peripheriepunkte $x_1 y_1$ findet sich dann:

$$6)\qquad \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1,$$

und hieraus für die Richtungskonstante der Tangente der Wert:

$$7)\qquad M = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

während die auf den Achsen abgeschnittenen Strecken m und n die Grössen

$$8)\qquad m = \frac{a^2}{x_1}, \qquad n = -\frac{b^2}{y_1}$$

erhalten. Aus der Vergleichung des für m gefundenen Resultates mit der Gleichung der Berührungssehne im Kreise (§ 10 Nr. 3) folgt u. a., dass die Tangente des Hyperbelpunktes $x_1 y_1$ und die demselben Punkte zugehörige Berührungssehne des Hauptkreises sich in der Hauptachse schneiden. Zu einer einfacheren Konstruktion der Tangente als diejenige sein würde, welche auf diese Bemerkung gegründet werden kann, führt die folgende Betrachtung.

Da die absolute Grösse von $m = \frac{a^2}{x_1}$ für alle Hyperbelpunkte höchstens gleich a sein kann, so muss jede Tangente die Hauptachse zwischen den Scheiteln, also um so mehr auch zwischen den Brennpunkten schneiden, in ähnlicher Weise, wie letzteres bei der Ellipse mit den Normalen stattfand. Bezeichnen wir nun die Entfernungen dieses Durchschnittspunktes von den beiden Brennpunkten mit t_1 und t_2, wobei t_1 dem auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkte zugehören soll, so folgt:

$$t_1 = c - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(\varepsilon x_1 - a),$$

$$t_2 = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(\varepsilon x_1 + a),$$

und hieraus mit Rücksicht auf die im § 25 Nr. 8) gefundenen Werte der Brennstrahlen z_1 und z_2:

$$t_1 = \frac{a z_1}{x_1}, \qquad t_2 = \frac{a z_2}{x_1}.$$

Diese beiden Resultate geben die Proportion:

$$9)\qquad t_1 : t_2 = z_1 : z_2,$$

welche der im § 21 Nr. 16) für die Normale einer Ellipse gefundenen vollständig entspricht. Es entsteht daher auch die entsprechende geometrische Deutung: Die Tangente an einer Hyperbel halbiert den von den Brennstrahlen des Berührungspunktes eingeschlossenen Winkel.

Für einen ausserhalb der Hyperbel gelegenen Punkt $x_1 y_1$ stellt Nr. 6) die Gleichung der Berührungssehne dar.

Normalen der Hyperbel. Die Normale im Hyperbelpunkte $x_1 y_1$ erhält mit Benutzung von Nr. 7) oder auch sofort nach § 21 Nr. 13) die Gleichung:

$$10)\qquad y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Hiernach ergiebt sich für die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der x-Achse in vollständiger Übereinstimmung mit dem bei der Ellipse gefundenen Resultate:

$$11)\qquad \xi = \varepsilon^2 x_1,$$

woraus leicht hergeleitet wird, dass hier dieser Punkt stets ausserhalb der von den beiden Brennpunkten begrenzten Strecke gelegen sein muss. Mit Ausnahme der hierdurch bedingten geringen Abänderungen gelten im übrigen fast wörtlich die auf die Normalen der Ellipse bezüglichen Schlüsse. Für die Länge der Normale findet sich:

$$12)\qquad u^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} z_1 z_2,$$

und die Projektion von u auf einen der Brennstrahlen giebt wieder den halben Parameter.

Krümmungsmittelpunkt und Krümmungshalbmesser der Hyperbel. Aus der Gleichung der Normale werden in ganz gleicher Weise wie im § 23 die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes abgeleitet. Man erhält hierbei, da ein Vorzeichenwechsel im Werte von b^2 ohne Einfluss auf die Resultate 3) und 4) dieses Paragraphen bleibt, diese beiden Grössen ungeändert wieder. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind also wie bei der Ellipse:

$$13)\qquad x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}, \qquad y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

Zum Zwecke der geometrischen Darstellung kann der erste dieser Werte in der Form

$$x = \xi \cdot sec^2 \alpha$$

geschrieben werden, wobei $\xi = \varepsilon^2 x_1$ nach Nr. 11) die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normale und der x-Achse bedeutet und der Winkel α mit Hilfe der Gleichung $sec\, \alpha = \frac{x_1}{a}$ zu konstruieren ist. Nach einer im § 25 gemachten Bemerkung erhält man denselben Winkel auch mittels der Relation: $tan\, \alpha = \frac{y_1}{b}$. Die Ausführung der hieraus folgenden Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes mag dem eigenen Nachdenken des Lesers überlassen bleiben.

Die Ableitung des Krümmungshalbmessers ist ebenfalls in Übereinstimmung mit dem im § 23 eingeschlagenen Verfahren. Man findet zunächst:

$$14) \qquad \varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3}{a^2 b^2},$$

und hieraus wieder mittels des obigen Wertes von u (Länge der Normale):

$$15) \qquad \varrho = \frac{u^3}{p^2},$$

wobei p wie früher den Halbparameter bedeutet, welcher durch Projektion von u auf einen der Brennstrahlen des Punktes $x_1 y_1$ dargestellt werden kann. Hieraus folgt, wie im § 23, dass die in Fig. 36 aus Nr. 13) des § 18 abgeleitete Konstruktion des Krümmungshalbmessers ebenso wie für die Parabel und Ellipse auch für die Hyperbel angewendet werden kann. Diese Konstruktion gilt also für alle Kegelschnitte ohne Unterschied.

§ 27.

Fortsetzung.

Durchmesser der Hyperbel. Wenn wir, um den geometrischen Ort der Sehnenmitten ausfindig zu machen, die Gleichung 3) des vorhergehenden Paragraphen mittels Division durch $a^2 M^2 - b^2$ auf die Form

$$1) \qquad x^2 + 2 \cdot \frac{a^2 M n}{a^2 M^2 - b^2} \cdot x + \frac{a^2 (n^2 + b^2)}{a^2 M^2 - b^2} = 0$$

bringen, so ist dabei vorausgesetzt, dass nicht

$$a^2 M^2 = b^2$$

sein darf. Es ist leicht zu ersehen, dass sich dieser auszuschliessende Fall auf die Asymptoten und die damit parallelen Geraden bezieht, rücksichtlich deren wir bereits zu der Erkenntnis gelangt sind, dass sie nicht Sehnen der Hyperbel bilden können. In jedem anderen Falle findet sich wie bei der Ellipse zu einem Systeme paralleler Sehnen mit der Richtungskonstante M ein geradliniger, durch den Mittelpunkt gehender Durchmesser. Seine Gleichung lautet analog mit § 22 Nr. 3):

$$2) \qquad a^2 My - b^2 x = 0.$$

Wird seine Richtungskonstante mit M' bezeichnet, so entsteht die Relation:

$$3) \qquad MM' = \frac{b^2}{a^2},$$

aus welcher in gleicher Weise wie aus Nr. 4) § 22 hergeleitet wird, dass auch die Hyperbel die Eigenschaften konjugierter Durchmesser besitzt, welche ebenso wie dort mit den Supplementarsehnen im Zusammenhange stehen. Charakteristisch für die Hyperbel sind dabei die folgenden Eigentümlichkeiten.

Sind α und β die in der Drehrichtung der Polarwinkel gemessenen Winkel zwischen der Hauptachse und zwei konjugierten Durchmessern, so folgt aus Nr. 3):

$$4) \qquad \tan\alpha \,.\, \tan\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dieses Produkt ist stets positiv, beide Winkeltangenten haben also gleiche Vorzeichen, wonach beide Durchmesser in denselben Quadranten gelegen sein müssen. Da ferner durch die Asymptoten der Fall

$$\tan\alpha = \tan\beta = \pm \frac{b}{a}$$

ausgeschlossen ist, so muss der absolute Wert einer dieser beiden Winkeltangenten grösser, der andere kleiner als $\frac{b}{a}$ sein, d. h. der eine Durchmesser liegt zwischen Asymptote und Hauptachse, der andere zwischen Asymptote und Nebenachse. Nach der Polargleichung 3) im § 25 wird daher nur einer der beiden Durchmesser die Hyperbel schneiden, so dass zwischen ihnen ein gleicher Gegensatz wie zwischen der Haupt- und Nebenachse stattfindet,

welche selbst einen speciellen Fall konjugierter Durchmesser bilden. Noch ist zu bemerken, dass die beiden Achsen ebenso wie in der Ellipse das einzige Paar konjugierter Durchmesser sind, welches einen rechten Winkel einschliesst, da das Produkt $\tan\alpha \,.\, \tan\beta$ bei Ausschliessung des Falles, wo es die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt, nie gleich -1 sein kann. Nach dieser Bemerkung zeigt sich die zur Auffindung der Achsen einer gegebenen Ellipse dienende Konstruktion auch für die Hyperbel brauchbar.

Wir gehen dazu über, die Gleichung der Hyperbel für ein schiefwinkliges Koordinatensystem aufzustellen, dessen Achsen ein Paar konjugierter Durchmesser bilden; α sei der Winkel, welchen die Hauptachse mit dem die Hyperbel schneidenden Durchmesser einschliesst, β der Winkel zwischen der Hauptachse und dem andern Durchmesser. Dann ist, wenn wir, um uns von den Vorzeichen unabhängig zu halten, die Quadrate von $\tan\alpha$ und $\tan\beta$ bilden,

$$\tan^2\alpha < \frac{b^2}{a^2}, \qquad \tan^2\beta > \frac{b^2}{a^2},$$

folglich sind die Differenzen

$$b^2 \cos^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha, \qquad a^2 \sin^2\beta - b^2 \cos^2\beta$$

beide positiv. Als Gleichung der Hyperbel ergiebt sich durch dieselbe Rechnung, welche im § 22 zu gleichem Zwecke benutzt wurde:

$$\frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}\cdot x^2 - \frac{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}{a^2b^2}\cdot y^2$$
$$- 2\cdot\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta - b^2\cos\alpha\cos\beta}{a^2b^2}\cdot xy = 1.$$

Der zu $2xy$ gehörige Faktor ist nach Nr. 4) gleich Null. Mit Einführung der Abkürzungen

$$5)\qquad \begin{cases} a_1^{\,2} = \dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}, \\ b_1^{\,2} = \dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta} \end{cases}$$

entsteht die Gleichung:

$$6)\qquad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Infolge der oben gemachten Bemerkung über das Vorzeichen der Differenzen, welche sich in den Nennern der Werte von a_1^2 und b_1^2 befinden, sind hierbei a_1 und b_1 reelle Grössen. Aus Nr. 6), sowie auch aus der Polargleichung der Hyperbel zeigt sich, dass a_1 die Hälfte des die Hyperbel schneidenden Durchmessers darstellt, wenn wir uns denselben in den beiden mit der Hyperbel gebildeten Durchschnittspunkten begrenzt denken; b_1 kann nach einer auf Vergleichung mit der Ellipse gestützten Analogie als Hälfte des andern Durchmessers aufgefasst und auf demselben in einer gleichen Weise aufgetragen werden, wie wir dies früher mit der Grösse b auf der Nebenachse gethan haben.

Die Übereinstimmung der Form, welche sich in der auf zwei konjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung 6) der Hyperbel und der für die Achsen geltenden Hauptgleichung darlegt, berechtigt wieder, wie dies früher schon bei Parabel und Ellipse geschehen, zu dem Schlusse, dass die der Gleichungsform entnommenen Resultate auch auf das neue System übertragen werden können, insoweit sie nämlich von der rechtwinkligen Lage der Koordinatenachsen unabhängig sind. Wir sehen davon ab, diejenigen Beziehungen zu wiederholen, die sich in gleicher Weise bei der Ellipse vorgefunden haben, und beschränken uns darauf, die Gleichungen der Asymptoten im neuen Systeme zu ermitteln.

Wenden wir dieselben Folgerungen an, welche im § 14 unter III bei Ableitung von Nr. 13) zu dem Begriffe der Asymptoten und deren Gleichungen hinführten, so ergiebt sich aus Nr. 6), dass eine dadurch repräsentierte Kurve zwei geradlinige Asymptoten besitzt, welche in der Gleichung

$$7) \qquad y = \pm \frac{b_1}{a_1} x$$

zusammengefasst werden können. Der möglicherweise entstehende Zweifel, ob hierin wirklich die bereits bekannten geraden Linien ausgedrückt sind, kann am vollständigsten beseitigt werden, wenn wir die Gleichungen der früheren Asymptoten, welche beide in der Formel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$$

enthalten sind, für unser jetziges Koordinatensystem transformieren. Mittels der bekannten Transformationsformeln entsteht dann:

$$(x \sin\alpha + y \sin\beta)^2 = \frac{b^2}{a^2}(x \cos\alpha + y \cos\beta)^2,$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion:

$$(a^2 \sin^2\beta - b^2 \cos^2\beta)\, y^2 - (b^2 \cos^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha)\, x^2$$
$$+ 2\,(a^2 \sin\alpha \sin\beta - b^2 \cos\alpha \cos\beta)\, xy = 0.$$

Das letzte Glied linker Hand ist nach Nr. 4) gleich Null; es bleibt daher:

$$y^2 = \frac{b^2 \cos^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha}{a^2 \sin^2\beta - b^2 \cos^2\beta} \cdot x^2,$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln 5):

$$y^2 = \frac{b_1{}^2}{a_1{}^2}\, x^2,$$

wodurch wir nach Ausziehung der Quadratwurzel auf Nr. 7) zurückkommen. Die Gleichungsform der Asymptoten ist also wie die der Hyperbel selbst immer dieselbe, welches Paar konjugierter Durchmesser auch die Stelle der Koordinatenachsen vertreten mag. Hiernach kann die auf diese Form gegründete Konstruktion der Asymptoten leicht verallgemeinert werden. Legt man nämlich zu zwei konjugierten Durchmessern, deren vom Mittelpunkte aus gemessene Hälften die Längen a_1 und b_1 besitzen, durch ihre Endpunkte Parallelen, so sind die Asymptoten Diagonalen eines jeden auf diese Weise gebildeten Parallelogrammes. Es liegt hierin zugleich ein einfaches Mittel, aus zwei nach Lage und Grösse gegebenen konjugierten Durchmessern die Lage der Hyperbelachsen durch Konstruktion herzuleiten, insofern durch die Haupt- und Nebenachse die von den Asymptoten gebildeten Winkel halbiert werden.

Die Beziehungen, welche nach § 22 Nr. 15) und 16) zwischen den konjugierten Durchmessern und den beiden Achsen einer Ellipse stattfanden, wiederholen sich bei der Hyperbel in fast ungeänderter Weise. Aus den Gleichungen 5) folgt:

$$8)\quad a_1{}^2 b_1{}^2 = \frac{a^4 b^4}{(b^2 \cos^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha)\,(a^2 \sin^2\beta - b^2 \cos^2\beta)}.$$

Das Produkt im Nenner ist identisch mit

$$a^2 b^2 \sin^2(\beta - \alpha) - (b^2 \cos\alpha \cos\beta - a^2 \sin\alpha \sin\beta)^2.$$

Der Subtrahend verschwindet nach 4); daher folgt aus 8), wenn man den Konjugationswinkel $\beta - \alpha$ mit ω bezeichnet:

9) $(b^2 \cos^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha)(a^2 \sin^2\beta - b^2 \cos^2\beta) = a^2 b^2 \sin^2\omega.$

Setzt man dies in 8) ein, so erhält man:

10) $$a_1 b_1 \sin\omega = ab.$$

Ferner erhält man aus 5) durch Subtraktion unter Berücksichtigung von 9):

11) $$a_1^2 - b_1^2 = \frac{1}{\sin^2\omega}[a^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - b^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)].$$

Aus 4) ergiebt sich, wenn der Klammerinhalt mit M bezeichnet wird:

$$M = a^2(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - b^2(\cos\alpha + \cos\beta)^2$$
$$= a^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - b^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2.$$

Hieraus folgt nach bekannten goniometrischen Beziehungen:

$$M = 4\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\,[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)]$$
$$= 4\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\,[a^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)].$$

Ersetzt man $\cos^2\frac{1}{2}\omega$ durch $1 - \sin^2\frac{1}{2}\omega$, so erhält man

$$a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) - b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) = (a^2 - b^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,$$

daher ist

$$M = (a^2 - b^2)\sin^2\omega.$$

Hieraus und aus 11) folgt schliesslich

12) $$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die Längen zweier konjugierter Durchmesser gleichzeitig wachsen, während dabei nach 10) die Grösse des Konjugationswinkels abnimmt. Aus der Polargleichung ist ersichtlich, dass bei diesem Anwachsen der Durchmesser beide den Asymptoten immer näher rücken, bis sie schliesslich in den Asymptoten zusammenfallen. Konjugierte Durchmesser von gleicher Länge sind nur in der gleichseitigen Hyperbel möglich, und zwar gilt dort diese Gleichheit für jedes zusammengehörige Paar.

Mittels der Gleichungen 10) und 12) können die Längen der Achsen gefunden werden, wenn a_1, b_1 und ω gegeben sind; nur lässt sich dabei nicht dieselbe bequeme Rechnung anwenden, welche zu den Formeln 19) im § 22 hinführte. Ein einfacheres Mittel, aus zwei konjugierten Durchmessern die Grösse der Hauptachse

und Nebenachse konstruktiv herzuleiten, werden uns im folgenden Paragraphen die Asymptoten liefern.

§ 28.

Die Asymptoten als Koordinatenachsen.

Eine besonders einfache Gleichungsform erlangt die Hyperbel, wenn man ihre beiden Asymptoten zu Koordinatenachsen nimmt. Nach dem, was wir früher über die Grösse des Asymptotenwinkels kennen gelernt haben, kann dieses Koordinatensystem nur für eine gleichseitige Hyperbel rechtwinklig sein.

Bezeichnen wir wie früher die Hälfte des Asymptotenwinkels mit γ, wobei die Relation

$$1)\qquad \tan\gamma = \frac{b}{a}$$

Geltung hat, so mag über die beiden Koordinatenachsen so verfügt werden, dass die positive Seite der y-Achse unter dem Winkel γ und dieselbe Seite der x-Achse unter dem Winkel $(-\gamma)$ gegen die Hauptachse geneigt ist, wobei wir voraussetzen, dass positive Winkel in der früher für die Anomalien festgestellten Drehrichtung gemessen werden. Soll nun die neue Gleichung der Hyperbel durch Transformation der Koordinaten aus der auf die Achsen bezogenen Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

hergeleitet werden, so ist durch die angegebenen Bestimmungen derjenige Transformationsfall getroffen, für welchen die Formeln 5) im § 4 aufgestellt wurden. Beim Übergange zum neuen Systeme ist also

$$(y + x)\cos\gamma \text{ für } x, \qquad (y - x)\sin\gamma \text{ für } y$$

zu setzen. Dann entsteht aus

$$\frac{(y + x)^2 \cos^2\gamma}{a^2} - \frac{(y - x)^2 \sin^2\gamma}{b^2} = 1$$

nach Entwickelung der Quadrate und besserer Anordnung und Vereinigung der Glieder:

$$\frac{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}{a^2b^2}\cdot(x^2 + y^2) + 2\cdot\frac{b^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma}{a^2b^2}\cdot xy = 1.$$

Mittels der aus 1) folgenden Relation

$$b^2 \cos^2 \gamma = a^2 \sin^2 \gamma$$

erlangt diese letzte Gleichung die einfache Form:

$$\frac{4\, xy \cos^2 \gamma}{a^2} = 1,$$

oder auch:

$$xy = \frac{a^2 (1 + \tan^2 \gamma)}{4},$$

und mit Einsetzung des obigen Wertes von $\tan \gamma$:

$$2) \qquad xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Die auf die Asymptoten als Achsen bezogenen Koordinaten eines Hyperbelpunktes besitzen hiernach ein konstantes Produkt, nämlich:

$$\frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

welches den Namen Potenz der Hyperbel führt. In dieser Eigenschaft ist hauptsächlich das wesentliche Merkmal der Asymptoten begründet, indem daraus folgt, dass, wenn eine Koordinate wächst, die andere abnehmen muss, und dass dabei die eine dieser Längen immer so gross genommen werden kann, dass die andere kleiner wird, als jede angebbare Grösse, d. h. dass die Hyperbel den Asymptoten beliebig nahe rücken kann, ohne sie doch je vollständig zu erreichen.

Mittels der Gleichung 2) findet die Lösung der im vorigen Paragraphen besprochenen Aufgabe, aus Lage und Grösse zweier konjugierten Durchmesser die Lage und Grösse der Achsen abzuleiten, ihren Abschluss. Sobald nämlich die Asymptoten und die Achsen in der früher angegebenen Weise ihrer Lage nach bestimmt worden sind, hat man nur noch die auf die Asymptoten bezogenen Koordinaten eines Endpunktes des die Hyperbel schneidenden Durchmessers zu konstruieren, um dann mit Hilfe der aus 2) folgenden Gleichung

$$c = 2\sqrt{xy},$$

welche eine einfache geometrische Darstellung zulässt, die lineare Excentricität und somit auch die Lage der Brennpunkte zu ermitteln. Aus den Asymptoten und Brennpunkten kann aber nach früheren Sätzen leicht die Länge der Achsen hergeleitet werden.

Sind x, y und x_1, y_1 die Koordinaten zweier auf die Asymptoten bezogenen Hyperbelpunkte, so gelten nach Nr. 2) die Gleichungen:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}, \qquad x_1 y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

folglich ist auch

$$xy = x_1 y_1.$$

Hieraus folgt die Proportion:

$$y_1 : y = x : x_1,$$

der man ohne Schwierigkeit die Mittel entnehmen wird, beliebig viele Punkte einer Hyperbel konstruktiv darzustellen, sobald ein Peripheriepunkt nebst den Asymptoten gegeben ist. Zu einer noch einfacheren Lösung dieser Aufgabe führt die folgende Betrachtung.

Schreiben wir die Gleichung 2) in der Form

$$3) \qquad xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

und bezeichnen eine Gerade, welche beide Asymptoten ausserhalb des Mittelpunktes schneidet, mit

$$4) \qquad \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

so findet sich durch Eliminierung von y für die Abscissen der etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte der Geraden und der Hyperbel nach einfacher Umformung die Gleichung:

$$5) \qquad x^2 - mx + \frac{mc^2}{4n} = 0;$$

m und n stellen hierbei die von der Geraden auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken dar. Im Falle, dass die Gerade die Hyperbel schneidet, folgt hieraus für den Mittelpunkt xy der von ihr gebildeten Sehne:

$$x = \tfrac{1}{2} m,$$

und wenn man diesen Wert in Nr. 4) einsetzt:

$$y = \tfrac{1}{2} n.$$

Vergleicht man diese Resultate mit den bekannten Formeln für die Koordinaten des Mittelpunktes einer geradlinigen Strecke, so ergiebt sich sofort, dass der Halbierungspunkt der Sehne zugleich in der Mitte zwischen den beiden Punkten gelegen ist, worin sie selbst oder ihre Verlängerung die Asymptoten schneidet. Eine leicht

nachzuweisende Folge hiervon ist, dass der Abstand zwischen dem einen Endpunkte der Sehne und ihrem Durchschnitte mit der einen Asymptote der Entfernung ihres anderen Endpunktes von dem Punkte, worin sie die andere Asymptote schneidet, gleich sein muss.

Die soeben gefundene Eigenschaft der Hyperbel gewährt nun ein besonders einfaches Mittel, einzelne Punkte dieser Kurve zu konstruieren, sobald ein Peripheriepunkt nebst den Asymptoten gegeben ist. Mit Benutzung dieser Eigenschaft kann nämlich auf jeder Geraden, welche man durch den gegebenen Punkt so legt, dass sie beide Asymptoten schneidet, ein zweiter Hyperbelpunkt aufgetragen werden, der nachher, wenn man das Anhäufen zu vieler in einem Punkte sich schneidenden Geraden vermeiden will, als neuer Ausgangspunkt der Konstruktion verwendbar bleibt. — In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn mittels einer Asymptote und dreier Peripheriepunkte die andere Asymptote gefunden werden soll. Mit Hilfe der drei Sehnen, welche durch die drei Hyperbelpunkte gelegt werden können, erlangt man drei sich gegenseitig kontrolierende Punkte der zu konstruierenden Asymptote.

Sucht man die Bedingung, unter welcher die obige Gleichung 5) zwei gleiche reelle Wurzeln giebt, so erhält man als Kennzeichen für den Fall, in welchem die durch Nr. 4) repräsentierte Gerade zur Tangente wird, die Relation:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{mc^2}{4n},$$

oder nach gehöriger Hebung:

$$6) \qquad mn = c^2.$$

Wird mittels dieser Bedingungsgleichung die Strecke n aus Nr. 5) eliminiert, so entsteht für die Abscisse des Berührungspunktes, die wir mit x_1 bezeichnen wollen, das Resultat:

$$x_1^2 - mx_1 + \frac{m^2}{4} = 0,$$

und hieraus folgt:

$$7) \qquad x_1 = \tfrac{1}{2} m.$$

Aus 4) ergiebt sich dann für die zugehörige Ordinate:

$$8) \qquad y_1 = \tfrac{1}{2} n.$$

Die Werte 7) und 8) lassen erkennen, dass der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente in der Mitte zwischen den beiden Punkten gelegen ist, in welchen die Tangente von den Asymptoten geschnitten wird. Es ist dies wieder die oben für die Sehnen gefundene Eigenschaft, ausgedehnt auf den Fall, wo die beiden Durchschnitte der Geraden und der Hyperbel in einen übergehen und die Sehne zur Tangente wird.

Sind die auf die Asymptoten bezogenen Koordinaten x_1 und y_1 eines Hyperbelpunktes gegeben, so erhalten die von der Tangente dieses Punktes auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken nach 7) und 8) die Längen:

$$m = 2x_1, \qquad n = 2y_1,$$

von denen jede einzelne ausreicht, um damit die Tangente zu konstruieren. Werden endlich diese Werte in Nr. 4) eingesetzt, so erlangt die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbeltangente im Punkte $x_1 y_1$ die Gestalt:

$$9) \qquad \frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1,$$

oder wenn man mit der für x_1 und y_1 geltenden Gleichung

$$2x_1 y_1 = \tfrac{1}{2} c^2$$

multipliziert:

$$10) \qquad y_1 x + x_1 y = \tfrac{1}{2} c^2.$$

Die letzte Gleichung gehört nicht allein in Beziehung auf x und y, sondern auch für x_1 und y_1 dem ersten Grade an und gestattet infolge ihrer symmetrischen Form die Vertauschung der Punkte xy und $x_1 y_1$. Diese Bemerkungen reichen hin, um daraus mit Hilfe einer schon mehrfach angewendeten Schlussfolgerung das Resultat herzuleiten, dass für einen ausserhalb der Hyperbel gelegenen Punkt $x_1 y_1$ Nr. 10) die Gleichung der Berührungssehne darstellt.

§ 29.

Die Quadratur der Hyperbel.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Gleichung der Hyperbel kann auch benutzt werden, um daraus den Inhalt hyperbolisch begrenzter Flächen abzuleiten. Wir beschränken uns auf Berechnung eines Flächenstreifens, welcher von einer Asymptote,

zwei zur andern Asymptote parallelen Ordinaten und dem zwischen diesen Ordinaten gelegenen Hyperbelbogen begrenzt ist. Andere Flächenteile, in deren Begrenzung ein Hyperbelbogen auftritt, sind durch geometrische Zerlegung hierauf zurückzuführen.

Zur Vorbereitung entwickeln wir den Flächeninhalt eines Parallelogrammes, welches von den Asymptoten und den hierzu parallelen Koordinaten eines Hyperbelpunktes begrenzt ist, d. i. den Wert von $xy \sin\alpha$, worin x und y den Hyperbelpunkt und α den hierbei als Koordinatenwinkel auftretenden Asymptotenwinkel bezeichnet. — Hat γ die im vorigen Paragraphen unter 1) angewendete Bedeutung, so folgt aus der Gleichung

$$\alpha = 2\gamma$$

in Verbindung mit der goniometrischen Relation

$$\sin 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1 + \tan^2\gamma}$$

bei Einführung des Wertes von $\tan\gamma$:

$$\sin\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

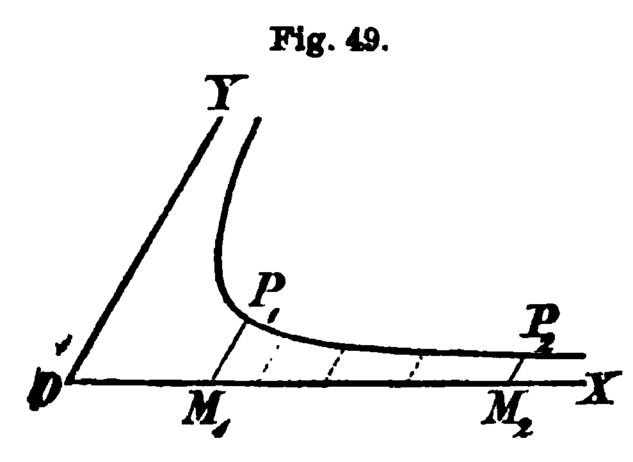
Wird diese Gleichung mit Nr. 2) des vorhergehenden Paragraphen durch Multiplikation verbunden, so ergiebt sich:

$$1)\qquad xy \sin\alpha = \tfrac{1}{2} ab$$

für den gesuchten Flächeninhalt.

Mit diesem Inhalte soll ein Flächenstreifen der in Rede stehenden Art, wie $P_1M_1M_2P_2$ in Fig. 49, in Vergleichung gestellt werden. Zunächst lässt sich die Fläche dieses Streifens in zwei Grenzen einschliessen, indem man zur oberen Grenze ein Parallelogramm mit den anstossenden Seiten P_1M_1 und M_1M_2, zur unteren ein Parallelogramm mit den Seiten M_1M_2 und M_2P_2 nimmt. Wird die gesuchte Fläche mit F bezeichnet, und sind x_1, y_1 die Koordinaten des Punktes P_1, sowie x_2 und y_2 die von P_2, so erhält man hieraus:

Fig. 49.



$$y_1(x_2 - x_1)\sin\alpha > F > y_2(x_2 - x_1)\sin\alpha.$$

Werden nun diese Ungleichungen durch die aus 1) folgenden Gleichungen

$$x_1 y_1 \sin\alpha = \tfrac{1}{2} ab = x_2 y_2 \sin\alpha$$

dividiert, so wird hierdurch das Verhältnis zwischen der Fläche F und der in 1) enthaltenen konstanten Fläche $\frac{1}{2} ab$, welches mit φ bezeichnet werden soll, von dem Verhältnisse zwischen der End- und Anfangsabscisse des Streifens, welches ξ heissen mag, abhängig gemacht. Mit Anwendung der Bezeichnungen

2) $$\varphi = \frac{2F}{ab}, \qquad \xi = \frac{x_2}{x_1}$$

erhält man nämlich aus dieser Division:

$$\xi - 1 > \varphi > 1 - \frac{1}{\xi},$$

und hieraus wieder, wenn man auf ξ reduziert:

3) $$\frac{1}{1-\varphi} > \xi > 1 + \varphi.$$

Die in Nr. 3) enthaltenen Grenzen für den Quotienten ξ in seiner Abhängigkeit vom Quotienten φ lassen sich enger ziehen, wenn man zwischen die Anfangs- und Endordinate des zu berechnenden Streifens $n-1$ Ordinaten so einschaltet, dass dadurch seine Fläche in n Streifen vom gleichen Flächeninhalte $\frac{F}{n}$ zerfällt.* Die für diese einzelnen Streifen geltenden Verhältnisse der End- und Anfangsabscissen, d. h. die darin an die Stelle von ξ tretenden Werte, sollen in der Reihenfolge der Streifen von M_1 aus nach M_2 hin mit ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \ldots \xi_n$ bezeichnet werden, so dass, da bei Aufstellung dieser Verhältnisse sämtliche zwischen x_1 und x_2 eingeschalteten Abscissen sowohl im Zähler als im Nenner vorkommen, bei Multiplikation aller dieser Werte das Resultat

4) $$\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdots \xi_n = \frac{x_2}{x_1} = \xi$$

zum Vorschein kommt. Wird nun auf jeden der n Streifen die obige Einschliessung in Grenzen angewendet, so tritt hierbei $\frac{F}{n}$ an die Stelle von F, also auch $\frac{\varphi}{n}$ an die Stelle von φ, und es er-

* Die Art der Ausführung dieser Einschaltung ergiebt sich aus den Resultaten der vorliegenden Untersuchung.

giebt sich für irgend eines der besprochenen Abscissenverhältnisse, welches ξ_m heissen möge, aus Nr. 3) mit einer einfachen Formänderung im ersten Teile dieser Ungleichung:

$$\left(1-\frac{\varphi}{n}\right)^{-1} > \xi_m > 1+\frac{\varphi}{n}\cdot$$

Werden nachher alle diese Abscissenverhältnisse mit einander multipliziert, so erhält man mit Rücksicht auf Nr. 4):

$$\left(1-\frac{\varphi}{n}\right)^{-n} > \xi > \left(1+\frac{\varphi}{n}\right)^{n},$$

oder auch, wenn man noch mit $\frac{1}{\varphi}$ potenziert und

$$\frac{n}{\varphi}=\omega$$

setzt, wobei ω eine gleichzeitig mit n wachsende und gleichzeitig mit n unendlich werdende Grösse bezeichnet:

$$5)\qquad \left(1-\frac{1}{\omega}\right)^{-\omega} > \xi^{\frac{1}{\varphi}} > \left(1+\frac{1}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Man gelangt jetzt zu einer Gleichung zwischen dem Abscissenverhältnisse ξ und dem Flächenverhältnisse φ, wenn man die Anzahl der einzelnen Streifen, d. i. die Zahl n bis in das Unendliche wachsen lässt, womit also ω ebenfalls einen unendlichen Wert erlangt. Nach einem bekannten algebraischen Satze* konvergieren

* Aus dem in der Anmerkung auf S. 114 für $a>b$ und ein rationales $m>1$ bewiesenen Resultate

$$ma^{m-1} > \frac{a^m-b^m}{a-b} > mb^{m-1},$$

welches durch Einschliessung in Grenzen auch auf irrationale, die Einheit übersteigende Werte von m ausgedehnt werden kann, folgt:

$$ma^{m-1}(a-b) > a^m-b^m > mb^{m-1}(a-b).$$

Wird hierin $a=\frac{k+1}{k}$, $b=1$ und $m=\frac{k}{n}$ gesetzt, wobei $k>n>1$ sein soll, so folgt:

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{k}{n}}-1>\frac{1}{n},\quad \text{also auch:}\quad \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}.$$

In gleicher Weise erhält man unter Beibehaltung der für m gemachten Substitution, wenn man $a=1$, $b=\frac{k-1}{k}$ setzt:

hierbei die beiden in Nr. 5) enthaltenen Grenzen gegen einen gemeinschaftlichen Grenzwert, nämlich gegen die irrationale Zahl

$$e = 2{,}7182818\ldots,$$

d. i. die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Man erhält folglich aus Nr. 5):

$$e = \xi^{\frac{1}{\varphi}},$$

und bei Anwendung von Logarithmen eines beliebigen Systems:

$$\varphi = \frac{\log \xi}{\log e},$$

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^k > \left(\frac{n-1}{n}\right)^n, \quad \text{oder auch:} \quad \left(\frac{k}{k-1}\right)^k < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n.$$

Die gefundenen Resultate zeigen, dass, wenn man n zwischen den Grenzen 1 und ∞ beliebig wachsen lässt, der Wert der Funktion $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ fortwährend zunimmt, während dagegen $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ fortwährend abnehmen muss. Da jedoch für jedes endliche n die letztere dieser Funktionen immer grösser ist als der entsprechende Wert der ersteren, so kann weder jene verschwindend klein werden, noch diese in das Unendliche wachsen. Schliesslich müssen beide zusammenfallen, weil für ihre Differenz aus der oben zu Grunde gelegten Ungleichung

$$m a^{m-1}(a-b) > a^m - b^m$$

sich als obere Grenze $\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ ergiebt, welcher Wert bei unendlich werdendem n, insofern der Faktor $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ endlich bleibt, gegen die Null konvergiert. Beide Funktionen haben folglich einen gemeinschaftlichen Grenzwert, für welchen, wenn er mit e bezeichnet wird, Näherungsresultate aus der Ungleichung

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

abgeleitet werden können. — Beachtet man nun, dass der Ausdruck $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ auch in der Form $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ geschrieben werden kann, so lässt sich, wenn man ω an die Stelle eines unendlich werdenden n setzt, das Resultat der vorhergehenden Betrachtungen in der Gleichung

$$\lim\left\{\left(1+\frac{1}{\omega}\right)^\omega\right\} = e$$

zusammenfassen, wobei ω ebensowohl einen positiven als einen negativen Wert haben kann.

oder nach Einsetzung der Werte von φ und ξ aus Nr. 2) und Reduktion auf F:

$$6)\qquad F = \frac{ab}{2\, log\, e}\, log\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Bei Anwendung gemeiner Logarithmen entsteht hieraus in Zahlen:

$$7)\quad F = \frac{ab}{2\,.\,0{,}4342945}\, log\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 1{,}1512925\,.\,ab\,.\,log\left(\frac{x_2}{x_1}\right);$$

ferner erhält man bei Benutzung natürlicher Logarithmen, wenn man dieselben durch Vorsetzen des Buchstabens l vor den Logarithmanden bezeichnet, den einfacheren Ausdruck:

$$8)\qquad F = \frac{1}{2}\, ab\,.\, l\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Da der Flächeninhalt in der Formel 6), sowie in den davon abgeleiteten Gleichungen 7) und 8) ausser von den darin enthaltenen konstanten Werten nur von dem Abscissenverhältnisse $\frac{x_2}{x_1}$ abhängig gemacht ist, so folgt, dass bei einer gegebenen Hyperbel Flächenstreifen der betrachteten Art gleichen Inhalt besitzen müssen, wenn dieses Verhältnis in denselben einen gleichen Wert hat. Hieraus ergiebt sich weiter, dass die in Fig. 49 angewendete Zerlegung der Streifenfläche in Teile gleichen Inhaltes lediglich darauf hinauskommt, den aufeinander folgenden Abscissen Werte zu geben, welche eine geometrische Progression bilden.

Zum Schluss ist noch zu bemerken, dass mit Rücksicht auf die aus der Gleichung 2) im § 28 hervorgehende, umgekehrte Proportionalität zwischen x und y bei allen in diesem Paragraphen angestellten Untersuchungen an die Stelle des Abscissenverhältnisses $\frac{x_2}{x_1}$ auch das Ordinatenverhältnis $\frac{y_1}{y_2}$ gesetzt werden kann.

Achtes Kapitel.

Die Linien zweiten Grades.

---

§ 30.

Diskussion der allgemeinen Gleichung der Linien zweiten Grades.

Nachdem wir in den vorhergehenden Kapiteln einige Linien näher kennen gelernt haben, deren Gleichungen sämtlich dem zweiten Grade angehörten, bleibt noch die Frage zu entscheiden, ob ausser ihnen andere Linien derselben Ordnung existieren oder ob mit Untersuchung der Kegelschnitte der zweite Grad völlig erschöpft ist. Wir haben zu diesem Zwecke die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen den Koordinaten x und y zu betrachten, wofür bereits früher (§ 9 Nr. 7) die Form

$$1) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

festgestellt wurde, und zu untersuchen, welche verschiedenen Gebilde dadurch repräsentiert werden können.

Wir wollen dabei zunächst voraussetzen, dass die Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben ist.

Geht man entweder von der Scheitelgleichung der Kegelschnitte (§ 13), oder von der Gleichung der Ellipse und der Hyperbel in Bezug auf die Hauptachsen durch die allgemeinen Transformationsformeln für rechtwinklige Koordinaten auf ein rechtwinkliges System mit willkürlichem Anfangspunkte und willkürlicher Richtung der Abscissenachse über, so enthält die neue Gleichung alle Glieder der allgemeinen Gleichung; insbesondere enthält sie das Glied mit dem Produkte xy, das weder in den Scheitelgleichungen noch in den Hauptachsengleichungen vorkommt. Das Auftreten dieses Gliedes ist nicht durch die Veränderung des Nullpunktes, sondern nur durch die Veränderung der Achsenrichtung

verursacht, denn wenn man nur eine Verschiebung der Achsen vornimmt, so hat man x und y durch Ausdrücke von der Form $x + a$, $y + b$ zu ersetzen; bei dieser Transformation kommt kein Glied mit xy zu stande.

Wir suchen daher zunächst durch Drehung des Koordinatensystems zu einer neuen Gleichung zu gelangen, in welcher das mit dem Koordinatenprodukte xy multiplizierte Glied fehlt.

Bildet die neue Abscissenachse mit der alten den Winkel φ, und werden im neuen Systeme die Koordinaten mit ξ und η bezeichnet, so hat man zu ersetzen:

$$2)\qquad \begin{cases} x \text{ durch } \cos\varphi\,.\,\xi - \sin\varphi\,.\,\eta, \\ y \quad \text{„} \quad \sin\varphi\,.\,\xi + \cos\varphi\,.\,\eta, \end{cases}$$

mithin

$$3)\qquad \begin{cases} x^2 \text{ durch } \cos^2\varphi\,.\,\xi^2 + \sin^2\varphi\,.\,\eta^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi\,.\,\xi\eta, \\ y^2 \quad \text{„} \quad \sin^2\varphi\,.\,\xi^2 + \cos^2\varphi\,.\,\eta^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi\,.\,\xi\eta, \\ xy \quad \text{„} \quad \sin\varphi\cos\varphi\,.\,\xi^2 - \sin\varphi\cos\varphi\,.\,\eta^2 + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,.\,\xi\eta. \end{cases}$$

Durch diese Substitutionen erhält man eine neue Gleichung von der Form

$$A'\xi^2 + B'\eta^2 + 2C'\xi\eta + 2D'\xi + 2E'\eta + F = 0,$$

wobei

$$4)\qquad \begin{cases} A' = A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi, \\ B' = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - 2C\sin\varphi\cos\varphi, \\ C' = -(A - B)\sin\varphi\cos\varphi + C(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \\ D' = D\cos\varphi + E\sin\varphi, \\ E' = -D\sin\varphi + E\cos\varphi. \end{cases}$$

Der Koeffizient C' verschwindet, wenn man den Drehungswinkel φ so wählt, dass

$$C\cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}(A - B)\sin 2\varphi,$$

woraus folgt

$$\tan 2\varphi = \frac{2C}{A - B}.$$

Dieser Wert wird nur dann unbestimmt, wenn $A = B = C = 0$; in diesem Falle hört die gegebene Gleichung auf, quadratisch zu sein; daher kommt derselbe nicht in Betracht.

Für $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ ergeben sich aus $\tan 2\varphi$ die Werte:

$$\sin 2\varphi = \frac{2C}{\sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}}, \qquad \cos 2\varphi = \frac{A - B}{\sqrt{(A - B)^2 + 4C^2}}.$$

Den Radikand kann man schreiben:

$$(A+B)^2 + 4\,(C^2 - AB);$$

setzt man zur Abkürzung

$$C^2 - AB = \Delta,$$

so erhält man:

$$5)\quad \sin 2\varphi = \frac{2C}{\sqrt{(A+B)^2+4\Delta}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{A-B}{\sqrt{(A+B)^2+4\Delta}}.$$

Jeder der unendlich vielen Winkel 2φ, welche der Gleichung 5) entsprechen, macht C' verschwinden; wir wollen von denselben denjenigen auswählen, der zwischen 0^0 und 360^0 enthalten ist, und dessen Sinus und Cosinus die Werte 5) haben, wenn in denselben die Quadratwurzel positiv gerechnet wird.

Um zunächst die Koeffizienten A' und B' zu berechnen, verbinden wir die ersten beiden Gleichungen 4) durch Addition und Subtraktion; dies ergiebt:

$$\begin{aligned} A' + B' &= A + B, \\ A' - B' &= (A - B)\cos 2\varphi + 2C \sin 2\varphi \\ &= \sqrt{(A+B)^2 + 4\Delta}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$6)\quad \begin{cases} A' = \frac{1}{2}\left\{A + B + \sqrt{(A+B)^2 + 4\Delta}\right\}, \\ B' = \frac{1}{2}\left\{A + B - \sqrt{(A+B)^2 + 4\Delta}\right\}. \end{cases}$$

Die transformierte Gleichung ist daher:

$$7)\quad \begin{aligned} A'\xi^2 + B'\eta^2 &+ 2\,(D\cos\varphi + E\sin\varphi)\,\xi \\ &+ 2\,(-D\sin\varphi + E\cos\varphi)\,\eta + F = 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten A' und B' verschwinden nur dann beide, wenn $\Delta = 0$ und $A + B = 0$; beachtet man die Bedeutung von Δ, so folgt, dass in diesem Falle $A = B = C = 0$ sein müsste.

Wenn $\Delta = 0$ ist, aber A und B nicht beide verschwinden, so verschwindet nur einer der beiden Koeffizienten A' oder B'. Ohne die Allgemeinheit unserer Untersuchung zu beschränken, können wir voraussetzen, dass die Summe $A + B$ nicht positiv ist.* Aus $\Delta = 0$ folgt alsdann, dass auch $A' = 0$ ist.

Die beiden Fälle $\Delta \gtrless 0$ und $\Delta = 0$ untersuchen wir nach einander.

* Ist eine Gleichung zweiten Grades gegeben, bei welcher die Summe der Koeffizienten von x^2 und y^2 positiv ist, so multipliziere man dieselbe mit (-1); man erhält dann eine neue Gleichung, in welcher $A + B$ negativ ist.

§ 31.
Fortsetzung.

Erster Hauptfall: $\Delta \gtrless 0$. Unter dieser Voraussetzung sind in der Gleichung § 31, Nr. 7) A' und B' von Null verschieden. Man kann daher der Gleichung die Form geben:

$$1)\quad A'\left(\xi+\frac{D'}{A'}\right)^2+B'\left(\eta+\frac{E'}{B'}\right)^2=\frac{1}{A'B'}(B'D'^2+A'E'^2-A'B'F).$$

Die rechte Seite lässt sich rational durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung ausdrücken. Man hat zunächst nach § 30, Nr. 6)

$$A'B'=-\Delta.$$

Ferner ist nach § 30, Nr. 4):

$$B'D'^2=B'(D^2\cos^2\varphi+E^2\sin^2\varphi+DE\sin 2\varphi),$$
$$A'E'^2=A'(D^2\sin^2\varphi+E^2\cos^2\varphi-DE\sin 2\varphi).$$

Hieraus folgt:

$$B'D'^2+A'E'^2=D^2(B'\cos^2\varphi+A'\sin^2\varphi)+E^2(B'\sin^2\varphi+A'\cos^2\varphi) + DE(B'-A')\sin 2\varphi.$$

Da nun nach § 30, Nr. 4), 5) und 6):

$$(B'\cos^2\varphi+A'\sin^2\varphi)+(B'\sin^2\varphi+A'\cos^2\varphi)=B'+A'=B+A.$$
$$(B'\cos^2\varphi+A'\sin^2\varphi)-(B'\sin^2\varphi+A'\cos^2\varphi)=(B'-A')\cos 2\varphi = B-A,$$

so ist:

$$2)\quad \begin{cases} B'\cos^2\varphi+A'\sin^2\varphi=B,\\ B'\sin^2\varphi+A'\cos^2\varphi=A.\end{cases}$$

Hierdurch und durch Benutzung der Werte von $\sin^2\varphi$ und $A'B'$ erhält man

$$B'D'^2+A'E'^2-A'B'F=BD^2+AE^2-2CDE+F\Delta.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$BD^2+AE^2-2CDE+F\Delta=-\Gamma,$$

so geht die Gleichung 1) über in

$$3)\quad A'\left(\xi+\frac{D'}{A'}\right)^2+B'\left(\eta+\frac{E'}{B'}\right)^2=\frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Die Quotienten $-D':A'$ und $-E':B'$ können als Koordinaten μ und ν eines bestimmten Punktes angesehen werden. Sind m und n die Koordinaten desselben Punktes im Systeme XY, so ist

$$m = \cos\varphi \,.\, \mu - \sin\varphi \,.\, \nu,$$
$$n = \sin\varphi \,.\, \mu + \cos\varphi \,.\, \nu.$$

Setzt man hier für μ und ν die Werte ein, so ergiebt sich:

$$m = -\frac{1}{A'B'}\left\{D\,(B'\cos^2\varphi + A'\sin^2\varphi) + E\sin\varphi\cos\varphi\,(B'-A')\right\}$$
$$n = -\frac{1}{A'B'}\left\{D\sin\varphi\cos\varphi\,(B'-A') + E\,(B'\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi)\right\}.$$

In Rücksicht auf § 30, Nr. 5), 6) und § 31, Nr. 2) vereinfachen sich diese Werte zu

$$m = \frac{DB - CE}{\Delta}, \quad n = \frac{AE - CD}{\Delta}.$$

Wählt man diesen Punkt als Anfangspunkt eines neuen Systems $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, welches gegen das vorige System parallel verschoben ist, so hat man zu ersetzen

$$\xi \text{ durch } \mathfrak{x} + \mu,$$
$$\eta \quad \text{„} \quad \mathfrak{y} + \nu,$$

und erhält daher die transformierte Gleichung:

$$4)\qquad A'\,.\,\mathfrak{x}^2 + B'\,.\,\mathfrak{y}^2 = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Diese Gleichung hat im allgemeinen die Glieder der Hauptachsengleichung für Ellipse und Hyperbel; die weiteren Unterscheidungen hängen von den Vorzeichen der darin auftretenden Zahlen ab. Zunächst mag bemerkt werden, dass Δ, A' und B' in Bezug auf das Vorzeichen von einander abhängen. Da wir vorausgesetzt haben, dass $A + B$ nicht positiv ist, so folgt, dass $A' < 0$ und $B' < 0$, wenn $\Delta < 0$; ist hingegen $\Delta > 0$, so ist $A' > 0$ und $B' < 0$.

I. Wenn Γ verschwindet, so erhält man die Gleichung:

$$5)\qquad A'\,.\,\mathfrak{x}^2 + B'\,.\,\mathfrak{y}^2 = 0.$$

Ist $\Delta > 0$, so kann man die linke Seite zerlegen und schreiben:

$$6)\qquad (\sqrt{A'}\,.\,\mathfrak{x} + \sqrt{-B'}\,.\,\mathfrak{y})\,.\,(\sqrt{A'}\,.\,\mathfrak{x} - \sqrt{-B'}\,.\,\mathfrak{y}) = 0.$$

Diese Gleichung wird von den Punkten erfüllt, für welche entweder

$$\sqrt{A'}\,.\,\mathfrak{x} + \sqrt{-B'}\,.\,\mathfrak{y} = 0,$$

oder

$$\sqrt{A'}\,.\,\mathfrak{x} - \sqrt{-B'}\,.\,\mathfrak{y} = 0.$$

Die Gleichung 5) stellt daher zwei Gerade dar, die den Anfangspunkt enthalten und symmetrisch gegen die $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$-Achsen liegen.

Ist dagegen $\varDelta < 0$, so haben beide Glieder auf der linken Seite der Gleichung 5) das negative Zeichen; die Gleichung wird daher nur von dem Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$, d. i. von dem neuen Anfangspunkte erfüllt; kein anderes Paar von reellen Werten von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ genügt derselben.

Man gewinnt indessen eine formale Übereinstimmung mit 6), wenn man die Zerlegung vornimmt:

$$(\sqrt{-A'}.\mathfrak{x} + \sqrt{-1}.\sqrt{-B'}.\mathfrak{y}).(\sqrt{-A'}.\mathfrak{x} - \sqrt{-1}.\sqrt{-B'}.\mathfrak{y}) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in die linearen

$$\sqrt{-A'}.\mathfrak{x} + \sqrt{-1}.\sqrt{-B'}.\mathfrak{y} = 0, \quad \sqrt{-A'}.\mathfrak{x} - \sqrt{-1}.\sqrt{-B'}.\mathfrak{y} = 0,$$

bei welchen das Verhältnis der Konstanten imaginär ist. Man bezeichnet dieselben als die Gleichungen zweier **imaginären Geraden**; dieselben enthalten einen reellen Punkt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$, ihre anderen Punkte sind nicht reell.

II. Wenn Γ nicht verschwindet, so kann man der Kurvengleichung die Form geben:

$$7)\qquad \frac{A'.\varDelta}{\Gamma}\cdot\mathfrak{x}^2 + \frac{B'.\varDelta}{\Gamma}\cdot\mathfrak{y}^2 = 1.$$

A) Ist $\varDelta < 0$, so sind A' und B' negativ. Ist nun $\Gamma > 0$, so haben die Konstanten positive Werte, und man kann setzen:

$$\frac{A'\varDelta}{\Gamma} = \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{B'\varDelta}{\Gamma} = \frac{1}{b^2},$$

wobei a und b reelle positive Zahlen sind. Hierdurch geht die Gleichung über in

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} = 1.$$

Die Kurve ist daher eine **Ellipse mit der grossen Achse $2a$ und der kleinen $2b$.**

Ist dagegen $\Gamma < 0$, so sind die Konstanten in 7) negativ; setzt man, unter a und b wieder reelle Zahlen verstehend:

$$\frac{A'.\varDelta}{\Gamma} = -\frac{1}{a^2}, \qquad \frac{B'.\varDelta}{\Gamma} = -\frac{1}{b^2},$$

so erhält man für die Gleichung eine der drei Formen

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a\sqrt{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{y}}{b\sqrt{-1}}\right)^2 = 1,$$

oder:

$$\left(\frac{\mathfrak{x}}{a\sqrt{-1}}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2 = 1, \quad \text{oder} \quad -\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{y}}{b\sqrt{-1}}\right)^2 = 1.$$

Der Kurvengleichung kann daher nicht durch reelle, sondern nur durch imaginäre Punkte (d. i. durch Paare von Zahlen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, von denen wenigstens eine imaginär ist) genügt werden. Die obigen drei Formen zeigen, dass man die Kurve als imaginäre Ellipse mit imaginären Achsen, oder auch als imaginäre Hyperbel mit imaginärer Hauptachse und reeller Nebenachse ansehen kann; der Mittelpunkt ist in beiden Fällen reell.

B) Ist $\Delta > 0$, so ist $A' > 0$, $B' < 0$. Wenn ausserdem $\Gamma > 0$ ist, so setzt man

$$\frac{A'.\Delta}{\Gamma} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{B'\Delta}{\Gamma} = -\frac{1}{b^2}$$

und erhält dadurch

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{a^2} - \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} = 1,$$

also die Gleichung einer Hyperbel, deren Hauptachse $2a$ mit der Abscissenachse, deren Nebenachse $2b$ mit der Ordinatenachse zusammenfällt.

Ist dagegen $\Gamma < 0$, so setzt man:

$$\frac{A'.\Delta}{\Gamma} = -\frac{1}{b^2}, \quad \frac{B'\Delta}{\Gamma} = \frac{1}{a^2};$$

die Gleichung wird dadurch

$$\frac{\mathfrak{y}^2}{a^2} - \frac{\mathfrak{x}^2}{b^2} = 1;$$

dieselbe gehört zu einer Hyperbel, deren Hauptachse $2a$ mit der Ordinatenachse, und deren Nebenachse $2b$ mit der Abscissenachse zusammenfällt.

§ 32.

Schluss.

Zweiter Hauptfall: $\Delta = 0$. Wenn C, A und D verschwinden, und B nicht verschwindet, so ist die Gleichung

$$1) \qquad By^2 + 2\,Ey + F = 0.$$

Dieselbe liefert zwei konstante Werte für y, bedeutet also zwei verschiedene reelle, zwei zusammenfallende reelle oder zwei imaginäre Parallele zur x-Achse.

Wenn C und A verschwinden, und B und D nicht verschwinden, so kann man die gegebene Gleichung schreiben:

$$2)\qquad \left(y+\frac{E}{B}\right)^2=-\frac{2D}{B}\left(x+\frac{FB-E^2}{2BD}\right).$$

Dieselbe gehört zu einer Parabel, deren Achse mit der x-Achse parallel ist; der Scheitel hat die Koordinaten

$$m=-\frac{FB-E^2}{2BD},\quad n=-\frac{E}{B},$$

der Parameter ist der absolute Wert von $D:B$; je nachdem $D:B \lessgtr 0$, erstreckt sich die Kurve entlang der positiven oder der negativen x-Achse ins Unendliche.

Wenn C und A nicht verschwinden, so bemerken wir zunächst, dass zufolge der Voraussetzung $\Delta=0$ für A' und B' erhalten wird

$$A'=0,\qquad B'=A+B.^*$$

Die Gleichung § 30 Nr. 7) geht demnach über in:

$$3)\quad (A+B)\,\eta^2+2\,(D\cos\varphi+E\sin\varphi)\,\xi \\ +2\,(-D\sin\varphi+E\cos\varphi)\,\eta+F=0.$$

Für 2φ ergiebt sich, wenn man B durch $C^2:A$ ersetzt:

$$\sin 2\varphi=-\frac{2AC}{A^2+C^2},\qquad \cos 2\varphi=-\frac{A^2-C^2}{A^2+C^2}.$$

Hieraus folgen die Funktionen

$$4)\qquad \sin\varphi=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+C^2}},\qquad \cos\varphi=\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+C^2}}.$$

Da Δ verschwindet, so haben A und B dasselbe Vorzeichen; hieraus und aus der allgemeinen Voraussetzung $A+B<0$ folgt, dass A und B negativ sind. Der Winkel 2φ liegt zwischen 0 und 360^0; mithin ist $\sin\varphi>0$ und $\cos\varphi$ hat dasselbe Vorzeichen wie $\sin 2\varphi$; hieraus folgt, dass in den Formeln 4) die unteren Vorzeichen gelten, wenn man die Wurzeln positiv rechnet. Es ist also

$$\sin\varphi=-\frac{A}{\sqrt{A^2+C^2}},\qquad \cos\varphi=\frac{C}{\sqrt{A^2+C^2}}.$$

---

* Da nach der Voraussetzung $A+B$ nicht positiv ist, so ist der positive Wert von $\sqrt{(A+B)^2}=-(A+B)$.

Setzt man dies in 3) ein, so erhält man:

$$5)\quad \frac{1}{A}(A^2+C^2)\eta^2+2\frac{CD-AE}{\sqrt{A^2+C^2}}\xi+2\frac{AD+CE}{\sqrt{A^2+C^2}}\eta+F=0.$$

Wenn $CD-AE$ verschwindet, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{1}{A}(A^2+C^2)\eta^2+2\frac{AD+CE}{\sqrt{A^2+C^2}}\eta+F=0.$$

Diese Gleichung liefert zwei konstante Werte für η, die reell und verschieden, reell und gleich oder konjugiert komplex sein können; sie stellt daher entweder zwei verschiedene reelle, oder zwei vereinte reelle, oder zwei imaginäre Paralle zur Abscissenachse dar.

Die Zahl Γ reduziert sich unter der Voraussetzung $\Delta=0$ auf

$$D(BD-CE)+E(AE-CD).$$

Ist $C=0$, so folgt aus $\Delta=0$, dass entweder noch $A=0$ oder $B=0$ ist; wenn nun $\Gamma=0$ ist, so folgt im ersten Falle, dass BD^2, im andern, dass AE^2 verschwindet, also ergiebt sich $D=0$, bez. $E=0$; unter beiden Voraussetzungen zerfällt das Gebilde in Gerade. Ist $C\gtrless 0$, so verschwinden weder A noch B und man kann wegen $\Delta=0$ setzen $B=C^2:A$; dadurch geht Γ über in

$$\frac{1}{A}(DC-AE)^2.$$

Verschwindet nun Γ, so folgt, dass $DC-AE=0$ ist. Folglich zeigt auch in dem Falle $\Delta=0$ das Verschwinden von Γ den Zerfall des Gebildes in reelle oder imaginäre Gerade an.

Wenn $CD-AE$ nicht verschwindet, so kann man die Gleichung 5) ersetzen durch

$$\frac{1}{A}(A^2+C^2)\left\{\eta+\frac{A(AD+CE)}{\sqrt{A^2+C^2}^3}\right\}^2$$
$$=2\cdot\frac{AE-CD}{\sqrt{A^2+C^2}}\left\{\xi-\frac{F(A^2+C^2)^2-A(AD+CE)^2}{2(AE-CD)\cdot\sqrt{A^2+C^2}^3}\right\}.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel die Koordinaten hat

$$\mu=\frac{F(A^2+C^2)^2-A(AD+CE)^2}{2(AE-CD)\sqrt{A^2+C^2}^3},\qquad \nu=-\frac{A(AD+CE)}{\sqrt{A^2+C^2}^3}.$$

Der Parameter ist der absolute Wert von

$$\frac{A(AE-CD)}{\sqrt{A^2+C^2}^3}.$$

Die Kurve erstreckt sich entlang der positiven oder der negativen Hälfte der Abscissenachse ins Unendliche, je nachdem $A(AE-CD) \gtrless 0$.

Die Koordinaten m und n des Parabelscheitels im ursprünglichen Systeme ergeben sich aus den Transformationsformeln

$$m = \cos\varphi \,.\, \mu - \sin\varphi \,.\, \nu,$$

$$n = \sin\varphi \,.\, \mu + \cos\varphi \,.\, \nu,$$

zu

$$m = \frac{CF(A^2+C^2)^2 - A(AD+CE)[E(A^2+C^2)+A(AE-CD)]}{2(AE-CD)(A^2+C^2)^2},$$

$$n = \frac{-AF(A^2+C^2)^2 + A(AD+CE)[D(A^2+C^2)-C(AE-CD)]}{2(AE-CD)(A^2+C^2)^2}.$$

Wir sind hiermit am Ende der Untersuchung angelangt, welche geometrische Gebilde durch eine allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellt werden können; es hat sich ergeben, dass ausser den Kegelschnitten es keine eigentlichen Kurven zweiter Ordnung giebt, sondern dass jede Gleichung zweiten Grades, wenn sie keinen reellen oder imaginären Kegelschnitt darstellt, in Gebilde erster Ordnung zerfällt, indem sie entweder zwei zusammenfallende oder verschiedene parallele Gerade, oder zwei sich schneidende Gerade darstellt, die reell oder imaginär sein können.

§ 32b.

Übersicht der Resultate und Anwendung auf schiefwinklige Koordinaten.

Wir fassen die Resultate der Untersuchung in folgender Übersicht zusammen.

Ist die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

gegeben, und darin $A+B$ nicht positiv, so berechnet man die Diskriminante

$$\Delta = C^2 - AB.$$

Erster Hauptfall. Wenn $\varDelta$ nicht Null ist, so berechnet man die Grössen Γ, φ, m, n, A' und B' aus den Formeln:

$$\Gamma = -BD^2 - AE^2 + 2CDE - F\varDelta,$$

$$m = \frac{DB - CE}{\varDelta}, \qquad n = \frac{AE - CD}{\varDelta},$$

$$\sin 2\varphi = \frac{2C}{\sqrt{(A+B)^2 + 4\varDelta}}, \qquad \cos 2\varphi = \frac{A - B}{\sqrt{(A+B)^2 + 4\varDelta}},$$

$$A' = \tfrac{1}{2}\left[A + B + \sqrt{(A+B)^2 + 4\varDelta}\right],$$

$$B' = \tfrac{1}{2}\left[A + B - \sqrt{(A+B)^2 + 4\varDelta}\right],$$

wobei die Wurzeln positiv zu rechnen sind und 2φ zwischen 0^0 und 360^0 enthalten ist.

I. Wenn Γ **verschwindet**, so stellt die Gleichung **zwei Gerade** dar, die den Punkt mn enthalten, symmetrisch gegen die Gerade liegen, die mit der Abscissenachse den Winkel φ einschliesst, und gegen diese Symmetrieachse um Winkel α geneigt sind, für welche

$$\tan\alpha = \pm\sqrt{-\frac{A'}{B'}}.$$

Ist $\varDelta > 0$, so sind die Geraden reell, ist $\varDelta < 0$, so sind sie imaginär.

II. **Wenn** Γ **nicht verschwindet,** so stellt die Gleichung einen centralen Kegelschnitt dar, dessen Centrum der Punkt mn ist.

A) Ist $\varDelta < 0$, so stellt die Gleichung eine Ellipse dar. Ist $\Gamma > 0$, so ist die Ellipse reell; die grosse Achse schliesst mit der Abscissenachse den Winkel φ ein; die grosse und kleine Halbachse sind

$$a = \sqrt{\frac{\Gamma}{A'\varDelta}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\Gamma}{B'\varDelta}}.$$

Ist $\Gamma < 0$, so ist kein Punkt der Kurve reell.

B) Ist $\varDelta > 0$, so ergiebt die Gleichung eine Hyperbel. Wenn $\Gamma > 0$ ist, so sind die halbe Haupt- und Nebenachse

$$a = \sqrt{\frac{\Gamma}{A'\varDelta}}, \qquad b = \sqrt{-\frac{\Gamma}{B'\varDelta}},$$

und die erstere schliesst mit der x-Achse den Winkel φ ein.

Wenn $\Gamma < 0$ ist, so sind die halbe Haupt- und Nebenachse

$$a = \sqrt{\frac{\Gamma}{B'\Delta}}, \qquad b = \sqrt{-\frac{\Gamma}{A'\Delta}},$$

und die erstere schliesst mit der x-Achse den Winkel $\varphi + 90^0$ ein.

Zweiter Hauptfall: $\Delta = 0$. **A)** Ist $A = C = 0$, so stellt die Gleichung eine Parabel dar; der Scheitel hat die Koordinaten

$$m = -\frac{FB - E^2}{2BD}, \qquad n = -\frac{E}{B},$$

die Achse ist der x-Achse parallel; der Parameter hat den absoluten Wert von $D:B$; je nachdem $D:B \lessgtr 0$ erstreckt sich die Parabel entlang der positiven oder der negativen Abscissenachse.

Wenn A und C nicht zugleich verschwinden, so berechnet man φ aus

$$\sin\varphi = -\frac{A}{\sqrt{A^2 + C^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}},$$

die Wurzeln positiv genommen.

B) Wenn $CD - AE$ verschwindet, so stellt die Gleichung zwei verschiedene reelle oder zusammenfallende reelle, oder imaginäre parallele Gerade dar; sie bilden mit der x-Achse den Winkel φ; ihre Abstände η vom Nullpunkte sind die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{1}{A}(A^2 + C^2)\,\eta^2 + 2\,\frac{AD + CE}{\sqrt{A^2 + C^2}}\,\eta + F = 0.$$

C) Wenn $CD - AE$ nicht verschwindet, so ergiebt die Gleichung eine Parabel. Der Scheitel hat die Koordinaten:

$$m = \frac{CF(A^2+C^2)^2 - A(AD+CE)\,[E(A^2+C^2) + A(AE - CD)]}{2\,(AE - CD)\,(A^2 + C^2)^2},$$

$$n = \frac{-AF(A^2+C^2)^2 + A(AD+CE)\,[D(A^2+C^2) - C(AE - CD)]}{2\,(AE - CD)\,(A^2 + C^2)^2},$$

die Hauptachse bildet mit der Abscissenachse den Winkel φ; der Parameter p hat den absoluten Wert von

$$\frac{A\,(AE - CD)}{\sqrt{(A^2 + C^2)^3}};$$

die Parabel erstreckt sich entlang der positiven oder der negativen ξ-Achse ins Unendliche, je nachdem $A\,(AE - CD)$ positiv oder negativ ist.

Es hat sich hiernach ergeben, dass zwei aus den Koeffizienten der Gleichung zweiten Grades zusammengesetzte Zahlen für den Charakter des durch die Gleichung dargestellten geometrischen Gebildes besonders wichtig sind, nämlich Γ und Δ; das Verschwinden der ersten Zahl zeigt den Zerfall des Gebildes in zwei gerade Linien an; das Verschwinden der zweiten Zahl ist für die Parabel charakteristisch, und wenn keine der beiden Zahlen verschwindet, so geben die Vorzeichen derselben darüber Aufschluss, ob die Kurve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Da nun die geometrischen Beziehungen unabhängig vom Koordinatensysteme sind, so folgt, dass auch die zugehörigen arithmetischen Beziehungen von Γ und Δ sich beim Übergange aus einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zum anderen nicht ändern können. Indem wir eine Übertragung der im § 32 angegebenen Kriterien auf schiefwinklige Parallelkoordinaten ins Auge fassen, wollen wir zunächst zeigen, wie sich Δ und Γ ändern, wenn man von einem rechtwinkligen Systeme zu einem andern Parallelkoordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte übergeht, und alsdann, welchen Einfluss eine Verschiebung der Achsen auf diese Zahlen hat.

Der Übergang von einem rechtwinkligen Systeme XY zu einem andern Parallelkoordinatensysteme ΞH mit demselben Anfangspunkte und beliebigem Koordinatenwinkel erfolgt durch Substitutionen von der Form

$$x = \alpha\xi + \beta\eta,$$
$$y = \gamma\xi + \delta\eta.$$

Man hat daher zu ersetzen:

$$\begin{array}{lll} x^2 & \text{durch} & \alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 + 2\alpha\beta\,\xi\eta, \\ y^2 & ,, & \gamma^2\xi^2 + \delta^2\eta^2 + 2\gamma\delta\,\xi\eta, \\ xy & ,, & \alpha\gamma\,\xi^2 + \beta\delta\,\eta^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\xi\eta. \end{array}$$

Werden die Koeffizienten der transformierten Gleichung mit A_1, $B_1, \ldots F_1$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha^2 A + \gamma^2 B + 2\alpha\gamma\, C, \\ B_1 &= \beta^2 A + \delta^2 B + 2\beta\delta\, C, \\ C_1 &= \alpha\beta A + \gamma\delta B + (\alpha\delta + \beta\gamma)\, C, \\ D_1 &= \alpha D + \gamma E, \\ E_1 &= \beta D + \delta E, \\ F_1 &= F. \end{aligned}$$

Bildet man mit Hilfe dieser Zahlen

$$\Delta_1 = C_1^2 - A_1 B_1,$$

so heben sich die mit A^2, B^2, AC und BC multiplizierten Glieder auf; die übrigen ergeben

$$\Delta_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \Delta.$$

Um Γ_1 zu berechnen, bilden wir zunächst

$$\Gamma_1 - F\Delta_1 = B_1 D_1^2 + A_1 E_1^2 - 2 D_1 C_1 E_1.$$

Man erkennt leicht, dass sich die Glieder aufheben, welche mit ADE, BDE, D^2C und CE^2 multipliziert sind. Die übrig bleibenden ergeben

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (BD^2 + AE^2 - 2CDE).$$

Daher ist

$$\Gamma_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \Gamma.$$

Die Grösse $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ bezeichnet man als die Substitutionsdeterminante. Die neuen Grössen Δ_1 und Γ_1 sind daher die Produkte aus den alten und aus dem Quadrate der Substitutionsdeterminante. —

Bei einer Verschiebung der Achsen hat man die Substitutionen

$$x = \xi + m,$$
$$y = \eta + n.$$

Daher ist zu ersetzen:

$$\begin{array}{lll} x^2 & \text{durch} & \xi^2 + 2m\xi + m^2, \\ y^2 & \text{,,} & \eta^2 + 2n\eta + n^2, \\ xy & \text{,,} & \xi\eta + n\xi + m\eta + mn. \end{array}$$

In der transformierten Gleichung haben die quadratischen Glieder dieselben Koeffizienten, wie in der gegebenen Gleichung.

Ferner ist:

$$D_1 = mA + nC + D,$$
$$E_1 = nB + mC + E,$$
$$F_1 = m^2A + n^2B + 2mn\,C + 2m\,D + 2n\,E + F.$$

Berechnet man mit Hilfe dieser Werte die Grösse

$$\Gamma_1 - F_1 \Delta = BD_1^2 + AE_1^2 - 2CD_1E_1,$$

und fasst rechts der Reihe nach die Glieder zusammen, welche mit

$$m^2,\ n^2,\ 2mn,\ 2m,\ 2n$$

multipliziert sind, so erhält man

$$\Gamma_1 - F_1 \Delta = - F_1 \Delta + \Gamma;$$

hieraus folgt

$$\Gamma_1 = \Gamma.$$

Bei einer parallelen Verschiebung der Koordinatenachsen bleiben daher die Grössen Δ und Γ ungeändert.

Insbesondere folgt hieraus: Auch bei Gleichungen zweiten Grades für schiefwinklige Koordinaten zeigt $\Gamma = 0$ den Zerfall des Gebildes in zwei getrennte oder zusammenfallende Gerade, $\Gamma \gtrless 0$ einen eigentlichen Kegelschnitt an, und zwar eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem $\Delta \lessgtr 0$.

§ 33.

Geometrische Örter.

Wird eine Kurve dadurch erzeugt, dass man einen Punkt sich nach einem bestimmten Gesetze bewegen lässt, dessen mathematischer Ausdruck in Parallelkoordinaten auf eine Gleichung zweiten Grades hinführt, so muss nach den in den vorhergehenden Paragraphen angestellten Betrachtungen der geometrische Ort des bewegten Punktes eine der Kegelschnittslinien sein. Die aufgefundenen Kriterien entscheiden darüber, welche besondere Linie in jedem einzelnen Falle in Frage kommt. Bei der speciellen Untersuchung der Kegelschnitte haben wir bereits mehrere solche Entstehungsweisen dieser Kurven kennen gelernt; zum Zwecke der Einübung der bei Gelegenheit der allgemeinen Diskussion erhaltenen Resultate mögen hierzu noch die folgenden Beispiele treten.

I. Man soll den Ort der Scheitel aller derjenigen Dreiecke suchen, welche auf einer gegebenen Grundlinie $2m$ stehen, und in welchen die an dieser Grundlinie gelegenen Dreieckswinkel eine konstante Differenz δ besitzen.

Die Grundlinie $2m$ werde zur x-Achse und die Senkrechte in ihrem Halbierungspunkte zur Achse der y in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme gewählt. Der auf der Seite der positiven x an der Basis gelegene innere Dreieckswinkel heisse α_1, der andere α_2, und es sei

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Bezeichnen nun x und y die Koordinaten des Scheitels für irgend eine Lage des Dreieckes, so sind die Gleichungen der beiden im Scheitel zusammentreffenden Dreiecksseiten (vgl. § 5 Nr. 7):

$$y = -(x-m)\,tan\,\alpha_1, \qquad y = (x+m)\,tan\,\alpha_2,$$

und man erhält demnach:

$$tan\,\alpha_1 = \frac{y}{m-x}, \qquad tan\,\alpha_2 = \frac{y}{m+x}.$$

Mit Rücksicht auf die aus dem Werte von δ hervorgehende Gleichung

$$tan\,\delta = \frac{tan\,\alpha_1 - tan\,\alpha_2}{1 + tan\,\alpha_1 \,.\, tan\,\alpha_2}$$

folgt

$$tan\,\delta = \frac{2xy}{m^2 - x^2 + y^2},$$

und hieraus entsteht für den gesuchten Ort die Gleichung:

$$1) \qquad x^2 - y^2 + 2xy\,cot\,\delta = m^2,$$

oder, wenn man für den speciellen Fall $\delta = 0$ das Unendlichwerden des mit dem Faktor $cot\,\delta$ behafteten Gliedes vermeiden will:

$$2) \qquad x^2\,sin\,\delta - y^2\,sin\,\delta + 2xy\,cos\,\delta = m^2\,sin\,\delta.$$

Hierbei ist $\varDelta = sin^2\delta + cos^2\delta = 1$, also immer positiv, und $\varGamma = m^2 sin\,\delta$; die Linie ist also eine Hyperbel, die für den besonderen Fall $\delta = 0$ in zwei sich schneidende Gerade — die Koordinatenachsen — übergeht. Das Centrum fällt mit dem gewählten Koordinatenanfange zusammen.

Da das Koordinatensystem rechtwinklig ist und die Koeffizienten von x^2 und y^2 nur durch das Vorzeichen unterschieden sind, so folgt, dass die Hyperbel gleichseitig sein muss. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn man, um über Lage und Grösse der Hyperbelachsen zu entscheiden, durch Drehung der Koordinatenachsen zu einem neuen rechtwinkligen Systeme übergeht. Dabei ist nach § 4 Nr. 4)

$$x\,cos\,\alpha - y\,sin\,\alpha \text{ für } x,$$
$$x\,sin\,\alpha + y\,cos\,\alpha \;\;\text{„}\;\; y$$

zu setzen, wenn α den Winkel bedeutet, unter welchem die neue x-Achse gegen die ursprüngliche geneigt ist. Mit Einsetzung dieser Werte entsteht aus 2) nach gehöriger Reduktion:

$$(x^2 - y^2) \sin(2\alpha + \delta) + 2xy \cos(2\alpha + \delta) = m^2 \sin\delta.$$

Macht man hierin $2\alpha + \delta = 90^0$ oder $\alpha = 45^0 - \frac{1}{2}\delta$, so bleibt

$$3) \qquad x^2 - y^2 = m^2 \sin\delta,$$

d. i. die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt mit dem Halbierungspunkte der gegebenen Dreiecksgrundlinie zusammenfällt und deren Hauptachse unter dem Winkel $45^0 - \frac{1}{2}\delta$ gegen diese Grundlinie geneigt ist. Die Länge der halben Hauptachse beträgt $m\sqrt{\sin\delta}$.

Die hier untersuchte Eigenschaft lässt zwischen der gleichseitigen Hyperbel und dem Kreise insofern eine gewisse Analogie erkennen, als letzterer nach einem bekannten Satze den geometrischen Ort für die Scheitel aller derjenigen Dreiecke bildet, in welchen bei gegebener Grundlinie die Summe der Winkel an der Basis konstant ist.

II. Welche Linie beschreibt ein Eckpunkt eines gegebenen Dreieckes, während jeder der beiden andern Eckpunkte dieses Dreieckes sich auf einem Schenkel eines festen Winkels fortbewegt?

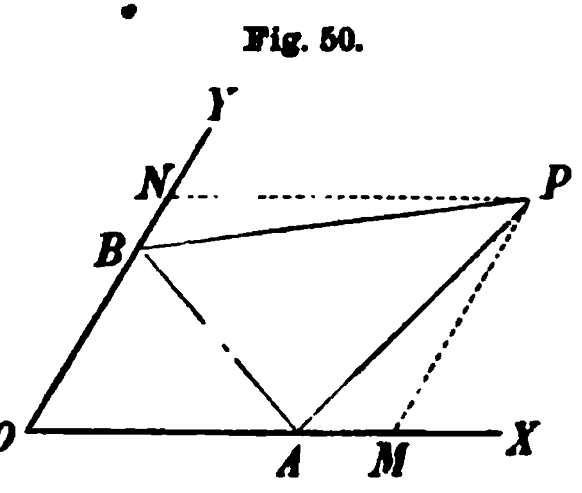


Fig. 50.

Wir wählen die Schenkel des festen Winkels zu Koordinatenachsen, und es sei PAB Fig. 50 das gegebene Dreieck in einer der Lagen, welche es infolge der Aufgabe einnehmen kann. P stelle den Eckpunkt dar, welcher die gesuchte Linie beschreiben soll.

Setzen wir $NP = x$, $MP = y$, $BP = a$, $AP = b$, $\angle YBP = \varphi$, $\angle XAP = \psi$ und bezeichnen den Koordinatenwinkel mit ω, so ist nach einem bekannten Dreieckssatze:

$$\sin\varphi = \frac{x \sin\omega}{a}, \quad \sin\psi = \frac{y \sin\omega}{b}.$$

Wird nun der Dreieckswinkel APB mit γ bezeichnet, so findet die Relation

$$\varphi + \psi = \omega + \gamma$$

statt, und man erhält hiermit aus

$$\sin^2\varphi \cos^2\psi + \cos^2\varphi \sin^2\psi + 2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi \cos\psi = \sin^2(\varphi + \psi),$$

wenn man linker Hand den sich selbst aufhebenden Ausdruck

$$\sin^2\varphi \sin^2\psi + \sin^2\varphi \sin^2\psi - 2\sin^2\varphi \sin^2\psi$$

addiert:

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\sin\varphi \sin\psi \cos(\omega + \gamma) = \sin^2(\omega + \gamma).$$

Hieraus entsteht, wenn die obigen Werte von $\sin\varphi$ und $\sin\psi$ substituiert werden, für den gesuchten Ort die Gleichung:

$$4)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2\frac{xy}{ab}\cos(\omega + \gamma) = \left\{\frac{\sin(\omega + \gamma)}{\sin\omega}\right\}^2.$$

Dieselbe gehört dem zweiten Grade an und giebt, sobald nicht $\omega + \gamma = 180^0$, für Δ und Γ negative Werte; die Linie ist also im allgemeinen eine Ellipse, und zwar fällt, wie man aus der Form der Gleichung leicht erkennt, ihr Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfang, d. i. mit dem Scheitel des gegebenen Winkels zusammen. In dem speciellen Falle, wenn $\omega + \gamma = 180^0$, bleibt aus Nr. 4):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

d. i. die Gleichung einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden. Die Ellipse geht demnach in diesem besonderen Falle in eine gerade Linie über.

Beachtet man, dass in Fig. 50 für jede Lage von AB der Punkt P zwei Lagen, zu beiden Seiten von AB, einnehmen kann, ohne dass an den Bedingungen der Aufgabe irgend etwas geändert wird, so lässt sich durch eine der vorhergehenden ganz ähnliche Entwickelung noch ein zweiter geometrischer Ort von P ermitteln. Man findet wieder eine Ellipse, deren Gleichung:

$$5)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 2\frac{xy}{ab}\cos(\omega - \gamma) = \left\{\frac{\sin(\omega - \gamma)}{\sin\omega}\right\}^2$$

lautet.

Kommt an die Stelle des gegebenen Dreiecks eine Gerade, so dass der beschreibende Punkt P in die Seite AB selbst fällt, so geht in den Gleichungen 4) und 5) der Winkel γ in 180^0 über und die beiden gefundenen Ellipsen werden dabei zu einer einzigen, weil zu $\omega + 180^0$ und $\omega - 180^0$ gleiche trigonometrische Funktionen gehören. Diese Ellipse hat die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab}\cos\omega = 1.$$

Wird dann noch die Verfügung getroffen, dass der Koordinaten**winkel** ein rechter sein soll, so entsteht:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

d. i. die Gleichung einer Ellipse, deren Achsen die Stelle der Ko**ordinaten**achsen einnehmen. Wir kommen hierdurch zu der in **Fig. 42** enthaltenen Konstruktion der Ellipse zurück, welche als spe**cieller** Fall der jetzt behandelten Aufgabe betrachtet werden kann.

III. Die Seiten AC und BC des gegebenen Dreieckes ABC (Fig. 51) werden von der beweglichen Geraden MN **in den** Punkten M und N geschnitten. Welche Linie be**schreibt** der auf MN gelegene Punkt P, wenn die Be**wegung** dieser Geraden so vor sich geht, dass immer die **Proportion**

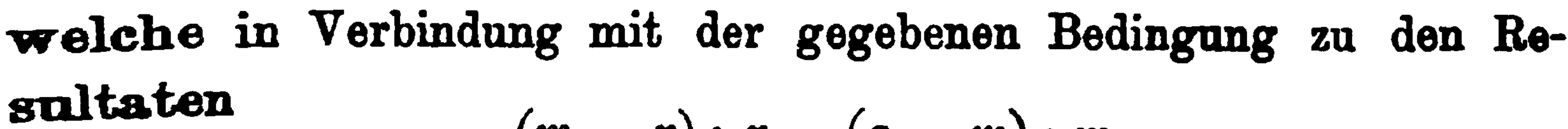
$$MP : PN = AM : MC = CN : NB$$

Geltung findet?

Wir wählen CA als x-Achse und CB als y-Achse eines Pa**rallelkoordinatensystemes** mit dem Anfangs**punkte** C, und gebrauchen die Bezeichnungen: $CA = a$, $CB = b$, $CM = m$, $CN = n$. Die **Koordinaten** des beweglichen Punktes P **heissen** x und y. — Aus der Figur ergiebt **sich dann** sogleich die fortlaufende Proportion:

Fig. 51.

$$MP : PN = (m - x) : x = y : (n - y),$$



welche in Verbindung mit der gegebenen Bedingung zu den Re**sultaten**

$$(m - x) : x = (a - m) : m,$$
$$(n - y) : y = (b - n) : n$$

hinführt. Hieraus folgt:

$$x : m = m : a,$$
$$y : n = n : b,$$

und man erhält demnach:

$$m = (ax)^{\frac{1}{2}}, \qquad n = (by)^{\frac{1}{2}}.$$

Wird hierzu die Gleichung

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

als Bedingung dafür gefügt, dass die Punkte P, M und N in einer geraden Linie liegen sollen, so entsteht für den gesuchten Ort die Gleichung:

$$6)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Durch zweimalige Quadrierung können hierin die gebrochenen Exponenten entfernt werden. Das erste Mal ergiebt sich das Resultat:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 2\left(\frac{xy}{ab}\right)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

und hieraus wieder:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = 4\,\frac{xy}{ab},$$

oder nach Auflösung der Parenthese und besserer Ordnung der Glieder:

$$7)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\,\frac{xy}{ab} - 2\,\frac{x}{a} - 2\,\frac{y}{b} + 1 = 0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt zunächst, dass der geometrische Ort des Punktes P eine Linie zweiten Grades ist, welche durch die Punkte A und B geht, und in diesen Punkten von den Koordinatenachsen oder den Dreiecksseiten CA und CB tangiert wird, so dass die dritte Seite AB die dem Punkte C zugehörige Berührungssehne darstellt. Wird nämlich in 7) $y = 0$ gesetzt, so bleibt für die Abscissen der in der x-Achse gelegenen Punkte der untersuchten Linie die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\,\frac{x}{a} + 1 = 0,$$

welche die beiden gleichen Wurzeln $x = a$ enthält. Hiernach ist CA Tangente im Punkte A. In gleicher Weise führt die Substitution $x = 0$ zu dem Resultate, dass CB die Tangente im Punkte B abgiebt.

Aus 7) folgt ferner, dass für die fragliche Linie die Grösse $\varDelta = 0$ und $\Gamma = -\frac{4}{a^2 b^2}$, also von Null verschieden ist; die Linie ist daher eine Parabel.

Wir wollen noch untersuchen, ob bei der angegebenen Entstehung dieser Parabel die erzeugende Gerade MN (Fig. 51) ausser dem beschreibenden Punkte P noch einen zweiten Punkt mit der

Kurve gemein haben kann. Verbinden wir zu diesem Zwecke die Gleichung von MN, nämlich

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

mit der unserer Aufgabe zu Grunde liegenden Bedingung:

$$(a - m) : m = n : (b - n),$$

so lässt sie sich nach Elimination von n auf die Form

$$(a - m)\, x + m\, \frac{ay}{b} - m\,(a - m) = 0$$

bringen. Für Punkte der Parabel ist aber nach Nr. 6)

$$\frac{ay}{b} = \left(a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2;$$

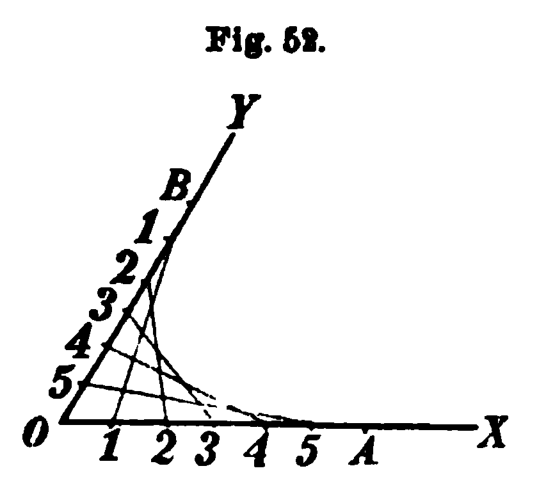
man erhält demnach für die x der gemeinschaftlichen Punkte beider Linien, wenn aus den beiden letzten Gleichungen y eliminiert wird:

$$ax - 2ma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + m^2 = 0.$$

Da diese Gleichung linker Hand ein vollständiges Quadrat enthält, so besitzt sie zwei gleiche reelle Wurzeln; alle der Aufgabe genügenden Lagen der erzeugenden Geraden geben also Parabeltangenten und der beschreibende Punkt P ist in jedem Falle Berührungspunkt. Hierauf gründet sich die folgende Konstruktion.

Soll in den Winkelraum XOY (Fig. 52) ein Parabelbogen gelegt werden, welcher die beiden Schenkel des Winkels in den Punkten A und B berührt, so teile man vorerst sowohl AO als BO in eine gleiche Anzahl gleich grosser Teile. Werden dann die auf der Strecke AO gelegenen Teilpunkte von O aus, dagegen die Teilpunkte auf BO von B aus der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 u. s. f. bezeichnet, so stellen die Geraden, welche die gleichbezeichneten Punkte unter sich verbinden, Tangenten des zu konstruierenden Parabelbogens dar. Man erhält auf diese Weise eine Schar gerader Linien, welche die Kurve umhüllen und sich derselben um so inniger anschmiegen, je grösser ihre Anzahl ist. Diese den Parabelbogen einhüllenden Geraden können dazu benutzt werden, den

Fig. 52.



Lauf der Kurve selbst mit beliebiger Annäherung zu bestimmen. Man wird leicht finden, in welcher Weise das angegebene Verfahren fortzusetzen ist, wenn man zu dem Teile der Parabel gelangen will, welcher vom Scheitel des Winkels aus gerechnet sich jenseits der Berührungspunkte A und B befindet.

Eine leicht ersichtliche Abänderung der vorstehenden Konstruktion ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die aus den zur Fig. 51 gestellten Bedingungen folgende Proportion:

$$(a - m) : m = n : (b - n)$$

zu der Gleichung

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1$$

hinführt, wonach ein mit den Koordinaten m und n konstruierter Punkt, d. i. der vierte Eckpunkt des Parallelogramms, von welchem CM und CN zwei Nachbarseiten darstellen, auf der Dreiecksseite AB liegen muss. Hiernach kann jeder auf AB gelegene Punkt zur Konstruktion einer der verschiedenen Lagen der die Parabel tangierenden beweglichen Geraden MN benutzt werden.*

IV. Es ist ein rechtwinkliges Dreieck OAB gegeben, dessen Katheten $OA = 4$, $OB = 3$ sind; man soll den geometrischen Ort der Punkte bestimmen, für welche das 24fache Produkt der Abstände von den beiden Katheten gleich dem 25fachen Quadrate des Abstands von der Hypotenuse ist.

Wählt man O zum Anfangspunkte, OA und OB zur x- und y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist die Gleichung der Hypotenuse

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} - 1 = 0.$$

Bezeichnet d die Normale, α ihren Winkel mit der Abscissenachse, so ist

---

* Wenn der zur Konstruktion verwendete Punkt auf MN in unendliche Ferne rückt, so wird, wie man sich leicht überzeugt, die Gerade MN parallel zu der durch C gehenden Diagonale des die Seiten CA und CB enthaltenden Parallelogramms, und der Punkt P liegt auf einer Geraden dieser Richtung in unendlicher Ferne. Hieraus folgt, dass die Parabelachse zu der durch C gehenden Diagonale parallel ist.

$$\cos\alpha = \tfrac{3}{5}, \qquad \sin\alpha = \tfrac{4}{5}, \qquad d = \tfrac{12}{5},$$

und daher die Normalgleichung der Hypotenuse

$$\tfrac{3}{5}\,x + \tfrac{4}{5}\,y - \tfrac{12}{5} = 0.$$

Die Bedingungen der Aufgabe führen nun sofort zu der Gleichung

$$24xy = 25\left(\tfrac{3}{5}\,x + \tfrac{4}{5}\,y - \tfrac{12}{5}\right)^2,$$

aus welcher die einfachere hervorgeht

$$9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y + 144 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$9(x-4)^2 + 16(y-3)^2 = 144,$$

$$\left(\frac{x-4}{4}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1.$$

Die Kurve ist daher eine Ellipse; der Mittelpunkt M ist die vierte Ecke des Rechtecks $OABM$; A und B liegen auf den Endpunkten der kleinen und der grossen Achse.

V. Wird die vorige Aufgabe dahin abgeändert, dass die Summe der Quadrate der Abstände von den beiden Katheten gleich dem Quadrate des Abstandes von der Hypotenuse sein soll, so hat man die Gleichung

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{25}(3x + 4y - 12)^2,$$

woraus hervorgeht

$$16x^2 + 9y^2 - 24xy + 72x + 96y - 144 = 0.$$

Hier ist $\Delta = 0$ und $CD - AE = -1200$,

$$\sin\varphi = -\frac{16}{\sqrt{16^2 + 12^2}} = \frac{4}{5}, \qquad \cos\varphi = -\frac{3}{5},$$

$$m = \frac{18}{25}, \qquad n = \frac{24}{25}, \qquad p = \frac{12}{5},$$

Aus m und n folgt, dass der Scheitel die Mitte der Normalen des Dreiecks OAB ist; aus φ und p, dass die Achse die Richtung der Normalen hat, dass die Parabel sich in der dem Anfangspunkte zugewandten Richtung erstreckt, und dass die Hypotenuse auf der Direktrix enthalten ist.*

* An die letzten beiden Aufgaben wird der Leser leicht eine Reihe ähnlicher anschliessen; dabei kann das rechtwinklige Dreieck durch ein beliebiges ersetzt werden. Die Durchführung einiger solcher Zahlenaufgaben ist als eine sehr nützliche Übung zu empfehlen.

§ 34.

Bestimmung einer Linie zweiten Grades durch gegebene Peripheriepunkte.

Da die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen den veränderlichen Grössen x und y den allgemeinsten Ausdruck für die Gleichung der Kegelschnitte und der darin mit eingeschlossenen als Grenzwerte auftretenden geradlinigen Gebilde enthält, so müssen diejenigen geometrischen Eigenschaften, welche aus der Untersuchung dieser Gleichung hervorgehen, allen Linien dieser Art gemeinschaftlich angehören. Zur Vervollständigung der aus der speziellen Betrachtung der Kegelschnitte bereits bekannten Eigenschaften mögen noch die folgenden Erörterungen hinzutreten.

Die Gleichung zweiten Grades, welche in ihrer allgemeinsten Form, nämlich in

$$1) \qquad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die sechs beständigen Grössen A, B, $C \dots F$ enthält, lässt sich, wenn man beiderseitig durch eine dieser sechs Grössen (die jedoch von Null verschieden sein muss) dividiert, immer so umgestalten, dass sie nur noch von fünf Konstanten, nämlich von fünf der zwischen den Koeffizienten bestehenden Verhältnisse, abhängig ist. Nehmen wir z. B. an, die Koordinatenachsen seien, was immer möglich ist, so gelegt, dass der Koordinatenanfang nicht mit einem Peripheriepunkte zusammenfällt, so dürfen in 1) nicht x und y gleichzeitig verschwinden; es muss also ein von x und y freies Glied vorhanden sein. Wird durch dieses dividiert, und zur Abkürzung

$$\frac{A}{F} = a, \quad \frac{B}{F} = b, \quad \frac{C}{F} = c, \quad \frac{D}{F} = d, \quad \frac{E}{F} = e$$

gesetzt, so geht Nr. 1) in die Gleichung

$$2) \qquad ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + 1 = 0$$

über, welche nur noch die fünf beständigen Grössen a, b, c, d, e enthält. Soll nun diese Gleichung für eine bestimmte Linie zweiten Grades gelten, so müssen die darin enthaltenen Konstanten entweder unmittelbar ihrem Zahlwerte nach bekannt sein, oder man muss sie aus einer gegebenen Bedingung berechnen können, wozu bekanntlich fünf von einander unabhängige Bedingungsgleichungen

nötig sind. Wählen wir z. B. zur näheren Untersuchung den Fall, dass die Linie durch fünf gegebene Peripheriepunkte hindurch gehen soll, so kommt es hierbei nur darauf an, die fünf Koeffizienten a, b, c, d, e so zu bestimmen, dass die Gleichung 2) durch die Koordinaten eines jeden der fünf gegebenen Punkte befriedigt wird.

Ist $x_1 y_1$ einer dieser fünf Punkte, und denken wir uns, wodurch der Allgemeinheit der Untersuchung kein Abbruch geschieht, das Koordinatensystem so gelegt, dass für die aufzusuchende Linie eine Gleichung von der Form 2) Anwendung finden kann, so muss dieser Gleichung Genüge geschehen, wenn in ihr x mit x_1 und y mit y_1 vertauscht wird. Man hat also für die Unbekannten a, b, c, d und e die Relation:

$$ax_1^2 + by_1^2 + 2cx_1y_1 + 2dx_1 + 2ey_1 + 1 = 0.$$

Durch jeden andern gegebenen Punkt wird hierzu eine Gleichung derselben Form, mit denselben Konstanten und nur geänderten Werten von x und y, gefügt; fünf Punkte reichen also aus, die gesuchten Koeffizienten zu bestimmen. Beachten wir nun, dass alle hierzu aufgestellten Gleichungen in Beziehung auf ihre Unbekannten vom ersten Grade sind, so folgt, dass jede dieser Grössen einen reellen und eindeutigen Wert erhalten muss, vorausgesetzt, dass die gegebenen Gleichungen von einander unabhängig sind. Diese Voraussetzung wird allemal erfüllt, wenn wir die in der Gleichung zweiten Grades enthaltenen geradlinigen Gebilde ausschliessen, uns also auf solche Fälle beschränken, wo nicht drei der gegebenen Punkte in gerader Linie liegen.* Die Substitution der aus den vorhandenen Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten gewonnenen Werte in Nr. 2) giebt dann eine einzige Gleichung zweiten Grades, welche der gesuchten Linie angehört. Hier-

* Dass bei Mitaufnahme der geradlinigen Gebilde Unbestimmtheiten eintreten, zeigt folgendes Beispiel. Soll eine Gleichung zweiten Grades vier Punkten genügen, von denen drei in gerader Linie liegen, so wird sie von jedem Systeme zweier Geraden befriedigt, von denen die eine diese drei Punkte enthält, die andere aber in beliebiger Richtung durch den vierten Punkt geht. Tritt nun hierzu ein fünfter Punkt, welcher in derselben Geraden liegt, in der sich bereits drei gegebene Punkte befinden, so bleibt die Aufgabe ebenso unbestimmt, als sie vorher war.

aus folgt: **zur Bestimmung einer Kurve zweiten Grades sind im allgemeinen fünf Peripheriepunkte nötig und ausreichend; zwei Kegelschnitte können also, ohne zusammenzufallen, nicht mehr als vier Punkte gemein haben.**

Verfährt man, um die Gleichung eines Kegelschnittes zu ermitteln, welcher durch fünf Punkte hindurchgehen soll, in der angegebenen Weise, so lassen sich durch geschickte Wahl des Koordinatensystemes noch mancherlei Rechnungsabkürzungen anbringen; dessenungeachtet bleibt die Operation nicht frei von Weitläufigkeiten. Ein anderes Verfahren zur Lösung der erwähnten Aufgabe liefert die folgende Betrachtung.

Werden die Gleichungen zweier Linien zweiten Grades durch Addition verbunden, nachdem vorher die eine dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Faktor multipliziert wurde, so entsteht wieder eine Gleichung zweiten Grades, welche von denselben x und y befriedigt wird, die den beiden ersten Gleichungen Genüge leisten. Die durch die neue Gleichung dargestellte Linie muss daher durch alle diejenigen Punkte gehen, welche den beiden ersten Linien gemein waren. Um diese Bemerkung zur Lösung der jetzt in Rede stehenden Aufgabe nutzbar zu machen, nämlich die Gleichung eines Kegelschnittes zu finden, welcher durch fünf gegebene Punkte hindurchgeht, ist es nur nötig, dass man zwei Gleichungen zweiten Grades aufstellen kann, welche für vier dieser Punkte Geltung haben. Die angegebene Operation liefert dann, solange der eingeführte Faktor unbestimmt bleibt, den allgemeinen Ausdruck für die Gleichungen aller Kegelschnitte, welche durch diese vier Punkte gelegt werden können. Schliesslich hat man über den unbestimmten Faktor so zu verfügen, dass auch der fünfte Punkt von der Gleichung getroffen wird. Wir wollen diese Rechnung durchführen, indem wir dabei den Koordinatenachsen eine solche Lage geben, dass die Resultate möglichst vereinfacht werden.

Einer der gegebenen Punkte, den wir P_1 nennen wollen, sei Koordinatenanfang, ein zweiter, P_2, liege in der x-Achse mit den Koordinaten a und 0. Durch den dritten Punkt P_3 werde die y-Achse gelegt, seine Koordinaten sind 0 und b; der vierte Punkt P_4 hat die Koordinaten m und n. Die Gleichung der Geraden P_2P_4 lautet dann (vgl. § 5 Nr. 10):

$$y = \frac{n}{m-a}(x-a) \quad \text{oder} \quad nx + (a-m)\,y - an = 0,$$

und die von $P_3 P_4$:

$$y - b = \frac{n-b}{m}\,x \quad \text{oder} \quad (b-n)\,x + my - bm = 0.$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen mit den für die Koordinatenachsen geltenden

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

ergiebt sich

$$3) \qquad x\{nx + (a-m)\,y - an\} = 0$$

als Gleichung zweiten Grades für das System der beiden Geraden $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$, und

$$4) \qquad y\{(b-n)\,x + my - bm\} = 0$$

für das System der Geraden $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$. Die beiden Gleichungen 3) und 4) werden von allen vier Punkten befriedigt; die Gleichung

$$5) \quad x\{nx + (a-m)\,y - an\} + \lambda y\{(b-n)\,x + my - bm\} = 0,$$

in welcher λ einen beliebigen endlichen Faktor bedeutet, drückt daher eine beliebige Linie zweiten Grades aus, welche durch dieselben vier Punkte hindurchgeht. Soll nun diese Linie noch einen fünften Punkt enthalten, in welchem $x = p$ und $y = q$ ist, so muss auch

$$p\{np + (a-m)\,q - an\} + \lambda q\{(b-n)\,p + mq - bm\} = 0$$

sein, woraus in Verbindung mit 5) der unbestimmte Faktor λ eliminiert werden kann. Setzen wir zur Abkürzung

$$P = p\{np + (a-m)\,q - an\},$$
$$Q = q\{(b-n)\,p + mq - bm\},$$

so erhält der gesuchte Kegelschnitt die Gleichung:

$$6) \quad Qx\{nx + (a-m)\,y - an\} - Py\{(b-n)\,x + my - bm\} = 0.$$

Hierin kann nach Potenzen von x und y geordnet und durch Anwendung der für die einzelnen Linien zweiten Grades gefundenen Unterscheidungsmerkmale in jedem einzelnen Falle entschieden werden, welche besondere Art der Kegelschnitte in Frage kommt.

Wenn zu der Gleichung 5), welche den allgemeinen Ausdruck für die Gleichungen aller Linien zweiten Grades enthält, die durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 hindurchgehen, irgend eine Be-

dingungsgleichung tritt, mittels deren der unbestimmte Faktor λ einen bestimmten Wert erhält, so wird hierdurch der fünfte Peripheriepunkt ersetzt. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Linie eine Parabel sein soll, indem dann die Bedingung $\Delta = 0$ oder $C^2 = AB$ (vgl. § 32) erfüllt werden muss. Wir erkennen hieraus, dass zur Bestimmung einer Parabel vier Punkte ausreichen müssen.

Wird Nr. 5) nach Potenzen von x und y geordnet, so entsteht die Gleichung:

$$7)\quad nx^2 + \lambda my^2 + \{a - m + \lambda(b - n)\}xy - anx - bm\lambda y = 0,$$

welche nur dann einer Parabel angehören kann, wenn der Bedingung

$$\left\{\frac{a - m + \lambda(b - n)}{2}\right\}^2 = \lambda mn$$

oder

$$8)\quad \lambda^2(b-n)^2 + 2\lambda\{(a-m)(b-n) - 2mn\} + (a-m)^2 = 0$$

Genüge geleistet wird. Da diese letzte Gleichung quadratisch ist, so lässt sie zwei Werte von λ zu und führt zu dem Satze: Durch vier Punkte können im allgemeinen zwei Parabeln gelegt werden. Damit jedoch diese Werte reell und verschieden sind, muss die Bedingung

$$\{(a - m)(b - n) - 2mn\}^2 - (a - m)^2(b - n)^2 > 0$$

erfüllt werden. Nach einigen einfachen Umformungen folgt hieraus:

$$4mn(bm + an - ab) > 0.$$

Da es nun stets möglich ist, das Koordinatensystem so zu legen, dass a, b, m und n positive Grössen darstellen, so können wir unter Voraussetzung dieser Lage der Koordinatenachsen in der letzten Ungleichung durch $4abmn$ dividieren; dann ergiebt sich:

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} > 1.$$

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Gleichung

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1$$

Geltung findet, sobald der Punkt P_4 in der Geraden P_2P_3 gelegen ist, kann hieraus leicht hergeleitet werden, dass die beiden Parabeln nur dann möglich sind, wenn sich P_4 ausserhalb der Fläche des Dreieckes befindet, welches die drei anderen gegebenen Punkte zu Eckpunkten hat. — Der Fall, in welchem die Gleichung 8) zwei gleiche reelle Wurzeln besitzt, führt auf die Bedingung

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1,$$

lässt aber keine Parabel zu, weil dann drei der gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen. Durch vier Punkte sind also immer zwei Parabeln bestimmt, sobald nur diese Punkte eine solche Lage haben, dass sie sich auf einer Parabelperipherie befinden können; hierzu muss jeder einzeln ausserhalb des zwischen den drei anderen Punkten enthaltenen Dreieckes gelegen sein.

Beachten wir, dass in der für die Parabel geltenden Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ auch der Fall eines Systems zweier parallelen Geraden eingeschlossen ist, so ergiebt sich sofort, dass bei besonderer Lage der vier gegebenen Punkte die Parabeln auch in parallele Gerade übergehen können. Nur eine Parabel und ein System paralleler Geraden ist daher möglich, wenn die vier Punkte die Eckpunkte eines Trapezes bilden; keine Parabel lässt sich durch die vier Punkte legen, dafür aber können zwei Systeme paralleler Geraden konstruiert werden, wenn die Punkte mit den Eckpunkten eines Parallelogrammes zusammenfallen.

Als Endresultat der vorhergehenden Erörterungen haben wir die Steigerung zu bemerken, welche sich im Gebiete der Kurven zweiten Grades rücksichtlich der Anzahl ihrer bestimmenden Peripheriepunkte zeigt. Während durch drei Punkte ein Kreis gelegt werden kann, bestimmen vier Punkte zwei Parabeln, fünf Punkte jeden Kegelschnitt überhaupt, also im besonderen Ellipse und Hyperbel.

§ 35.

Pol und Polare.

Die im vorigen Paragraphen behandelte Aufgabe, einen Kegelschnitt zu ermitteln, welcher fünf gegebene Punkte enthält, kann konstruktiv gelöst werden, sobald man ein Verfahren ausfindig macht, mittels der fünf Punkte einen sechsten zu erhalten, welcher derselben Kurve angehört. Die fortgesetzte Anwendung eines solchen Verfahrens muss dann zu beliebig vielen Punkten hinführen. Aus der folgenden Untersuchung ergeben sich Hilfsmittel zu einer Konstruktion dieser Art.

In der Ebene einer Linie zweiten Grades, deren Gleichung für beliebige Parallelkoordinaten von der Form

1) $$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

sein muss, legen wir durch den Koordinatenanfang eine geradlinige Sekante

2) $$y = Mx.$$

Die x der gemeinschaftlichen Punkte beider Linien finden sich dann aus der Gleichung:

3) $$(A + BM^2 + 2CM)x^2 + 2(D + EM)x + F = 0,$$

und für die Wurzeln dieser Gleichung, welche x_1 und x_2 heissen mögen, gelten die Relationen:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{D + EM}{N}, \qquad x_1 x_2 = \frac{F}{N},$$

wobei zur Abkürzung

$$N = A + BM^2 + 2CM$$

gesetzt ist. Wir stellen uns nun die Aufgabe, auf der Sekante den zum Koordinatenanfange zugeordneten harmonischen Punkt zu finden, während die Durchschnittspunkte mit der durch die Gleichung 1) repräsentierten Linie die beiden anderen harmonischen Punkte darstellen sollen. Da die zugehörenden y ein harmonisches Strahlenbüschel bilden, so muss das x des gesuchten Punktes das harmonische Mittel der beiden Wurzeln von Nr. 3) bilden. Werden also die Koordinaten dieses Punktes mit x und y bezeichnet, so ergiebt sich aus der Formel

$$x = x_1 x_2 : \frac{x_1 + x_2}{2},$$

wenn wir die oben berechneten Werte einsetzen,

$$x = -\frac{F}{D + EM}.$$

Das zugehörige y ist, da der Punkt auf der Sekante liegt, mittels der Gleichung

$$y = Mx$$

zu berechnen. Sobald man aus den beiden letzten Gleichungen M eliminiert, findet sich für den geometrischen Ort der Punkte, in welchen alle durch den Koordinatenanfang gehenden Sekanten in gleicher Weise harmonisch geteilt werden, die Gleichung:

4) $$Dx + Ey + F = 0,$$

d. i. die Gleichung einer geraden Linie. Hieraus folgt, dass sich zu jedem in der Ebene eines Kegelschnittes gegebenen Punkte eine

Gerade finden lässt, welche die Eigenschaft besitzt, in Verbindung mit dem Kegelschnitte alle den Punkt enthaltenden Sekanten harmonisch zu teilen. Man hat einem solchen Punkte und der zugehörigen Geraden in ihrer Zusammengehörigkeit die Benennungen Pol und Polare gegeben; Nr. 4) ist die Gleichung der Polare für den Koordinatenanfang als Pol. Konstruktiv kann die Polare durch harmonische Teilung zweier durch den Pol gehenden Sekanten gefunden werden.

In der gefundenen Eigenschaft der Kegelschnitte liegt ein Mittel, zu fünf gegebenen Peripheriepunkten einen sechsten zu finden. Legt man nämlich durch vier dieser Punkte zwei sich schneidende Gerade, so lässt sich, wenn man den Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden als Pol betrachtet, die zugehörige Polare mittels der in § 8 unter IV. gefundenen Resultate mit blosser Anwendung des Lineals konstruieren. Wird dann durch den Pol eine Gerade nach dem fünften Kegelschnittspunkte gezogen, so muss auch diese durch die Polare und den Kegelschnitt harmonisch geteilt werden, wonach es leicht ist, den zweiten Durchschnittspunkt dieser Geraden und des Kegelschnittes, also einen sechsten Punkt der Kurve aus fünf gegebenen zu ermitteln.

Ausser der angegebenen konstruktiven Verwendung folgen aus der gegenseitigen Abhängigkeit eines Poles und der zugehörigen Polare noch einige bemerkenswerte Eigenschaften, welche im folgenden dargelegt werden sollen.

Wird ein ausserhalb des Kegelschnittes gelegener Punkt als Pol angenommen, so gehen die Sekanten bei fortgesetzter Drehung um den Pol an zwei Stellen in Tangenten über. In den Berührungspunkten fallen dann zwei konjugierte harmonische Punkte zusammen, folglich muss der in jedem andern Falle dazwischen gelegene dritte harmonische Punkt auch damit zusammenfallen, und die Polare stellt die dem Pole zugehörende Berührungssehne dar. Wir schliessen hieraus, dass die auf Seite 78 in Fig. 24 und 25 für den Kreis gegebenen Tangentenkonstruktionen überhaupt für alle Linien zweiten Grades Anwendung finden. Diese Bemerkungen werden bestätigt, wenn wir die Gleichung der Polare eines beliebigen Punktes aufsuchen und dieselbe mit den für die Berührungssehnen der einzelnen Kegelschnitte gefundenen Gleichungen zusammenhalten.

Verlegen wir den Koordinatenanfang mit paralleler Verschiebung der Achsen in einen Punkt $x_1 y_1$, so ist, wenn die neuen veränderlichen Koordinaten mit ξ und η bezeichnet werden,

$$x = \xi + x_1, \qquad y = \eta + y_1$$

zu setzen, und wir erhalten aus Nr. 1):

$$\begin{gathered} A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + 2\,C\xi\eta \\ + 2\,(Ax_1 + Cy_1 + D)\,\xi + 2\,(Cx_1 + By_1 + E)\,\eta \\ + Ax_1{}^2 + By_1{}^2 + 2\,Cx_1y_1 + 2\,Dx_1 + 2\,Ey_1 + F = 0. \end{gathered}$$

Hieraus lässt sich die Gleichung der Polare des Punktes $x_1 y_1$, welcher nach der Verschiebung Koordinatenanfang ist, in der Form der Gleichung 4) aufstellen. Kehren wir dabei zugleich zum ursprünglichen Systeme zurück, indem wir wieder

$$\xi = x - x_1, \qquad \eta = y - y_1$$

setzen, so folgt, wenn wir noch das von ξ und η freie Glied in

$$(Ax_1 + Cy_1 + D)\,x_1 + (Cx_1 + By_1 + E)\,y_1 + Dx_1 + Ey_1 + F$$

zerlegen, nach gehöriger Hebung als Gleichung der Polare für den Pol $x_1 y_1$:

$$5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(Ax_1 + Cy_1 + D)\,x + (Cx_1 + By_1 + E)\,y \\ &\qquad + (Dx_1 + Ey_1 + F) = 0. \end{aligned} \right.$$

Ist nun die Linie zweiten Grades eine Parabel, so geht, wenn durch geeignete Transformation der Koordinaten ihre Gleichung in

$$y^2 = 2px$$

umgestaltet wird, Nr. 5) in

$$6) \qquad y_1 y = p\,(x + x_1)$$

über; für den Fall einer Ellipse oder Hyperbel folgt aus

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

für die Polare:

$$7) \qquad \frac{x_1 x}{a^2} \pm \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Die Gleichungen 6) und 7) gehören bekanntlich der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ oder seiner Berührungssehne an, je nachdem dieser Punkt auf der Peripherie des Kegelschnittes oder ausserhalb der von ihr begrenzten Fläche gelegen ist; dieselben Bedeutungen hat daher auch die Gleichung 5) für die durch die allgemeine Gleichung 1) repräsentierte Linie zweiten Grades.

Es bleibt noch übrig, die Eigenschaften der Polare für den Fall ausfindig zu machen, wenn der Pol innerhalb der vom Kegelschnitt begrenzten Fläche gelegen ist. Man gelangt hierzu durch die folgende Betrachtung.

Die in Nr. 5) aufgestellte Gleichung aller dem Kegelschnitte 1) zugehörigen Polaren lässt sich mit geänderter Ordnung der Glieder in der Form

$$8)\qquad \begin{cases} (Ax + Cy + D)\,x_1 + (Cx + By + E)\,y_1 \\ \qquad + (Dx + Ey + F) = 0 \end{cases}$$

schreiben, welche sich von der Gleichung 5) nur dadurch unterscheidet, dass x und x_1, y und y_1 ihre Stellen gewechselt haben. Die hierin begründete zulässige Vertauschung der Koordinaten x_1 und y_1 mit x und y zeigt, da erstere dem Pole, die letzteren irgend einem Punkte der zugeordneten Polare angehören, dass, wenn man einen Punkt der Polare zum Pol macht, der ursprüngliche Pol auf der zugehörigen neuen Polare liegen muss. Beachtet man nun, dass in Nr. 5) die Werte von x_1 und y_1 so gewählt werden können, dass die Koeffizienten von x und y und das von x und y freie Glied in irgend einem gegebenen Verhältnisse stehen, wonach jede Gerade in der Ebene des Kegelschnittes zur Polare werden kann, so folgt hieraus der Satz: Sämtliche Polaren der Punkte einer Geraden schneiden sich in ein und demselben Punkte, nämlich im Pole jener Geraden. Durch Umkehrung dieses Satzes ergiebt sich: Die Pole aller Geraden, welche durch ein und denselben Punkt hindurchgehen, liegen in einer geraden Linie, nämlich in der Polare ihres Durchschnittspunktes.

Wir haben oben gesehen, dass die Polare eines ausserhalb eines Kegelschnittes gelegenen Punktes die zugehörige Berührungssehne darstellt. Legt man daher durch einen Punkt im Innern der Kurve Sehnen, so bildet der Durchschnittspunkt jedes durch die Enden einer solchen Sehne gehenden Tangentenpaares den Pol dieser Geraden. Durch Verbindung dieser Bemerkung mit dem vorhergehenden Lehrsatze erhalten wir für die Polare eines Punktes innerhalb einer Linie zweiten Grades die Eigenschaft, dass sie den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte aller derjenigen Tangentenpaare abgiebt, deren Berührungssehnen sich im zugehörigen

Pole schneiden. Wählt man als Beispiel eines solchen Punktes einen Brennpunkt, so lässt sich aus der Gleichung 4) des § 13 leicht herleiten, dass die zugeordnete Direktrix seine Polare darstellt. Werden daher von beliebigen Punkten der Direktrix eines Kegelschnittes Tangenten an die Kurve gelegt, so gehen die Berührungssehnen dieser Tangenten sämtlich durch den zugehörigen Brennpunkt. Durch Umkehrung dieses Satzes lassen sich Punkte der einem Brennpunkte zugehörigen Direktrix konstruktiv ermitteln.

§ 36.

Gleichung der Linien zweiten Grades in Polarkoordinaten.

Nachdem wir bei allen früheren über Linien zweiten Grades geführten Untersuchungen uns fast ausschliesslich der Parallelkoordinaten bedient haben, wollen wir zum Schlusse unserer Betrachtungen noch die Gleichung dieser Linien in Polarkoordinaten aufstellen. Wir wählen, um zu Resultaten von möglichst allgemeiner Geltung zu gelangen, einen ganz beliebigen Punkt in der Ebene einer Linie zweiten Grades zum Koordinatenanfang oder Pol (der hier nicht mit dem im vorigen Paragraphen angewendeten Begriffe desselben Namens verwechselt werden darf) und eine in beliebiger Richtung hindurch gelegte Gerade zur Achse der Polarkoordinaten, und verbinden hiermit ein rechtwinkliges Parallelkoordinatensystem, in welchem bei gleichem Anfangspunkte die positive Seite der x-Achse mit der Polarachse zusammenfällt. Von einer für letzteres System geltenden Gleichung gelangen wir bekanntlich zur Gleichung für Polarkoordinaten durch die Substitutionen:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Werden diese Werte in die allgemeine Gleichung der Linien zweiten Grades eingesetzt, so ergiebt sich als allgemeinste Form der Gleichung dieser Linien in Polarkoordinaten:

$$1) \quad \begin{cases} (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi)\,r^2 \\ \quad + 2(D\cos\varphi + E\sin\varphi)\,r + F = 0. \end{cases}$$

Einfachere Gleichungsformen sind durch dem Zwecke der Vereinfachung entsprechend gewählte Lage des Koordinatenanfanges und der Polarachse zu erzielen.

Wird in 1) auf r reduziert, so entsteht:

2) $$r = -\frac{D\cos\varphi + E\sin\varphi \pm \Omega}{A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi},$$

wobei Ω als Abkürzung für die Quadratwurzel der Diskriminante gebraucht, also

3) $$\Omega = \sqrt{(D\cos\varphi + E\sin\varphi)^2 - (A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + 2C\sin\varphi\cos\varphi)F}$$

oder

4) $$\Omega^2 = (D^2 - AF)\cos^2\varphi + (E^2 - BF)\sin^2\varphi + (DE - CF)\sin 2\varphi$$

gesetzt ist. Soll die Gleichung 1) eine geometrische Deutung haben, so muss Ω reell, also Ω^2 positiv sein. Eine wesentliche Vereinfachung tritt hierbei ein, wenn die Bedingungen

5) $$\begin{cases} D^2 - AF = E^2 - BF, \\ DE - CF = 0 \end{cases}$$

Anwendung finden, weil dann die Wurzelgrösse Ω unabhängig von dem veränderlichen Winkel φ wird. Man erhält nämlich in diesem Falle aus Nr. 4):

6) $$\Omega^2 = D^2 - AF = E^2 - BF,$$

d. i. einen konstanten Wert.

Zur Ermittelung der Lage, welche der Koordinatenanfang haben muss, damit diese Bedingungen erfüllt werden, kehren wir zum rechtwinkligen Systeme zurück. Wird in der für dieses Koordinatensystem geltenden allgemeinen Gleichung der Linie zweiten Grades mit F multipliziert, so lässt sich das hierdurch entstehende Resultat

$$AFx^2 + BFy^2 + 2CFxy + 2DFx + 2EFy + F^2 = 0,$$

wenn man beiderseitig den Ausdruck

$$D^2x^2 + E^2y^2$$

addiert, auf die Form

$$D^2x^2 + E^2y^2 + 2CFxy + 2DFx + 2EFy + F^2$$
$$= (D^2 - AF)\,x^2 + (E^2 - BF)\,y^2$$

bringen, und hieraus wird bei Geltung der Bedingungen 5):

$$D^2x^2 + E^2y^2 + 2DExy + 2DFx + 2EFy + F^2$$
$$= (D^2 - AF)\,(x^2 + y^2),$$

oder nach einfacher Umgestaltung:

7) $$x^2 + y^2 = \frac{(Dx + Ey + F)^2}{\Omega^2}.$$

Diese Gleichungsform muss also der Linie zweiten Grades in rechtwinkligen Koordinaten angehören, wenn in der Gleichung für Polarkoordinaten die erzielte Vereinfachung eintreten soll.

Wird in 7) eine neue Konstante ε eingeführt, welche an Ω durch die Relation

$$\Omega^2 = \frac{D^2 + E^2}{\varepsilon^2}$$

gebunden ist, so geht diese Gleichung über in

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \cdot \frac{(Dx + Ey + F)^2}{D^2 + E^2},$$

und hieraus entsteht, wenn wir

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$\frac{(Dx + Ey + F)^2}{D^2 + E^2} = z^2$$

setzen,

$$r^2 = \varepsilon^2 z^2,$$

oder in der ersten Potenz bei Voraussetzung positiver r und z:

$$8) \qquad r = \varepsilon z.$$

Aus § 6 Nr. 11) wird leicht hergeleitet, dass hierin z die Entfernung des Kurvenpunktes xy von einer Geraden ausdrückt, deren Gleichung

$$Dx + Ey + F = 0$$

lautet, d. i. mit Rücksicht auf Nr. 4) des vorhergehenden Paragraphen die Entfernung von der dem Koordinatenanfange zugehörigen Polare. Da nun r den Abstand desselben Punktes xy vom Koordinatenanfange darstellt, so folgt aus Vergleichung von 8) mit § 13 Nr. 1), dass der Pol, für welchen die Polargleichung einer Linie zweiten Grades die gewünschte einfachere Form erlangt, ein Brennpunkt, seine Polare die zugeordnete Direktrix sein muss.

Nehmen wir jetzt, um diese einfachere Form zur Anwendung zu bringen, einen Brennpunkt als Koordinatenanfang, so kann die zugehörige Gleichung in Polarkoordinaten aus 1) oder 2) hergeleitet werden, indem man die in 5) aufgestellten Bedingungen darin einführt, was im wesentlichen darauf hinauskommt, die Gleichung 7) in Polarkoordinaten umzusetzen. Da wir jedoch bereits wissen, dass hier keine anderen Linien als Kegelschnitte in Frage kommen, so gelangen wir einfacher zum Ziele, wenn wir zur Gleichung 3) des § 13 zurückgehen, und in derselben, um den Brennpunkt zum Kordniatenanfang zu machen,

$$x - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon} \text{ durch } x, \text{ also } x + \frac{d}{1+\varepsilon} \text{ durch } x + d$$

und ausserdem noch d durch $p : \varepsilon$ ersetzen.

Mittels einfacher Umgestaltung gewinnt diese Gleichung die Form:

$$x^2 + y^2 = p^2 + 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2,$$

wobei bekanntlich p den Halbparameter und ε die numerische Excentricität bedeutet. Man erhält hieraus:

$$r^2 = (p + \varepsilon x)^2,$$

und hieraus wieder, wenn man die Leitstrahlen solcher Punkte, welche von dem zunächst am Brennpunkte befindlichen Scheitel aus nach der Seite der positiven x hin gelegen sind, als positive Grössen in Rechnung zieht,

9) $$r = p + \varepsilon x^*.$$

Denken wir uns nun durch den Brennpunkt als Anfangspunkt der Polarkoordinaten die Polarachse in beliebiger Richtung gelegt, so dass sie mit der jetzigen Achse der x einen in gleicher Drehrichtung mit dem Winkel φ gemessenen Winkel α einschliesst, so ist

$$x = r \cos(\varphi + \alpha)$$

zu setzen, wodurch die aus Koordinaten beiderlei Art gemischte Gleichung 9) in

$$r = p + \varepsilon r \cos(\varphi + \alpha)$$

übergeht. Wird hierin auf r reduziert, so ergiebt sich

10) $$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)}$$

als allgemeine Gleichung der Kegelschnitte für jedes Polarkoordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit einem Brennpunkte zusammenfällt. Soll die Polarachse mit der die Brennpunkte enthaltenden Kegelschnittsachse identisch sein, so hat man, wenn die Polarwinkel von dem Radiusvektor desjenigen Scheitels aus gezählt werden, welcher dem als Anfang gewählten Brennpunkte zunächst

* Dieselbe Gleichung kann, wenn wir sie mit Einführung des zwischen Brennpunkt und Direktrix befindlichen Abstandes d in der Form

$$r = \varepsilon(d + x)$$

schreiben, auch unmittelbar aus § 13 Nr. 1) hergeleitet werden.

liegt, $\alpha = 180^0$ zu setzen; zählt man dagegen von der entgegengesetzten Richtung aus, so wird $\alpha = 0$. Im ersteren Falle erhält die Gleichung 10) die Gestalt:

$$11)\qquad r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

im zweiten geht sie über in:

$$12)\qquad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Für den speziellen Fall der Parabel, wo $\varepsilon = 1$ ist, wird die erste Gleichung zu

$$13)\qquad r = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{1}{2} \varphi},$$

die zweite erlangt die Form:

$$14)\qquad r = \frac{p}{2 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi}.$$

Von den beiden letzten Gleichungen lässt besonders die erstere eine einfache geometrische Deutung zu, welche zur Konstruktion von Parabelpunkten benutzt werden kann.

Sowie die analytische Untersuchung der für Parallelkoordinaten aufgestellten Gleichungen der Linien zweiten Grades zur Ermittelung geometrischer Eigenschaften dieser Linien angewendet wurde, so kann in ähnlicher Weise auch mit der Gleichung für Polarkoordinaten operiert werden. Wir beschränken uns in dieser Hinsicht auf folgende zwei Erörterungen, die sich am einfachsten an die Form der Gleichung 10) anschliessen.

I. Sind r und φ, r' und φ' die Koordinaten der Endpunkte einer Sehne, die durch den Brennpunkt hindurchgeht, welcher den Anfangspunkt des Polarkoordinatensystems bildet, so ist, da r und r' nach entgegengesetzten Richtungen liegen:

$$\varphi' = \varphi + 180^0.$$

Aus 10) folgt dann:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)}{p},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1 + \varepsilon \cos(\varphi + \alpha)}{p},$$

und hieraus wieder:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)=\frac{1}{p}.$$

Dies giebt den Satz: **Jede durch einen Brennpunkt eines Kegelschnittes gelegte Sehne wird in diesem Punkte so geteilt, dass das harmonische Mittel ihrer beiden Abschnitte konstant, nämlich dem Halbparameter gleich ist.**

II. Beachten wir, dass die Gleichung 10) drei beständige Grössen α, ε und p enthält, so zeigt sich sofort, dass zur Bestimmung eines Kegelschnittes, sobald ein Brennpunkt bekannt ist, noch drei von einander unabhängige Bedingungen hinzutreten müssen. Angenommen nun, es seien drei Peripheriepunkte gegeben, so gilt für jeden dieser Punkte eine Gleichung, welche die Form von Nr. 10) besitzt, und, wie bereits oben angegeben wurde, in der Gestalt

$$r=p+\varepsilon r\cos(\varphi+\alpha)$$

geschrieben werden kann. Hieraus folgt, wenn man $\cos(\varphi+\alpha)$ entwickelt und die Abkürzungen

$$15)\qquad \varepsilon\cos\alpha=\beta,\qquad \varepsilon\sin\alpha=-\gamma$$

anwendet,

$$r=p+\beta r\cos\varphi+\gamma r\sin\varphi.$$

Nimmt man hierauf noch in der bekannten Weise ein rechtwinkliges System zu Hilfe, für welches die Beziehungen

$$r\cos\varphi=x,\qquad r\sin\varphi=y$$

gelten, so entsteht die Gleichung:

$$16)\qquad r=p+\beta x+\gamma y.$$

Durch jeden der gegebenen Punkte sind drei zusammengehörige Werte von r, x und y bestimmt; mittels dreier Punkte können also drei Gleichungen von der Form 16) aufgestellt werden, aus denen p, β und γ mit Benutzung der gewöhnlichen Eliminationsmethoden zu berechnen sind. Man erhält dabei eindeutige reelle Werte, weil die zur Berechnung vorliegenden Gleichungen in Beziehung auf die Unbekannten dem ersten Grade angehören. Aus den Werten von β und γ erlangt man endlich die in der Gleichung 10) enthaltenen beständigen Grössen ε und α mittels der aus 15) folgenden Relationen:

$$17) \qquad \varepsilon^2 = \beta^2 + \gamma^2, \qquad \tan\alpha = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

Diese Werte sind wieder unzweideutig bestimmt, weil ε seiner Bedeutung zufolge nur einen positiven Wert erhalten kann, der Quadrant aber, in welchem der Winkel α gelegen ist, aus den durch die Gleichungen 15) gegebenen Vorzeichen des Sinus und Cosinus dieses Winkels folgt.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich der Satz: Durch drei Punkte kann nur ein Kegelschnitt gelegt werden, wenn einer seiner Brennpunkte bekannt ist. Dieser Satz ist besonders in der Astronomie für die Theorie der Planetenbewegung von Wichtigkeit.

Neuntes Kapitel.

Linien höherer Grade.

---

§ 37.

Allgemeine Bemerkungen.

Die Ermittelung der Eigenschaften solcher Linien, bei denen die Koordinaten der einzelnen Punkte für ein beliebiges Parallelkoordinatensystem durch eine Gleichung dritten, vierten Grades u. s. f. an einander gebunden sind, wird um so umständlicher und schwieriger, je höher der Grad der Gleichung ist. Es ist gelungen, eine reiche Fülle von allgemeinen Sätzen aufzustellen, die sich insbesondere auf die Tangenten höherer Kurven, auf ihre Durchschnittspunkte mit Geraden (entsprechend den Polarensätzen bei den Kegelschnitten), sowie mit Kurven niederen und gleichen Grades beziehen. Die Einteilung der Linien eines bestimmten höhern Grades nach gewissen Typen (sowie die Kegelschnitte in Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln zerfallen) und die Untersuchung der besonderen Eigenschaften der einzelnen Typen begegnet grossen Schwierigkeiten wegen des Formenreichtums bei Kurven höheren Grades; derselbe ist bereits bei den Kurven dritten Grades unvergleichlich grösser, als bei den Kegelschnitten, zufolge der grösseren Anzahl der in einer kubischen Gleichung enthaltenen Konstanten.*

Wir werden uns darauf beschränken, neben einigen allgemeinen Bemerkungen wenige Formen als Beispiele für die zunächst zu verwendenden Untersuchungsmethoden herauszugreifen. Zuvor haben

---

* Die Mitteilung der Untersuchungsmethoden, welche tiefer in die Erkenntnis der bis jetzt entdeckten Eigenschaften der Kurven höherer Grade einführen, liegt ausserhalb der für dieses Buch gezogenen Grenzen; wir verweisen die Leser, welche weiter vordringen wollen, auf die Werke: Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871; Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven, 2. Aufl., Leipzig 1882; Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Leipzig 1876.

wir einige Begriffsbestimmungen und Bezeichnungen vorauszuschicken, von denen im folgenden mehrfach Anwendung gemacht werden soll.

Sind zwei veränderliche Grössen x und y durch irgend eine Gleichung von einander abhängig gemacht, so dass zu jedem willkürlich angenommenen Werte des x ein aus der Gleichung hervorgehender Wert von y gehört, so nennt man, abgesehen von der besonderen Form der Gleichung, y eine Funktion von x. Zur Bezeichnung der Funktionen bedient man sich beliebiger Buchstaben, z. B. F, f, φ, ψ u. s. f.; die Gleichungen

$$y = F(x), \quad y = f(x), \quad y = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

sagen daher nichts weiter aus, als dass jedem willkürlichen Werte des x ein von der Gleichung abhängiger Wert von y entspricht. $F(x)$, $f(x)$ u. s. f. bedeuten hierbei beliebige nicht näher bestimmte Rechnungsausdrücke, welche die veränderliche Grösse x in sich enthalten. Jede Gleichung von der Art, wie

$$y = f(x),$$

kann, solange den x reelle Werte von y zugehören, welche die Eigenschaft besitzen, sich gleichzeitig mit x stetig zu ändern, ebenso wie bei den vorgelegten Beispielen ersten und zweiten Grades, wieder in einer Ebene mittels Parallelkoordinaten durch den stetigen Verlauf einer Linie dargestellt werden.

In ganz ähnlicher Weise bezeichnet man mit $F(x, y)$, $f(x, y)$ u. s. w. solche nicht näher bestimmte Ausdrücke, welche zwei veränderliche Grössen x und y enthalten und die wieder Funktionen dieser Grössen genannt werden. Gleichungen von der Form

$$F(x, y) = 0, \quad f(x, y) = 0$$

sind das allgemeine Symbol aller auf Null gebrachten unentwickelten Gleichungen zwischen den Variabeln x und y.

Enthalten die Funktionen $f(x)$ oder $F(x, y)$ in Beziehung auf ihre veränderlichen Grössen keine anderen Operationen, als die des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens, Dividierens und Potenzierens mit konstanten Exponenten, worin auch das Wurzelausziehen mit begriffen ist, so heissen sie algebraische Funktionen. Die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

stellt dann eine algebraische Gleichung dar und eine dadurch repräsentierte krumme Linie wird durch Übertragung des Namens eine algebraische Kurve genannt. Durch bekannte Hilfsmittel

der Algebra kann jede algebraische Gleichung zwischen x und y so umgeformt werden, dass ihr auf Null gebrachter Ausdruck eine Summe von Gliedern von der Form

$$Cx^p y^q$$

enthält, wobei C einen beliebigen beständigen Koeffizienten bedeutet, die konstanten Exponenten p und q dagegen positive ganze Zahlen, Null mit eingeschlossen, ausdrücken. Ist diese Umgestaltung eingetreten, so heisst die linke Seite der Gleichung 1) eine ganze rationale Funktion von x und y; die Summe $p+q$ giebt die Dimension an, welcher das Glied $Cx^p y^q$ angehört, und die höchste in der Gleichung vorkommende Dimension bestimmt bekanntlich den Grad der Gleichung.

Was nun die Linien höherer Grade betrifft, so wurde bereits bemerkt, dass unter einer Linie n^{ten} Grades eine solche zu verstehen sei, deren für Parallelkoordinaten aufgestellte Gleichung diesem Grade angehört. Die allgemeine Form dieser Gleichung lässt eine doppelte Anordnung zu, je nachdem man diejenigen Glieder zusammenfasst, welche dieselbe Potenz einer Veränderlichen, z. B. der Abscisse x, enthalten, oder die Glieder gleicher Dimensionen kombiniert. Im ersteren Falle hat man

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^n + (A_1 y + B)\, x^{n-1} + (A_2 y^2 + B_1 y + C)\, x^{n-2} \\ \quad + \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + (A_{n-1} y^{n-1} + B_{n-2}\, y^{n-2} + \ldots + L_1 y + M)\, x \\ \quad + (A_n y^n + B_{n-1}\, y^{n-1} + \ldots + M_1 y + N) = 0, \end{array}\right.$$

im andern besitzt die Gleichung die Form:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^n + A_1 x^{n-1} y + A_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + A_{n-1}\, x y^{n-1} + A_n\, y^n \\ \quad + Bx^{n-1} + B_1 x^{n-2} y + \ldots + B_{n-2}\, x y^{n-2} + B_{n-1}\, y^{n-1} \\ \quad + \;\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + (Lx^2 + L_1 xy + L_2 y^2) + (Mx + M_1 y) + N = 0. \end{array}\right.$$

Beliebig viele der Koeffizienten A, B, C u. s. f. können hierin gleich Null sein, nur selbstverständlich nicht gleichzeitig alle diejenigen, welche der höchsten Dimension angehören.

Sollen unter diesen Linien nicht immer wieder alle diejenigen auftreten, welche bereits in niederen Graden vorkommen, wie wir z. B. unter den Linien zweiten Grades geradlinige Gebilde aufgefunden haben, so müssen wir bei der geometrischen Deutung algebraischer Gleichungen aus jedem Grade diejenigen ausscheiden,

welche sich in ganze rationale Faktoren niederer Grade zerlegen lassen. Sobald nämlich

$$4)\qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0$$

die Gleichungen zweier Linien darstellen, so wird der durch Multiplikation dieser beiden Ausdrücke entstehenden Gleichung

$$5)\qquad \varphi(x, y) \,.\, \psi(x, y) = 0$$

durch die Koordinaten eines jeden Punktes genügt, welcher auf einer von jenen beiden Linien gelegen ist, indem dann allemal ein Faktor von 5) zu Null wird, während der andere Faktor, wenn es sich um ganze rationale Funktionen handelt, bei endlich bleibenden x nicht unendlich werden kann. Die letzte Gleichung enthält also beide in Nr. 4) enthaltenen Linien gleichzeitig in sich. Sind nun $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei algebraische Funktionen des p^{ten} und q^{ten} Grades, so giebt Nr. 5) eine algebraische Gleichung des $(p+q)^{\text{ten}}$ Grades, welche jedoch nur durch eine Verbindung zweier Linien niederer Grade dargestellt wird. So drückt z. B. unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems die dem dritten Grade angehörende Gleichung

$$x^3 - y^3 - x^2 y + x y^2 - k^2 x + k^2 y = 0$$

einen Kreis nebst einer Geraden aus, weil sie in

$$(x^2 + y^2 - k^2)(x - y) = 0$$

zerlegt werden kann; die Gleichung

$$x^3 + x y^2 - 2 a y^2 = 0$$

dagegen, bei welcher keine solche Zerlegung möglich ist, repräsentiert eine eigentliche Linie dritten Grades. — Bei Anwendung der erwähnten Ausschliessung fallen also z. B. alle dem ersten Grade angehörenden geradlinigen Gebilde aus; es bleiben daher nur krumme Linien für die höheren Grade übrig, wenn wir noch von allen solchen Gleichungen absehen, die entweder nur einzelne Punkte darstellen oder gar keine geometrische Bedeutung haben.*

Beschränken wir uns nach dem Vorhergehenden auf die Kurven höherer Grade, so lässt sich rücksichtlich ihrer der allgemeine Satz aufstellen, dass jede Linie n^{ten} Grades von einer Geraden

* Der erste dieser beiden Fälle findet statt, sobald die Gleichung nur für einige bestimmte Werte von x reelle Werte von y giebt; der andere, wenn kein reeller Wert von x reelle Werte von y zulässt. Beispiele hierfür haben wir bereits beim zweiten Grade kennen gelernt.

in nicht mehr als n Punkten geschnitten werden kann. Um diesen Satz zu beweisen, können wir uns zuvor das Koordinatensystem so verlegt denken, dass die zu untersuchende Gerade zur Abscissenachse wird. Der Allgemeinheit der Untersuchung geschieht hierdurch kein Eintrag, weil bei der Transformation der Koordinaten der Grad der Gleichung ungeändert bleibt. Setzen wir nun für die gemeinschaftlichen Punkte mit Rücksicht auf die Gleichung der x-Achse in der allgemeinen Gleichung 2) oder 3) $y=0$, so bleibt:

$$6)\qquad Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0.$$

Dieser Bedingung kann auf doppelte Weise genügt werden, entweder durch jedes mögliche x, wenn alle Koeffizienten A, B, $C \ldots N$ einzeln gleich Null sind, oder ausserdem nur durch solche x, welche sich als Wurzeln von Nr. 6) bewähren. Im ersteren Falle besitzen alle von Null verschiedenen Glieder der allgemeinen Gleichung 2) den Faktor y; die Gleichung selbst zerfällt also in zwei Faktoren, von denen einer dem nächst niederen Grade angehört, der andere die Gleichung der Abscissenachse $y=0$ darstellt. Es kann also in diesem Falle von einer eigentlichen Linie n^{ten} Grades nicht die Rede sein. Bleiben daher für eine solche Kurve die x der gesuchten Durchschnittspunkte lediglich als Wurzeln der Gleichung 6) zu bestimmen, so sind nach der Form dieser Gleichung höchstens n von einander verschiedene reelle Werte von x möglich; es kann also auch nicht eine grössere Zahl von Durchschnittspunkten vorhanden sein. Kleiner kann die Anzahl dieser Punkte sein, wenn einige Koeffizienten der Anfangsglieder in 6) gleich Null sind oder wenn diese Gleichung gleiche oder imaginäre Wurzeln enthält.

Durch Anwendung der Theorie der algebraischen Gleichungen höherer Grade mit zwei Unbekannten wird der vorhergehende Satz dahin erweitert, dass eine Linie m^{ten} Grades und eine Linie n^{ten} Grades höchstens mn Punkte gemein haben.

Wir wenden uns nach diesen Vorbemerkungen zur Betrachtung einiger besonderer Linien höherer Grade.

§ 38.

Parabolische Kurven.

Zu besonders einfachen Linien höherer Grade gehören diejenigen, deren entwickelte Gleichung eine der beiden veränder-

lichen Koordinaten nur in der ersten Potenz enthält, für welche also z. B. die Ordinate eine ganze rationale Funktion der Abscisse bildet. Die Gleichung muss dann die Form

$$1)\qquad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n$$

besitzen, oder wenigstens durch Umgestaltung auf diese Form gebracht werden können. Linien dieser Art werden parabolische Kurven genannt; Nr. 1) ist die allgemeine Gleichung einer parabolischen Kurve n^{ten} Grades, wobei natürlich vorausgesetzt wird, dass A_n einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Was die Gestalt solcher Linien betrifft, so kann sie je nach dem Grade der Gleichung und der Grösse der Koeffizienten mannigfach wechseln; immer aber bleibt das Merkmal gemeinschaftlich, dass die Linie aus einem zu beiden Seiten der y-Achse sich ins Unendliche erstreckenden zusammenhängenden Zuge besteht, weil aus Nr. 1) zu jedem beliebigen x ein zugehöriges reelles, sich gleichzeitig mit x stetig änderndes y berechnet werden kann. Da die Gleichung hierbei jedesmal einen einzigen Wert von y giebt, so folgt, dass jede Parallele zur y-Achse die parabolische Kurve nur in einem Punkte schneidet.

Besonders wichtig für die praktische Verwendung der parabolischen Kurven ist die Aufgabe, eine Linie dieser Art durch gegebene Peripheriepunkte zu bestimmen. Was zunächst die Zahl der hierzu nötigen Punkte betrifft, so lässt sich leicht übersehen, dass $(n+1)$ Punkte gegeben sein müssen, sobald für die Gleichungsform 1) die Lage der Koordinatenachsen bestimmt ist und die Kurve dem n^{ten} Grade angehört. Da nämlich unter diesen Bedingungen ihre Gleichung die $(n+1)$ Konstanten A_0, A_1, $A_2, \ldots A_n$ enthält, so muss zur Ermittelung dieser beständigen Grössen eine gleiche Anzahl von Bedingungsgleichungen vorhanden sein. Aus den Koordinaten eines jeden gegebenen Punktes folgt aber eine Bedingungsgleichung von der Form 1). Durch Anwendung der gewöhnlichen Eliminationsmethoden findet sich dann für jede der Unbekannten ein eindeutiger reeller Wert, weil die obige Gleichung in Beziehung auf ihre Koeffizienten dem ersten Grade angehört. Es ist hierbei nicht ausgeschlossen, dass die Koeffizienten der höchsten Potenzen auch den Wert Null erhalten können. Dann ist die entstehende Gleichung von einem niederern Grade und es ist überhaupt nicht möglich, durch die gegebenen Punkte eine pa-

rabolische Kurve n^{ten} Grades zu legen. So wird man z. B. stets auf eine Gleichung vom ersten Grade stossen, wenn die gegebenen Punkte sämtlich einer Geraden angehören.

Soll nun bei vorausbestimmter Lage der Koordinatenachsen eine parabolische Kurve durch n Punkte $x_1 y_1,\ x_2 y_2,\ x_3 y_3, \ldots x_n y_n$ gelegt werden, so kann nach dem Vorhergehenden ihre Gleichung den Grad $n-1$ nicht übersteigen. Es lässt sich daher im voraus die allgemeine Form

$$2)\qquad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}$$

festsetzen, wofür dann mittels der Koordinaten der gegebenen Punkte in der oben angeführten Weise die Koeffizienten berechnet werden können. Da jedoch eine solche Rechnung nicht immer frei von Weitläufigkeiten ist, so erscheint es zweckmässig, ein für allemal eine Formel von allgemeiner Geltung für dergleichen Fälle festzustellen. Man gelangt zu einer solchen durch die folgende Betrachtung.

Da aus den gegebenen Punkten nur eine Gleichung von der Form 2) folgen kann, so muss eine auf irgend einem Wege erhaltene Gleichung dieser Art das gewünschte Resultat liefern, wenn sie den Koordinaten aller n Punkte Genüge leistet. Setzen wir nun

$$3)\qquad y = X_1 y_1 + X_2 y_2 + X_3 y_3 + \ldots + X_n y_n,$$

worin $X_1,\ X_2,\ X_3, \ldots X_n$ vorläufig noch unbestimmte Funktionen von x bezeichnen, so kommt die rechte Seite dieser Gleichung in ihrer Form mit der rechten Seite von 2) in Übereinstimmung, wenn jeder der Koeffizienten $X_1,\ X_2$ u. s. f. eine ganze rationale Funktion von x vom Grade $n-1$ darstellt, oder die Form

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$$

besitzt. Durch Addition derjenigen Glieder, welche gleiche Potenzen von x enthalten, entsteht nämlich in diesem Falle eine Gleichung, deren Gestalt vollständig mit Nr. 2) übereinstimmt. Soll nun diese Gleichung den Koordinaten eines beliebigen Punktes $x_r y_r$ entsprechen, so muss in 3) für $x = x_r$ auch $y = y_r$ werden, welche Bedingung erfüllt wird, wenn hierbei die Funktionen $X_1,\ X_2, \ldots X_{r-1},\ X_{r+1}, \ldots X_n$ in Null übergehen, während $X_r = 1$ wird. Der gestellten Aufgabe wird daher genügt, wenn der beliebige Koeffizient X_r die Eigenschaft besitzt, zu Null zu werden, sobald x einen

der Werte $x_1, x_2, \ldots x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots x_n$ erlangt, dagegen für $x = x_r$ in Eins übergeht.

Wird mit Einführung einer vorläufig noch unbestimmt bleibenden beständigen Grösse k

$$X_r = k(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})\ldots(x - x_n)$$

gesetzt, so ist den beiden Bedingungen Genüge geleistet, dass X_r eine ganze rationale Funktion von x vom Grade $n - 1$ darstellt und sich in Null verwandelt, sobald man darin das x eines der gegebenen Punkte, mit Ausnahme von x_r, substituiert. Es erübrigt noch, den Faktor k so zu bestimmen, dass $X_r = 1$ wird, wenn man $x = x_r$ werden lässt. Hieraus folgt:

$$1 = k(x_r - x_1)(x_r - x_2)\ldots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})\ldots(x_r - x_n),$$

und wenn man mit dieser Gleichung in die vorhergehende dividiert, so entsteht die Formel:

$$X_r = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{r-1})(x - x_{r+1})\ldots(x - x_n)}{(x_r - x_1)(x_r - x_2)\ldots(x_r - x_{r-1})(x_r - x_{r+1})\ldots(x_r - x_n)},$$

durch welche der Wert eines der gesuchten Koeffizienten bestimmt wird. Drückt man in gleicher Weise auch die übrigen Koeffizienten aus, indem man der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots n$ setzt, so geht die Gleichung 3) über in:

$$4)\quad \begin{cases} y = \dfrac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots(x_1 - x_n)} \cdot y_1 \\ \quad + \dfrac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots(x_2 - x_n)} \cdot y_2 \\ \quad + \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)\ldots(x - x_n)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots(x_3 - x_n)} \cdot y_3 \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)\ldots(x_n - x_{n-1})} \cdot y_n. \end{cases}$$

Durch Ausführung der Multiplikationen kann in jedem speciellen Falle diese Gleichung auf die Form von Nr. 2) zurückgeführt werden. Soll z. B. die Gleichung einer parabolischen Kurve zweiten Grades*

---

* Die parabolische Kurve zweiten Grades ist eine Parabel, deren Achse parallel zur y-Achse läuft und für welche die x-Achse mit der Tangente des in der y-Achse gelegenen Peripheriepunktes gleiche Richtung hat. Man bemerkt dies, wenn man die Gleichung

gesucht werden, in welcher zu den Abscissen $x_1 = -1$, $x_2 = +1$, $x_3 = +2$ der Reihe nach die Ordinaten $y_1 = +6$, $y_2 = +2$, $y_3 = +3$ gehören, so folgt aus 4):

$$y = \frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)} \cdot 6 + \frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)} \cdot 2 + \frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(2-1)} \cdot 3,$$

und hieraus findet sich nach gehöriger Reduktion:

$$y = x^2 - 2x + 3.$$

Die Formel 4) ist insofern von besonderer Wichtigkeit, als sie, abgesehen von ihrer Bedeutung für die Theorie der parabolischen Kurven, die Lösung der algebraischen Aufgabe enthält, eine ganze rationale Funktion von x zu finden, deren Werte für n bestimmte Grössen von x bekannt sind. Sie führt bei Anwendung zu diesem Zwecke den Namen der Interpolationsformel von Lagrange.

§ 39.

Die Parabelevolute.

Nachdem wir im vorhergehenden Paragraphen eine ganze Gruppe von Linien höherer Grade betrachtet haben, gehen wir jetzt dazu über, die Gleichungen einiger besonderen häufiger vorkommenden Kurven aus gegebenen Entstehungsgesetzen zu entwickeln. Es sollen dabei solche Beispiele betrachtet werden, welche sich in einfacher Weise an die Theorie der Linien zweiten Grades anschliessen.

Der geometrische Ort aller Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Kurve wird die Evolute dieser Linie genannt; die ursprüngliche Kurve selbst führt in ihrer Beziehung zur Evolute den Namen Evolvente. Was im allgemeinen den Weg betrifft, auf welchem die Gleichung einer Evolute gefunden werden kann, so

---

auf die Form

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2$$

$$y - A_0 + \frac{A_1^2}{4A_2} = A_2 \left(x + \frac{A_1}{2A_2}\right)^2$$

bringt. Setzt man nachher mit Verschiebung des Koordinatenanfanges und Vertauschung der Achsen

$$x + \frac{A_1}{2A_2} = \eta, \qquad y - A_0 + \frac{A_1^2}{4A_2} = \xi,$$

so entsteht:

$$\eta^2 = \frac{\xi}{A_2},$$

d. i. eine Gleichung von der in § 17 Nr. 6) besprochenen Form.

müssen zuvor die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes xy als Funktionen des zugehörigen Punktes $x_1 y_1$ der Evolvente gegeben sein. Man hat in diesem Falle zwei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(x_1, y_1), \qquad y = \psi(x_1, y_1).$$

Wird hierzu die Bedingung gefügt, dass der Punkt $x_1 y_1$ auf der Evolvente liegen soll, deren Gleichung

$$F(x_1, y_1) = 0$$

sein mag, so liegen drei Gleichungen vor, aus denen die Koordinaten des besonderen Kurvenpunktes $x_1 y_1$ zu eliminieren sind. Es bleibt dann eine Gleichung zwischen x und y übrig, die sich, unabhängig von der Lage des Punktes $x_1 y_1$, auf alle Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Kurve bezieht; dieselbe ist also die Gleichung der gesuchten Evolute. — Zur Anwendung dieser Theorie stellen wir uns die Aufgabe, die Gleichung und aus dieser die Gestalt der Parabelevolute zu ermitteln.

Wird die Achse der Parabel zur x-Achse und ihre Scheiteltangente zur y-Achse genommen, so gelten nach § 18 Nr. 9) und 10) für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes die Gleichungen:

$$x = p + 3x_1, \qquad y = -\frac{y_1^3}{p^2},$$

wobei der Punkt $x_1 y_1$ als Parabelpunkt noch der Gleichung

$$y_1^2 = 2px_1$$

zu genügen hat. Berechnet man aus den beiden ersten Gleichungen x_1 und y_1, und substituiert diese Werte in der letzten Gleichung, so entsteht:

$$\left(\sqrt[3]{-p^2 y}\right)^2 = 2p\left(\frac{x-p}{3}\right),$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion:

$$1) \qquad y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(x-p)^3}{p}.$$

Die Parabelevolute ist hiernach eine Linie dritten Grades. Was ihre Gestalt betrifft, so folgt aus dem Umstande, dass in der Gleichung 1) die Ordinate nur in der zweiten Potenz vorkommt, die Symmetrie der Kurve in Beziehung auf die Parabelachse. Dabei wird y für $x < p$ imaginär, für $x = p$ ist $y = 0$, für $x > p$ dagegen besitzt y immer zwei reelle Werte, deren absolute Grösse

gleichzeitig mit x ins Unendliche wächst. Einfacher noch als aus Nr. 1) lassen sich die Eigenschaften unserer Kurve übersehen, wenn man durch parallele Verschiebung der y-Achse den Koordinatenanfang in den der x-Achse angehörenden Peripheriepunkt verlegt, welcher $x = p$ und $y = 0$ zu Koordinaten hat.* Bezeichnet man die neuen Koordinaten mit x' und y', so ist nach § 2 Nr. 1) und 2)

$$x = x' + p, \qquad y = y'$$

zu setzen. Wird nun ausserdem noch die Abkürzung

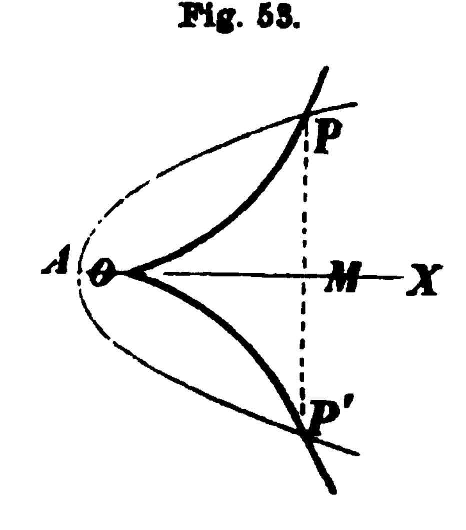
$$2) \qquad k = \tfrac{27}{8} p$$

eingeführt, so geht die Gleichung der Evolute in

$$3) \qquad k y'^2 = x'^3$$

über. Diese Form der Gleichung zeigt sofort, dass von $x' = 0$ an die absoluten Werte von y' gleichzeitig mit den x', aber in einem stärkeren Verhältnisse als diese wachsen. Die Evolute erhält hierdurch die Gestalt der Kurve POP' (Fig. 53), für welche PAP' die zugehörige Parabel darstellt. Da in letzterer, im Gegensatze zu ihrer Evolute, die Ordinaten in einem weniger starken Verhältnisse als die Abscissen wachsen, so schneiden sich die beiden Linien zu beiden Seiten der x-Achse in zwei Punkten P und P'. Für diese Punkte

Fig. 53.



gelten die Gleichungen beider Kurven, also, wenn wir zu den auf den Koordinatenanfang A bezogenen Gleichungen zurückkehren,

$$y^2 = 2px, \qquad y^2 = \tfrac{8}{27} \frac{(x-p)^3}{p},$$

woraus für die x gemeinschaftlicher Punkte die Gleichung

$$(x-p)^3 = \tfrac{27}{4} p^2 x$$

hervorgeht. Diese Gleichung hat zwar lauter reelle Wurzeln, nämlich

$$x_1 = 4p, \qquad x_2 = x_3 = -\tfrac{1}{2} p;$$

die beiden letzten sind aber in unserem Falle deshalb unzulässig, weil zu ihnen in beiden Kurven imaginäre y gehören. Es bleibt daher nur $AM = 4p = 4AO$.

* Es ist dies der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel der Parabel.

Soll die Parabelevolute unabhängig von ihrer Evolvente dargestellt werden, so eignet sich hierzu am besten die Einführung von Polarkoordinaten. Nehmen wir nämlich O zum Pol und OX zur Polarachse, so folgt aus Nr. 3):

4) $$kr^2 \sin^2 \varphi = r^3 \cos^3 \varphi,$$

und hieraus:

5) $$r = k \tan^2 \varphi \sec \varphi,$$

wonach die Leitstrahlen der einzelnen Punkte leicht konstruiert werden können.*

Mit Rücksicht auf die Form der Gleichung 3) kann die Parabelevolute einer Klasse von Linien höherer Grade zugezählt werden, in welcher man alle diejenigen Kurven zusammenfasst, deren Gleichung auf die Form $y^m = px^n$ gebracht werden kann. Man nennt solche Linien **Parabeln höherer Art**, und die jetzt untersuchte Kurve insbesondere **Neilische**** oder **semikubische Parabel**.

Es bleibt dem Leser überlassen, auf demselben Wege wie für die Parabel auch die Gleichungen der Evoluten für Ellipse und Hyperbel aufzusuchen und dieselben mit der Gestalt der Kurven, welche leicht auf konstruktivem Wege durch Darstellung von Krümmungsmittelpunkten gefunden werden kann, in Vergleichung zu bringen.

§ 40.

Fusspunktkurven.

Wenn man von einem festen Punkte aus auf die Tangenten einer gegebenen Kurve Senkrechte errichtet, also diesen Punkt auf

---

* Man darf nicht übersehen, dass beim Übergange von der Gleichung 4) zu 5) strenggenommen zwei in der Gleichung $r^2 = 0$ enthaltene Wurzeln in Wegfall gekommen sind. Es zeigt sich dies, wenn man Nr. 4) in der Form

$$r^2 (r \cos^3 \varphi - k \sin^2 \varphi) = 0$$

schreibt, wovon in der Gleichung 5) nur der zweite Faktor übrig geblieben ist. Jede durch O gehende Gerade hat daher streng genommen drei Punkte mit der Kurve gemein, von denen zwei in O zusammenfallen.

** Nach einem englischen Mathematiker, Namens **William Neil**. — Die den Kegelschnitten angehörende Parabel zweiten Grades erhält, wo Verwechslung vermieden werden soll, den Namen: **gemeine** oder **Apollonische Parabel**.

die Tangenten projiziert, so liegen die Projektionen oder die Fusspunkte der gefällten Perpendikel auf einer neuen Linie, der man den Namen **Fusspunktkurve** giebt. Der aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit einem der grossen Halbachse gleichen Radius beschriebene Kreis und der Hauptkreis der Hyperbel, die für die Parabel in die geradlinige Scheiteltangente übergehen, sind Beispiele solcher Fusspunktlinien für die in einer Linie zweiten Grades aus einem Brennpunkte gefällten Perpendikel. Wir wollen zu diesen bereits bekannten Beispielen einige andere auf die Linien zweiten Grades bezügliche hinzufügen.

Was im allgemeinen die Methode betrifft, mittels welcher die Gleichung einer Fusspunktkurve gewonnen wird, so ist sie mit der bei Aufsuchung der Evolutengleichung angewendeten in Übereinstimmung. Die Gleichungen der Tangente im Kurvenpunkte $x_1 y_1$ und der vom festen Punkte darauf gefällten Senkrechten bilden für den Fusspunkt xy zwei Gleichungen, welche mit der für x_1 und y_1 geltenden Kurvengleichung zu verbinden sind, um nach Elimination von x_1 und y_1 eine nur noch x und y enthaltende, auf sämtliche Fusspunkte bezügliche Gleichung übrig zu lassen. Dieselbe ist die Gleichung der gesuchten Fusspunktkurve.

I. Die gegebene Kurve sei eine **Parabel**, aus deren **Scheitel** die Senkrechten gefällt werden.

Wählen wir wieder die Achse der Parabel und ihre Scheiteltangente zur x- und y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet nach § 16 Nr. 11) die Gleichung der Tangente im Parabelpunkte $x_1 y_1$:

$$y_1 y = p(x + x_1),$$

und für die aus dem Scheitel darauf gefällte Senkrechte ergiebt sich nach Nr. 6) im § 6:

$$y = -\frac{y_1}{p} x.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$y_1 = -\frac{py}{x}, \qquad x_1 = -\frac{x^2 + y^2}{x}.$$

Werden diese Werte in die Parabelgleichung

$$y_1^2 = 2px_1$$

eingesetzt, so erhält man bei einfacher Umgestaltung die für alle Fusspunkte geltende Gleichung:

$$1)\qquad py^2 = -2x(x^2+y^2).$$

Die gesuchte Kurve ist hiernach eine Linie dritten Grades, welche eine zur x-Achse symmetrische Form besitzt; dabei liegt sie vollständig auf der Seite der negativen x. Mit Rücksicht auf die letzte Eigenschaft ist es bequemer, wenn beide Seiten der x-Achse so unter sich vertauscht werden, dass die positiven x auf diejenige Seite der y-Achse zu liegen kommen, auf welcher sich die Kurve befindet. Dabei geht x in $-x$ über. Wenn wir ausserdem noch die Konstante

$$2)\qquad f = \frac{p}{2},$$

d. i. nach § 14 Nr. 1) den Abstand des Parabelscheitels vom Brennpunkte oder von der Direktrix einführen, so verwandelt sich die Gleichung 1) in

$$3)\qquad fy^2 = x(x^2+y^2),$$

und hieraus ergiebt sich, wenn auf y reduziert wird,

$$4)\qquad y^2 = \frac{x^3}{f-x}.$$

Man sieht aus diesem Ausdrucke, dass y nur solange reelle Werte erhält, als x zwischen den Grenzen 0 und f enthalten ist; die Kurve liegt also gänzlich innerhalb des von der Scheiteltangente und der Direktrix der Parabel begrenzten Flächenstreifens. Innerhalb dieses Raumes wachsen die y von 0 bis ∞.

Die Grösse $f-x$ in Nr. 4) stellt den Abstand eines Kurvenpunktes von der Direktrix dar. Wird auf diesen Ausdruck reduziert, so folgt

$$f - x = \frac{x^3}{y^2},$$

ein Wert, welcher der Null beliebig nahe gebracht werden kann, da x die Grenze f nicht überschreitet, während y ins Unendliche wächst. Die Direktrix ist hiernach Asymptote der Kurve.

Gehen wir mittels der Substitutionen

$$y = r\sin\varphi,\qquad x = r\cos\varphi,\qquad x^2+y^2 = r^2$$

von Nr. 3) zu Polarkoordinaten über, so entsteht die Polargleichung

5) $$r = f \sin\varphi \tan\varphi,^*$$

welche zu einer höchst einfachen Konstruktion der in Rede stehenden Kurve hinführt. Wird nämlich in Fig. 54, wo O den Parabelscheitel und DN die Direktrix darstellt, über dem Durchmesser $OA = f$ ein Kreis gezogen, so ist, wenn $\angle AOP = \varphi$ gesetzt wird,

$$AM = f \sin\varphi,$$

folglich, da $\angle MAN = \angle AOP$,

$$MN = AM \tan\varphi = f \sin\varphi \tan\varphi,$$

und hiernach mit Rücksicht auf Nr. 5), wenn P einen Kurvenpunkt darstellt, $MN = OP$, also auch $PN = OM$. Man wird leicht bemerken, wie mit Benutzung dieser Eigenschaft beliebig viele Punkte der Kurve gewonnen werden können.

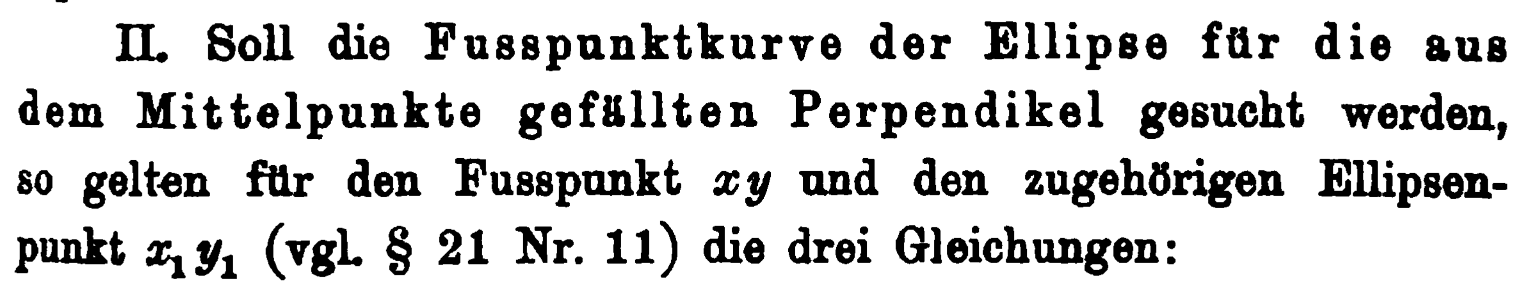


Fig. 54.

Die durch die Gleichungen 1), 3), 4) und 5) repräsentierte Linie führt den Namen Cissoide.

II. Soll die Fusspunktkurve der Ellipse für die aus dem Mittelpunkte gefällten Perpendikel gesucht werden, so gelten für den Fusspunkt xy und den zugehörigen Ellipsenpunkt $x_1 y_1$ (vgl. § 21 Nr. 11) die drei Gleichungen:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1, \qquad y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x,$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{ax}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{y_1}{b} = \frac{by}{x^2 + y^2}.$$

Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung ein, so erhält man für die Fusspunktkurve:

6) $$\frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

oder nach Reduktion auf den Nenner:

7) $$(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

---

* Hierbei sind ebenso wie in der Polargleichung der Neilischen Parabel zwei aus der Gleichung $r^2 = 0$ hervorgehende Wurzeln abgeworfen worden.

Der Umstand, dass diese Gleichung nur gerade Potenzen von x und y enthält, wonach sich zu jedem Werte der einen Koordinate gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Werte der andern ergeben, zeigt, dass die gesuchte Kurve gegen beide Achsen symmetrisch liegt, eine Eigenschaft, die auch sofort aus der Entstehung der Linie abgeleitet werden kann. Die Kurve selbst ist eine Linie vierten Grades.

Um die Form der Linie bequemer ermitteln zu können, setzen wir die Gleichung 7) in Polarkoordinaten um. Dann entsteht die Gleichung:

$$8) \qquad r^4 = a^2 r^2 \cos^2\varphi + b^2 r^2 \sin^2\varphi,$$

welche in die beiden Gleichungen

$$r^2 = 0, \qquad r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$$

zerlegt werden kann. Die erste bezeichnet den Mittelpunkt der Ellipse als einzelnen ebenfalls durch die Gleichungen 7) und 8) dargestellten Punkt; diese Lösung ist aber offenbar der vorliegenden geometrischen Aufgabe fremd, da keine Ellipsentangente durch den Mittelpunkt gehen kann; für unsere Zwecke bleibt also nur die Gleichung:

$$9) \qquad r^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi.$$

Wird hierin mit Benutzung der bekannten Relation $a^2 = b^2 + c^2$ [vgl. § 14 Nr. 9)] die lineare Excentricität c eingeführt, so ergiebt sich die Gleichung:

$$10) \qquad r^2 = a^2 - c^2 \sin^2\varphi,$$

der man auch, wenn mittels der Formel $c = \varepsilon a$ [§ 14 Nr. 8)] die numerische Excentricität ε eingeführt wird, die Form

$$11) \qquad r^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi)$$

geben kann. Aus Nr. 10) ergiebt sich folgende einfache Konstruktion der Kurve: Man lege durch einen Brennpunkt der Ellipse eine beliebige Gerade und fälle aus den Punkten, worin sie den über der grossen Achse der Ellipse beschriebenen Kreis schneidet, Senkrechte auf den zu der gewählten Geraden parallelen Durchmesser dieses Kreises; die Einfallspunkte dieser Senkrechten sind Punkte der Fusspunktkurve. Es können nämlich hierbei in Übereinstimmung mit Nr. 10) die aufeinander senkrechten Längen r und $c \sin\varphi$ als Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden, dessen Hypotenuse gleich a ist.

Um zunächst die Fusspunktkurve mit der Ellipse selbst in Vergleich zu bringen, kann der in Nr. 10) gegebene Wert von r^2 mit $a^2 - c^2 \cos^2 \varphi$ multipliziert und dividiert werden. Nach einfachen Reduktionen entsteht hierbei mit Benutzung der gegenseitigen Abhängigkeit von a, b und c das Resultat:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 + c^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}.$$

Halten wir diese Gleichung mit der für dieselbe Lage des Koordinatensystems geltenden Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten zusammen, welche nach § 20 Nr. 4)

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}$$

lautet, so bestätigt sich ohne Schwierigkeit die aus der Lage der Ellipsentangenten ersichtliche Eigenschaft, dass beide Kurven in den in den Koordinatenachsen gelegenen Punkten zusammenfallen, dass aber in allen anderen Punkten die Fusspunktkurve ausserhalb der Ellipse gelegen ist.

Zum Zwecke der weiteren Untersuchung der Gestalt reicht es aus, wenn wir uns auf spitze Werte von φ beschränken, weil durch diese Werte einer der vier mit einander kongruenten Quadranten der Fusspunktkurve vollständig umfasst wird. Aus den Gleichungen 10) und 11) ist dann zu erkennen, dass r abnimmt, während φ wächst, dass also wie in der Ellipse die beiden Halbachsen den grössten und kleinsten Halbmesser darstellen. Dabei können aber zwei wesentlich verschiedene Formen eintreten, die sich aus den Grössen der Ordinaten ergeben. Wird nämlich mittels der Formel $r \sin \varphi = y$ die Gleichung 11) in

$$12) \qquad y^2 = \frac{a^2}{\varepsilon^2} \{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \,(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)\}$$

umgestaltet, so zeigt sich, dass unter der Voraussetzung positiver y, die für spitze Werte von φ allein zulässig sind, y wächst oder abnimmt, je nachdem das Eine oder das Andere mit dem Produkte

$$\varepsilon^2 \sin^2 \varphi \,(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)$$

stattfindet. Da die beiden Faktoren dieses Produktes eine unveränderliche Summe geben, so folgt aus einem bekannten arithmetischen Satze, dass der Wert des Produktes von $\varphi = 0$ an wächst,

bis beide Faktoren gleich geworden sind, worauf wieder Abnahme erfolgt. Der grösste Wert tritt demnach ein, sobald die Relation

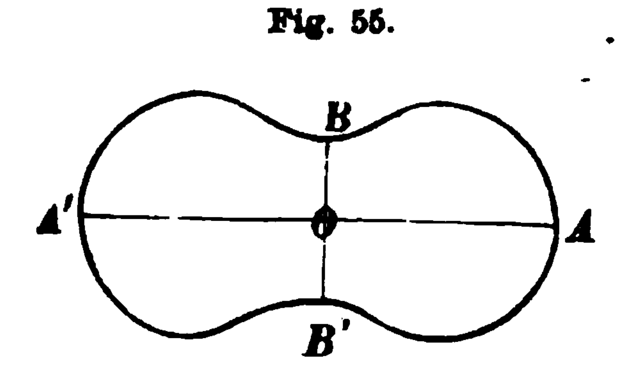
$$1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi = \varepsilon^2 \sin^2 \varphi$$

Geltung hat. Dies giebt, wenn wir den zugehörigen Polarwinkel mit φ_m bezeichnen,

$$13) \qquad \sin \varphi_m = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2}}.$$

Aus dieser Formel folgt ein unmöglicher Wert von φ_m, solange $\varepsilon < \sqrt{\frac{1}{2}}$; für $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist $\varphi = 90^0$. In beiden Fällen wächst also y fortwährend von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$, so dass die grösste Ordinate des Quadranten und hiermit die grösste Ordinate überhaupt mit der kleinen Halbachse der Ellipse zusammenfällt. Die Kurve hat hierbei eine Form, die sich von der Gestalt der Ellipse selbst nur wenig unterscheidet. Ist dagegen $\varepsilon > \sqrt{\frac{1}{2}}$, so gehört die grösste Ordinate zu einem innerhalb der Grenzen 0 und 90^0 gelegenen Werte des Winkels φ, so dass, wenn man von dem Scheitel, in welchem $\varphi = 0$ ist, ausgeht, die Ordinaten anfänglich wachsen, um nachher wieder abzunehmen. Die Fusspunktkurve erhält hierbei die Gestalt von Fig. 55, worin AA' und BB' die Achsen der dazu gehörenden Ellipse darstellen; sie erscheint an den Scheiteln der kleinen Achse, bei B und B' eingedrückt, und zwar umsomehr, je grösser ε wird, oder je kleiner die kleine Achse im Verhältnis zur grossen ist. Für die Länge der grössten Ordinate, die mit y_m bezeichnet werden soll, erhält man aus 12) und 13):

Fig. 55.



$$y_m = \frac{a}{2\varepsilon}.$$

Das zugehörige x kann aus der Gleichung 7) oder auch aus der Relation $x = r \cos \varphi$ in Verbindung mit Nr. 10) und 13) berechnet werden.

III. Die Gleichung der **Fusspunktkurve einer Hyperbel für die aus dem Mittelpunkte gefällten Senkrechten** ergiebt sich mit Rücksicht auf die im Eingange des § 25 besprochene Beziehung, welche zwischen der Ellipsen- und Hyperbelgleichung stattfindet, wenn man in Nr. 7) b^2 mit $-b^2$ vertauscht. Die Gleichung lautet folglich:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2, \tag{14}$$

wonach die Fusspunktkurve wieder dem vierten Grade angehört und gegen beide Achsen symmetrisch gelegen ist.

Beim Übergange zu Polarkoordinaten erhält man aus 14) oder auch sogleich aus 9) die Gleichung:

$$r^2 = a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi, \tag{15}$$

welche, wenn mittels der Relation $c^2 = a^2 + b^2$ [§ 14 Nr. 15)] und $c = \varepsilon a$ die lineare und numerische Excentricität eingeführt wird, zeigt, dass die Gleichungen 10) und 11) auch für die Fusspunktkurve der Hyperbel Anwendung finden. Mit Nr. 10) behält auch die davon abgeleitete Konstruktion Geltung, sobald man den umgeschriebenen Kreis der Ellipse mit dem Hauptkreise der Hyperbel vertauscht.

Was die Gestalt der Linie anlangt, so folgt aus 15), dass reelle r nur möglich sind, solange der Bedingung

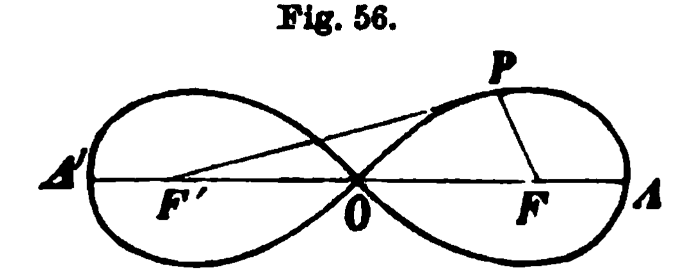
$$\tan^2 \varphi \leq \frac{a^2}{b^2}$$

Genüge geleistet wird. Die Kurve ist hiernach zu beiden Seiten der x-Achse zwischen zwei durch den Mittelpunkt gehenden Geraden eingeschlossen, welche eine gegen die Asymptoten der Hyperbel senkrechte Lage haben. Im Falle der gleichseitigen Hyperbel sind diese beiden Geraden mit den Asymptoten identisch. Ferner lässt die Gleichung 11) erkennen, dass unter Voraussetzung spitzer Werte von φ der Leitstrahl r von a bis 0 abnimmt, während φ von 0 bis zu einem Werte φ_0 wächst, für welchen

$$\sin \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \tan \varphi_0 = \frac{a}{b}$$

ist. Rücksichtlich der Ordinaten folgt wieder aus der zur Formel 12) angestellten Betrachtung, dass sie vom Scheitel der Hauptachse aus gerechnet anfänglich wachsen, bis φ den in Nr. 13) gegebenen Wert erlangt hat, um nachher wieder bis zu Null hin abzunehmen. Aus allen diesen Bemerkungen ergiebt sich für die

Fig. 56.



Kurve eine schleifenähnliche Gestalt, wie sie in Fig. 56 für den speciellen Fall dargestellt ist, wo die Fusspunkte ihre Entstehung

einer gleichseitigen Hyperbel verdanken. Eine Kurve dieser besonderen Art führt den Namen **Lemniskate**.

Für die Gleichung der Lemniskate erhält man aus 14), wenn $a = b$ gesetzt wird,

$$16) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2);$$

auf gleichem Wege entsteht aus 15) für Polarkoordinaten die leicht konstruierbare Gleichung:

$$17) \qquad r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Die Lemniskate besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn man in der Achse AA' zu beiden Seiten des Mittelpunktes zwei feste Punkte F und F' in dem Abstande $OF = OF' = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ annimmt, für jeden beliebigen Peripheriepunkt das Produkt $PF \,.\, PF'$ der beständigen Grösse $\frac{1}{2} a^2$ gleich ist. Aus den Formeln

$$\overline{PF}^2 = (x - a\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 + y^2,$$
$$\overline{PF'}^2 = (x + a\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 + y^2$$

folgt nämlich durch Multiplikation nach einfacher Umformung:

$$\overline{PF}^2 \,.\, \overline{PF'}^2 = (x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) + \tfrac{1}{4} a^4,$$

und hieraus mit Rücksicht auf Nr. 16):

$$\overline{PF}^2 \,.\, \overline{PF'}^2 = \tfrac{1}{4} a^4,$$

worin die angegebene Eigenschaft ausgedrückt ist. Die Lemniskate bildet hiernach einen besonderen Fall einer Linie, in welcher überhaupt das Produkt $PF \,.\, PF'$ eine beliebige konstante Grösse q^2 besitzt. Um auch für diesen allgemeineren Fall die Gleichung zu entwickeln, behalten wir die vorher angewendeten Koordinatenachsen bei und setzen $OF = OF' = e$. Dann ist

$$\overline{PF}^2 = (x - e)^2 + y^2,$$
$$\overline{PF'}^2 = (x + e)^2 + y^2,$$

woraus mittels der vorgelegten Bedingung die Gleichung

$$\{(x - e)^2 + y^2\} \{(x + e)^2 + y^2\} = q^4$$

hervorgeht. Aus derselben ergiebt sich nach Ausführung der Multiplikation und geänderter Ordnung der Glieder:

$$18) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 2e^2 (x^2 - y^2) = q^4 - e^4.$$

Die durch diese Gleichung repräsentierte Kurve vierten Grades hat den Namen der Cassinischen Linie erhalten.* Sie zeichnet sich durch eine mit der gegenseitigen Grösse von e und q mannichfach wechselnde Formverschiedenheit aus. Bedienen wir uns der Abkürzung $\frac{e}{q} = \varepsilon$, so stellt die Cassinische Linie einen Kreis dar, wenn $\varepsilon = 0$ ist; sie erhält eine der Ellipse ähnliche ovale Gestalt für den Fall $\sqrt{\frac{1}{2}} \geqq \varepsilon > 0$, erlangt eine eingedrückte Form nach Art von Fig. 55, wenn ε zwischen den Grenzen $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und 1 liegt, geht für $\varepsilon = 1$ in die Lemniskate über, trennt sich dann, wenn ε den Wert Eins überschreitet, in zwei die Punkte F und F' umgebende geschlossene Kurven und schwindet endlich in diese Punkte selbst zusammen, wenn ε unendlich geworden ist.

§ 41.

Die Tangenten algebraischer Kurven.

Eine der wichtigsten Fragen bei Untersuchung einer krummen Linie ist die Frage nach der Richtung ihrer Tangenten, indem hierdurch die Bewegungsrichtung des die Kurve beschreibenden Punktes in seinen verschiedenen Lagen bestimmt wird. Das zu diesem Zwecke bei Betrachtung der Linien zweiten Grades benutzte Verfahren reduziert sich schliesslich auf die Ermittelung der gleichen Wurzeln einer quadratischen Gleichung; eine erweiterte Anwendung derselben Methode auf Untersuchung der Linien höherer Grade würde zu der Aufgabe führen, die zweifachen Wurzeln einer höheren Gleichung ausfindig zu machen. Da die Lösung dieser Aufgabe bei Beschränkung auf die Hilfsmittel der Elementarmathematik nicht frei von Schwierigkeiten ist, so soll hier ein anderer Weg eingeschlagen werden, auf dem wir zu allgemeineren Resultaten gelangen. Wir schicken dazu folgende, für alle Kurven geltende Erörterungen voraus.

Es sei die Gleichung irgend einer krummen Linie in der Form

$$1) \qquad F(x, y) = 0$$

gegeben und die Aufgabe gestellt, an diese Kurve im Peripherie-

---

* Nach dem bekannten Astronomen Dominique Cassini, der diese Linie benutzte, um von ihr eine, übrigens irrtümliche Anwendung auf die Theorie der Mondbewegung zu machen.

punkte $x_1 y_1$ eine Tangente zu legen. Verbinden wir zunächst diesen Punkt mit einem zweiten Punkte $x_2 y_2$ der nämlichen Linie, so gilt nach § 5 Nr. 9) für die Richtungskonstante M der die beiden Punkte enthaltenden Sekante die Formel

$$2)\qquad M = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

welche durch Kombination mit den aus 1) folgenden Gleichungen

$$3)\qquad F(x_1, y_1) = 0, \qquad F(x_2, y_2) = 0$$

so umgestaltet werden kann, dass sie nur noch zulässig bleibt, wenn beide Punkte auf der gegebenen Kurve liegen. Denkt man sich hierauf den Punkt $x_2 y_2$ nach $x_1 y_1$ hin bewegt, so dreht sich die Sekante um den letzteren und geht endlich in eine Tangente über, wenn $x_2 = x_1$ und $y_2 = y_1$ geworden ist. Zu diesen bestimmten Specialwerten von x_2 und y_2 muss ein bestimmter Wert von M gehören, der zwar aus Nr. 2) allein in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ erscheint, weil ohne Hinzutreten der Gleichungen 3) die Aufgabe darauf hinauskommen würde, die Richtung einer beliebigen durch einen Punkt gelegten Geraden zu ermitteln, der aber bei zweckdienlicher Benutzung dieser Gleichungen irgend eine angebbare Grösse erlangt, die wir mit N bezeichnen wollen. N ist dann die Richtungskonstante der den Berührungspunkt $x_1 y_1$ enthaltenden Tangente, und die Gleichung dieser Geraden lautet nach § 5 Nr. 7):

$$4)\qquad y - y_1 = N(x - x_1).$$

Es bleibt jetzt die einzige Schwierigkeit übrig, in jedem speciellen Falle die Gleichungen 3) so anzuwenden, dass dadurch ein bestimmter Wert von N erreicht wird. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe gehört der höheren Mathematik an; für den speciellen Fall aber, dass $F(x,y)$ eine algebraische, ganze und rationale Funktion von x und y darstellt, führt die folgende Betrachtung zum Ziele.

Jedes einzelne Glied der Gleichungen 2) und 3) im § 37, durch welche die Gleichungen aller algebraischen Kurven ausgedrückt werden, besitzt, wie bereits früher bemerkt wurde, die Form

$$5)\qquad Cx^p y^q.$$

C bezeichnet hierin eine beliebige Konstante, die Exponenten p und q dagegen sind ganze positive Zahlen mit Einschluss der Null.

Bilden wir nun aus den Gleichungen 3) durch Subtraktion die neue Gleichung

$$6) \qquad F(x_1, y_1) - F(x_2, y_2) = 0,$$

so entsteht aus dem Gliede 5) der Ausdruck

$$C(x_1^p y_1^q - x_2^p y_2^q),$$

welcher, wenn man in der Parenthese $x_2^p y_1^q$ substrahiert und addiert, in

$$7) \qquad C\{y_1^q(x_1^p - x_2^p) + x_2^p(y_1 - y_2^q)\}$$

umgestaltet werden kann. Bei Einführung der Abkürzungen

$$8) \begin{cases} \Sigma_x = x_1^{p-1} + x_1^{p-2} x_2 + x_1^{p-3} x_2^2 + \ldots + x_1 x_2^{p-2} + x_2^{p-1} \\ \Sigma_y = y_1^{q-1} + y_1^{q-2} y_2 + y_1^{q-3} y_2^2 + \ldots + y_1 y_2^{q-2} + y_2^{q-1} \end{cases}$$

ist nach einem bekannten arithmetischen Satze

$$9) \qquad \begin{cases} x_1^p - x_2^p = (x_1 - x_2)\,\Sigma_x \\ y_1^q - y_2^q = (y_1 - y_2)\,\Sigma_y. \end{cases}$$

Hiermit erlangt der Ausdruck 7) die Form

$$C\{y_1^q(x_1 - x_2)\,\Sigma_x + x_2^p(y_1 - y_2)\,\Sigma_y\}$$

oder, wenn man den Faktor $(x_1 - x_2)$ aushebt und die Relation 2) benutzt,

$$10) \qquad C(x_1 - x_2)(y_1^q\,\Sigma_x + M x_2^p\,\Sigma_y).$$

Wird dann die ganze Gleichung durch $(x_1 - x_2)$ dividiert, so verwandelt sich 10) in

$$11) \qquad C(y_1^q\,\Sigma_x + M x_2^p\,\Sigma_y),$$

worin man nur $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $M = N$ zu setzen hat, um zu einer Gleichung zu gelangen, aus welcher ein bestimmter Wert von N hervorgeht. Dabei wird nach 8)

$$\Sigma_x = p x_1^{p-1}, \qquad \Sigma_y = q y_1^{q-1},$$

der Ausdruck 11) verwandelt sich also in

$$12) \qquad C(p x_1^{p-1} y_1^q + q N x_1^p y_1^{q-1}).$$

Wenden wir zunächst diese Methode, um sie an einem bereits anderwärts behandelten Beispiele zu prüfen, auf die allgemeine Gleichung zweiten Grades an, so hat man für zwei Punkte einer diesem Grade angehörenden Linie die Gleichungen:

$$A x_1^2 + B y_1^2 + 2 C x_1 y_1 + 2 D x_1 + 2 E y_1 + F = 0,$$
$$A x_2^2 + B y_2^2 + 2 C x_2 y_2 + 2 D x_2 + 2 E y_2 + F = 0,$$

aus denen, wenn man subtrahiert und die in Nr. 7) und 9) angewendeten Zerlegungen benutzt, die Gleichung

$$A(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + B(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)$$
$$+ 2C\{y_1(x_1 - x_2) + x_2(y_1 - y_2)\}$$
$$+ 2D(x_1 - x_2) + 2E(y_1 - y_2) = 0$$

hervorgeht. Wird hierin durch $x_1 - x_2$ dividiert, so entsteht mit Benutzung der Formel 2):

$$A(x_1 + x_2) + BM(y_1 + y_2) + 2C(y_1 + Mx_2) + 2D + 2EM = 0,$$

und hieraus, wenn $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $M = N$ gesetzt wird, bei gleichzeitiger Entfernung des gemeinschaftlichen Faktors 2:

$$Ax_1 + BNy_1 + C(y_1 + Nx_1) + D + EN = 0.$$

Dies giebt, wenn man auf N reduziert:

$$N = -\frac{Ax_1 + Cy_1 + D}{By_1 + Cx_1 + E},$$

was mit der aus der allgemeinen Tangentengleichung 5) im § 35 folgenden Richtungskonstante vollkommen übereinstimmt.

Das angewendete Verfahren lässt sich zu einem einfachen Mechanismus umgestalten, wenn man aus der Vergleichung der Ausdrücke 5) und 12) die Umwandlung entnimmt, welche jedes Glied der vorgelegten Kurvengleichung beim Übergange in die zur Ermittelung von N dienende Formel erleidet. Wählen wir z. B. die Gleichung

$$13) \qquad Ax^m + By^n + Cx^p y^q + D = 0,$$

welche von jeder Art von Gliedern, wie sie in der allgemeinen Gleichung der Linien höherer Grade vorkommen können, eines enthält, so verwandelt sich bei dem fraglichen Übergange das Glied

$$\begin{array}{lll} Ax^m & \text{in} & mAx_1^{m-1}, \\ By^n & ,, & nNBy_1^{n-1}, \\ Cx^p y^q & ,, & C(px_1^{p-1}y_1^q + qNx_1^p y_1^{q-1}), \end{array}$$

während das konstante Glied D sogleich bei der anfänglichen Subtraktion verschwindet. Die zur Bestimmung der Richtungskonstante N nötige Gleichung lautet folglich:

$$14) \quad mAx_1^{m-1} + nNBy_1^{n-1} + C(px_1^{p-1}y_1^q + qNx_1^p y_1^{q-1}) = 0.$$

Man wird leicht das Bildungsgesetz übersehen, nach welchem Nr. 14) aus 13) entstanden ist.* Zu bemerken haben wir noch, dass die Kurvengleichung nicht notwendig auf Null reduziert zu sein braucht, was sich sofort zeigt, wenn man z. B. die Gleichung 13) in der Form

$$Ax^m + By^n = -Cx^p y^q - D$$

gegeben annimmt und Nr. 14) in

$$mAx_1^{m-1} + nNBy_1^{n-1} = -C\left(px_1^{p-1}y_1^q + qNx_1^p y_1^{q-1}\right)$$

umgestaltet.

Als Beispiel für die Theorie der Tangenten einer Linie höheren Grades möge die Untersuchung der Cissoidentangenten dienen.

Aus der Gleichung 3) im § 40 folgt nach Ausführung der Multiplikation und geänderter Ordnung der Glieder für die Koordinaten eines Cissoidenpunktes:

$$15)\qquad x^3 - fy^2 + xy^2 = 0.$$

Wird die oben angegebene Methode auf diese Gleichung angewendet, so entsteht in gleicher Weise wie beim Übergange von Nr. 13) zu 14):

$$3x_1^2 - 2fy_1N + y_1^2 + 2Nx_1y_1 = 0,$$

woraus man für die Richtungskonstante der Cissoidentangente die Formel

$$16)\qquad N = \frac{3x_1^2 + y_1^2}{2y_1(f - x_1)}$$

erhält. Mit Hilfe der aus § 40 Nr. 4) fliessenden Gleichung

$$f - x_1 = \frac{x_1^3}{y_1^2}$$

lässt sich hierin der Ausdruck $f - x_1$ eliminieren; wir erlangen dadurch die von der beständigen Grösse f unabhängige Formel:

$$17)\qquad N = \frac{y_1(3x_1^2 + y_1^2)}{2x_1^3}.$$

Um hieraus Folgerungen für die Gestalt der Cissoide ziehen zu können, wollen wir mittels der Relationen

$$18)\qquad N = \tan\tau, \qquad \frac{y_1}{x_1} = \tan\varphi$$

---

* Für die Feststellung des Bildungsgesetzes ist die Umwandlung, welche das Glied $Cx^p y^q$ erleidet, ausreichend, wenn man Ax^m, By^n und D mit den damit gleichen Ausdrücken $Ax^m y^0$, $Bx^0 y^n$ und $Dx^0 y^0$ vertauscht.

den von der Tangente und der x-Achse eingeschlossenen Winkel τ und den Polarwinkel φ des Berührungspunktes einführen. Dann ergiebt sich:

$$19)\qquad \tan\tau = \tfrac{1}{2}\tan\varphi\,(3 + \tan^2\varphi) = \tfrac{3}{2}\tan\varphi + \tfrac{1}{2}\tan^3\varphi.$$

Dieses Resultat zeigt, dass von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 90^0$ der Winkel τ gleichzeitig mit dem Winkel φ, aber in beträchtlich stärkerem Grade als dieser wächst, woraus leicht hergeleitet wird, dass die Kurve wie in Fig. 54 (S. 228) überall der x-Achse ihre konvexe Seite zukehren muss.

Als Gleichung der Cissoidentangente im Punkte $x_1 y_1$ entsteht aus Nr. 4) bei Substitution des in Nr. 17) enthaltenen Wertes von N:

$$20)\qquad y - y_1 = \frac{y_1\,(3\,x_1^2 + y_1^2)}{2\,x_1^3}\,(x - x_1).$$

Wird hierin $y = 0$ und $x = m$ gesetzt, wobei m die Abscisse des in der x-Achse gelegenen Tangentenpunktes bezeichnet, so erhält man für die Subtangente (vgl. die Anmerkung S. 103) den Wert:

$$x_1 - m = \frac{2\,x_1^3}{3\,x_1^2 + y_1^2},$$

und hieraus, wenn mittels der Cissoidengleichung die Ordinate y_1 eliminiert wird,

$$x_1 - m = \frac{2\,(f x_1 - x_1^2)}{3f - 2\,x_1}.$$

Dieser Ausdruck erlangt eine für die geometrische Darstellung einfachere Form, wenn man darin den Radius a des in Fig. 54 zur Konstruktion der Cissoide benutzten Kreises einführt, oder $f = 2a$ setzt. Dann entsteht:

$$21)\qquad x_1 - m = \frac{2\,a x_1 - x_1^2}{3\,a - x_1},$$

ein Wert, der sehr leicht konstruiert werden kann, wenn man beachtet, dass $2\,a x_1 - x_1^2$ das Quadrat der zu x_1 gehörigen Kreisordinate bezeichnet.

Zehntes Kapitel.

Transcendente Linien.

---

§ 42.

Die transcendenten Linien im allgemeinen.

Alle bis jetzt untersuchten Linien waren derart, dass sie bei Beziehung auf Parallelkoordinaten durch algebraische rationale Gleichungen zwischen x und y dargestellt wurden. Wenn wir nun bedenken, dass jede Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen, abgesehen von der besonderen Form der darin enthaltenen Funktionen, in geometrischer Auffassung den zusammenhängenden Lauf einer Linie ausdrückt, soweit zu reellen sich stetig ändernden Werten der einen Variabeln eben solche Werte der anderen gehören, so bleibt noch für die Untersuchung das unendliche Gebiet solcher, offenbar krummen, Linien übrig, deren Gleichung nicht auf die oben genannte Form gebracht werden kann. Alle Kurven dieser Art werden im allgemeinen transcendente genannt.

Bleiben wir zunächst, um mit den einfachsten Fällen zu beginnen, bei solchen Gleichungen stehen, die in der entwickelten Form

$$y = f(x)$$

gegeben sind, so gehört z. B. aus dem Gebiete der niederen Arithmetik hierher die Gleichung

$$y = a^x,$$

worin die Basis a konstant ist und der Exponent x eine veränderliche Abscisse darstellt.* Auf x reduziert giebt sie die Formel

---

* Auch Linien, deren Gleichung die Form

$$y = x^m$$

besitzt, wobei m konstant sein soll, sind zu den transcendenten zu rechnen, sobald sie nicht unter einen bestimmten endlichen Grad gebracht werden können. Es findet dies statt, wenn m eine irrationale Zahl ist, also z. B., wenn $m = \sqrt{2}$. Setzt man für $\sqrt{2}$ die Näherungswerte

$$x = {}^a\log y,$$

so dass bei geometrischer Darstellung durch Parallelkoordinaten die Abscissen die den Ordinaten zugehörenden Logarithmen zur Basis a ausdrücken. — Gehen wir ferner in das Gebiet der Trigonometrie über, so erhalten wir einfache Beispiele transcendenter Kurven aus den Gleichungen

$$y = \sin x, \qquad y = \cos x, \qquad y = \tan x \text{ u. s. w.},$$

wobei die x, um als Längen aufgetragen werden zu können, in Teilen des Radius gemessene Bogenlängen bezeichnen sollen. Die Reduktion auf x führt zu den cyklometrischen Funktionen:

$$x = Arc \sin y, \qquad x = Arc \cos y \text{ u. s. f.}$$

Alle genannten einfachen Funktionen können wieder beliebig sowohl unter sich, als auch mit algebraischen verbunden werden, um neue Gleichungen transcendenter Kurven zu liefern, wozu noch eine fortwährend wachsende Menge solcher Funktionen tritt, welche in der höheren Mathematik ihre Entstehung haben. Ein Versuch, die Verschiedenartigkeit der hieraus fliessenden Gestalten auch nur angenähert vorzuführen, muss bei ihrer unendlichen Zahl ein vergeblicher sein; einer vollständigen Untersuchung, auch nur der einfachsten Formen, sind an vielen Stellen die Kräfte der Elementarmathematik nicht gewachsen. Wir beschränken uns deshalb darauf, im folgenden die Gleichungen einiger wenigen häufiger genannten transcendenten Kurven aufzustellen, wobei wir der Einfachheit der Betrachtung wegen, soweit Parallelkoordinaten zur Anwendung kommen, nur von rechtwinkligen Systemen Gebrauch machen werden.

Eine Kurve, deren Gleichung auf die allgemeine Form

$$1) \qquad y = Ab^{\frac{x}{c}}$$

zurückgeführt werden kann, führt den Namen logarithmische Linie, weil ihre Gleichung sich immer so umformen lässt, dass bei geeigneter Wahl des Koordinatenanfanges und der Längeneinheit die Abscissen die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten für

---

$\pm 1{,}4..$, $\pm 1{,}41..$, so würde in diesem Falle die Linie, welcher jene Gleichung zukommt, angenähert durch zwei Kurven vierzehnten Grades, oder durch zwei Kurven vom hunderteinundvierzigsten Grade u. s. f. dargestellt werden können. In der That gehört sie aber einem unendlich hohen Grade an. Leibnitz nennt Linien dieser besonderen Art interscendente Kurven.

irgend eine gegebene Basis darstellen. Bezeichnen wir nämlich mit e diese Basis und mit log die zugehörigen Logarithmen, so lässt sich vorerst mit Einführung einer neuen beständigen Grösse m, für welche die Relation

$$e^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{c}}$$

oder, indem wir zu den Logarithmen übergehen,

$$2) \qquad m = \frac{c}{log\, b}$$

Geltung hat, die Gleichung 1) in

$$3) \qquad y = Ae^{\frac{x}{m}}$$

umformen. Wird dann der Koordinatenanfang auf der x-Achse um eine vorläufig noch unbestimmte Strecke a verschoben, so geht x in $x + a$ über; man erhält also:

$$y = Ae^{\frac{x+a}{m}} = Ae^{\frac{a}{m}} e^{\frac{x}{m}},$$

und hieraus entsteht, wenn man über a so verfügt, dass

$$Ae^{\frac{a}{m}} = m$$

wird, wonach

$$4) \qquad a = m\, log \frac{m}{A}$$

sein muss, die Gleichung:

$$5) \qquad y = me^{\frac{x}{m}}.$$

Wählt man die durch die Gleichung 2) bestimmte Konstante m als Längeneinheit, so bleibt:

$$6) \qquad y = e^x, \qquad x = log\, y,$$

wodurch die oben ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt wird. Dabei ist für die allgemeine Geltung der angewendeten Folgerungen nur nötig, dass die Basen b und e positive Zahlen darstellen und nicht gleich Eins sind; negative Werte der beständigen Grössen A, c oder m können durch geeignete Vertauschung der positiven und negativen Achsenseiten in positive umgewandelt werden.

Ist die Gleichung der logarithmischen Linie auf die Form 6) gebracht, so kann man noch, ohne dass der Allgemeinheit der Betrachtung Eintrag geschieht, $e > 1$ annehmen. Im entgegengesetzten Falle hat man nämlich nur die durch die y-Achse geschiedenen

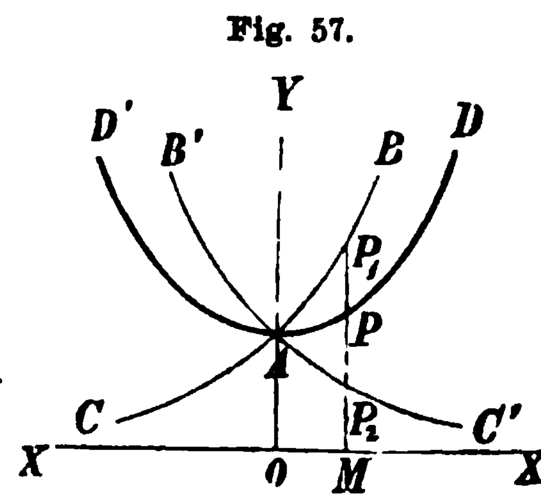
Seiten der x-Achse zu verwechseln, um x in $-x$ überzuführen; dann verwandelt sich die Gleichung der Kurve in

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x,$$

worin $\frac{1}{e}$ gewiss grösser als Eins ist. Gewöhnlich versteht man unter e die bekannte Irrationalzahl 2,7182818 ...; die Abscissen der durch die Gleichung 6) dargestellten Kurve stellen in diesem Falle die sogenannten natürlichen Logarithmen der zugehörigen Ordinaten dar.

Was die Gestalt der logarithmischen Linie betrifft, so ergiebt sich aus Nr. 5) oder 6) zu jedem x, welches eine ganze Zahl oder einen Bruch mit ungeradem Nenner darstellt, ein positiver reeller Wert von y, der, $e > 1$ vorausgesetzt, gleichzeitig mit x wächst; hingegen erhält man zwei reelle entgegengesetzte Werte, deren absolute Grösse ebenfalls mit x zunimmt, sobald x einen Bruch mit geradem Nenner bildet. Auf der Seite der positiven Ordinaten entsteht demnach eine stetig zusammenhängende Linie, während auf der Seite der negativen y nur eine unbegrenzte Anzahl isolierter Punkte befindlich ist. Von letzteren ist hier, wo es sich um die Untersuchung kontinuierlicher Linien handelt, gänzlich abzusehen. Für den Verlauf der dann übrig bleibenden, auf der Seite der positiven y gelegenen Kurve folgt aus 5), dass $y = m$, wenn $x = 0$; für $x = +\infty$ wird $y = \infty$, für $x = -\infty$ ist $y = 0$. Die Kurve erstreckt sich also auf der Seite der positiven x und y ins Unendliche, während sie sich der negativen Abscissenachse fortwährend nähert, ohne dieselbe je zu erreichen. Die x-Achse ist demnach unter Voraussetzung der Gleichungsformen 5) oder 6) eine Asymptote der logarithmischen Linie.

Fig. 57.



Zwei logarithmische Linien BAC und $B'AC'$ (Fig. 57), deren Gleichungen die Form

$$y = me^{\frac{x}{m}}, \qquad y = me^{-\frac{x}{m}}$$

besitzen, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen darstellen soll, sind unter sich kongruent, da eine in die andere übergeht, wenn x mit $-x$ vertauscht wird. Aus beiden kann eine in der Mechanik mehrfach vorkommende transcendente Kurve DAD' gebildet werden, wenn man Parallelen

wie P_1M, zur y-Achse zieht und darin den geometrischen Ort für den Halbierungspunkt P der von den Kurven BAC und $B'AC'$ begrenzten Strecke P_1P_2 aufsucht. Setzen wir $OM = x$, $MP_1 = y_1$, $MP_2 = y_2$, so gelten die Gleichungen

$$y_1 = me^{\frac{x}{m}}, \qquad y_2 = me^{-\frac{x}{m}}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Man erhält hieraus für den gesuchten Ort die Gleichung:

$$7) \qquad y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

oder, wenn wieder wie bei Nr. 6) m zur Längeneinheit gewählt wird,

$$8) \qquad y = \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}).$$

Die durch die Gleichungen 7) und 8) charakterisierte Kurve führt den Namen der gemeinen Kettenlinie. Sie wird von einem in zwei Punkten frei aufgehangenen, vollkommen biegsamen und undehnbaren Faden gebildet, wenn derselbe in allen Punkten gleiche Belastungen trägt, wenn er also z. B. unter der Voraussetzung, dass gleiche Fadenlängen gleich schwer sind, durch sein eigenes Gewicht gespannt wird.

§ 43.

Die Spirallinien.

Wird die auf rechtwinklige Parallelkoordinaten bezogene Gleichung einer algebraischen Kurve mittels der bekannten Formeln

$$1) \qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

in Polarkoordinaten umgesetzt, so geht das allgemeine Glied der algebraischen Gleichung, für welches wir früher die Form

$$2) \qquad Cx^p y^q$$

festgestellt hatten, in der Gleichung für Polarkoordinaten in

$$3) \qquad Cr^{p+q}\cos^p\varphi\,\sin^q\varphi$$

über. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass der Wert dieses Gliedes vollkommen ungeändert bleibt, wenn man den Winkel φ um eine volle Umdrehung wachsen oder abnehmen lässt, konnten wir alle einer solchen Gleichung entsprechenden Punkte erlangen, wenn wir uns auf solche Werte von φ einschränkten, die zwischen den Grenzen 0 und 360^0 enthalten sind. Nicht minder war es gestattet, negative Leitstrahlen auszuschliessen, weil es für die Grösse

des mit 3) bezeichneten Ausdruckes völlig gleichgiltig bleibt, ob man r mit $-r$ vertauscht, oder dem Polarwinkel einen um eine halbe Umdrehung grösseren oder kleineren Wert verleiht. Diese Beschränkungen sind aber nicht mehr zulässig, wenn alle einer Gleichung von der Form

$$r = f(\varphi) \quad \text{oder} \quad F(r, \varphi) = 0$$

entsprechenden Punkte dargestellt werden sollen und die Funktionen f und F in Beziehung auf die Längen der Leitstrahlen nicht die im vorigen angegebene Periodicität besitzen, wobei jedoch die Kurven nicht mehr algebraisch sein können, sondern dem Gebiete der transcendenten Linien angehören müssen. Namentlich gehören hierher alle solche Kurven, aus deren Gleichung in Polarkoordinaten für stetig wachsende Polarwinkel fortwährend zu- oder abnehmende Vektoren hervorgehen, so dass in jeder durch den Koordinatenanfang gezogenen Geraden unendlich viele Peripheriepunkte gelegen sind. Linien dieser Art ziehen sich in unendlich vielen Windungen um den festen Pol herum und führen im allgemeinen den Namen Spiralen oder Spirallinien.

Zur Untersuchung der Spiralen eignen sich am besten ihre auf Polarkoordinaten bezogenen Gleichungen, wobei wir aber nach dem vorhergehenden die Werte der Leitstrahlen sowohl als der Polarwinkel nicht mehr beschränken dürfen, sondern zwischen den weitesten reellen Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ gelegen annehmen müssen. — Um hier, wo wir nicht mehr mit goniometrischen Funktionen der Polarwinkel zu thun haben, die Werte von φ ebenso wie die r als abstrakte Zahlen auffassen zu können, die bei Annahme einer bestimmten linearen Einheit als Längen darstellbar sind, werden wir jene Winkel durch die Bogenlängen ausdrücken, welche ihnen in einem mit der Längeneinheit als Halbmesser um den Pol konstruierten Kreise zugehören. Wir bedienen uns dabei der Abkürzung

$$4) \qquad \theta = Arc\,\varphi,$$

so dass für zwei einander entsprechende Werte von θ und φ die Proportion

$$5) \qquad \theta : \pi = \varphi^0 : 180^0$$

Geltung findet.* Die Gleichung einer jeden Spirallinie wird dann in der Form

* Um eine Analogie mit dem Parallelkoordinatensystem zu erhalten, können wir den mit einem der linearen Einheit gleichen Halbmesser um

$$r = f(\theta)$$

dargestellt. — Als Beispiele für die Spiralen wählen wir die folgenden.

I. Die **Spirale des Archimedes** oder **lineare Spirale**, die einfachste von allen, besitzt die Gleichung

$$r = a\theta, \tag{6}$$

wobei a einem beliebigen konstanten Werte gleich sein soll. Bezeichnen wir zwei ihrer Punkte mit $r\theta$ und $r_1\theta_1$, so folgt aus

$$r = a\theta, \qquad r_1 = a\theta_1$$

die Proportion:

$$r : r_1 = \theta : \theta_1.$$

Man kann sich hiernach, da die Vektoren in demselben Verhältnisse wie die Polarwinkel zunehmen, die genannte Spirale durch die stetige Bewegung eines Punktes erzeugt denken, der auf einer um den Pol gedrehten geraden Linie von diesem Drehmittelpunkte aus so fortrückt, dass die von ihm zurückgelegten Wege den von der Geraden beschriebenen Winkeln proportional sind. Eine derartige Spirale würde also z. B. entstehen, wenn bei gleichförmiger Drehung des Radiusvektor um den Pol ein beschreibender Punkt auf ihm gleichförmig fortrückt.

Setzt man $\theta_1 = 2\pi + \theta$, so fallen r_1 und r in dieselbe Gerade, gehören aber zu zwei um den Umfang einer Windung von einander entfernten Punkten. Für den Abstand beider Punkte folgt dann:

$$r_1 - r = a(\theta_1 - \theta) = 2\pi a,$$

d. h. in jeder durch den Pol gelegten Geraden besitzen die einzelnen Windungen die unveränderliche Entfernung $2\pi a$.

Fig. 58.

Fig. 58 stellt ein Stück des den positiven Werten von θ entsprechenden Teiles einer Spirale des Archimedes dar. Für negative θ wechselt auch r sein Vorzeichen, ohne seine absolute Grösse zu

---

den Pol als Mittelpunkt gezogenen Kreis als eine krummlinige Abscissenachse ansehen, auf welcher der Durchschnitt mit der Polarachse den Nullpunkt bildet, von dem aus die positiven und negativen θ nach beiden Seiten gezählt werden. Die auf diesem Kreise senkrecht stehenden Vektoren bilden die den Abscissen θ zugehörigen Ordinaten; nur findet dabei der Unterschied statt, dass diese Ordinaten nicht von ihrem Einfallspunkte in die Abscissenlinie, sondern vom Kreismittelpunkte aus gemessen werden.

ändern: der hierzu gehörende Teil der Kurve ist daher dem in der Figur dargestellten völlig gleich, besitzt aber eine entgegengesetzte Lage. Man erhält ihn, wenn man sich die Bildebene um eine in der Ebene der Spirale durch den Pol A gelegte Senkrechte zur Polarachse AX so herumgedreht denkt, dass AX die Rückwärtsverlängerung seiner vorherigen Lage bildet.

II. Wird nach Analogie der auf rechtwinklige Parallelkoordinaten bezogenen Parabelgleichung $y^2 = 2px$ für Polarkoordinaten die Gleichung

$$7) \qquad r^2 = 2p\theta$$

gebildet, so heisst die dadurch ausgedrückte Kurve eine parabolische Spirale. Nach der Form ihrer Gleichung sind negative Werte von θ völlig ausgeschlossen, weil sie auf imaginäre Leitstrahlen hinführen. Zu jedem positiven θ gehören zwei an absoluter Grösse gleiche, der Richtung nach aber entgegengesetzte Werte von r, so dass die Kurve aus zwei im Pole zusammentreffenden Teilen besteht, für welche der Pol selbst den Mittelpunkt bildet. Einer dieser Teile tritt an die Stelle des andern, wenn man die Spirale eine halbe Umdrehung um eine rechtwinklig gegen die Ebene der Kurve durch den Pol gelegte Achse machen lässt. Beschränken wir uns, um einen dieser beiden Teile vollständig kennen zu lernen, auf positive r, so ist für $\theta = 0$ auch $r = 0$, und es wächst von hier an r gleichzeitig mit θ, so dass eine im ganzen mit Fig. 58 einige Ähnlichkeit besitzende Gestalt entsteht. Nur findet der Unterschied statt, dass, wenn man in der Richtung eines Leitstrahles vom Pole aus fortgeht, die einzelnen Windungen immer näher aneinander treten, weil nach der Form von Nr. 7) die r in einem schwächeren Verhältnisse als die zugehörigen Werte von θ anwachsen. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn wir in ähnlicher Weise wie bei der Archimedischen Spirale den Abstand zweier in einer durch den Pol gelegten Geraden befindlichen Peripheriepunkte bestimmen, welche zu zwei aufeinander folgenden Windungen gehören. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen folgt aus den Gleichungen

$$r^2 = 2p\theta, \qquad r_1^2 = 2p\,(2\pi + \theta),$$

wenn man die Differenz $r_1^2 - r^2$ in $(r_1 - r)(r_1 + r)$ zerlegt, das Resultat:

$$r_1 - r = \frac{4\pi p}{r_1 + r} = \frac{2\pi p}{r_2},$$

worin r_2 das leicht konstruierbare arithmetische Mittel zwischen r_1 und r darstellt. Da in der letzten Gleichung der Zähler konstant ist, so muss der besprochene Abstand sich vermindern, sobald mit wachsendem θ der Nenner zunimmt.

III. Die durch die Gleichung

$$8) \qquad r\theta = a$$

repräsentierte Spirale heisst mit Bezug auf die Ähnlichkeit, welche zwischen Nr. 8) und der auf die Asymptoten bezogenen Gleichung einer Hyperbel für Parallelkoordinaten stattfindet, **hyperbolische Spirale**. Sie besteht aus zwei unter sich kongruenten Teilen, von denen der eine den positiven und der andere den negativen Werten von θ entspricht und die gegen einander eine gleiche Lage haben, wie in der Spirale des Archimedes, weil auch hier r und θ gleichzeitig ihre Vorzeichen wechseln. Halten wir zur Untersuchung der Gestalt eines dieser beiden Teile positive Werte von θ fest, so folgt aus der auf r reduzierten Gleichung

$$9) \qquad r = \frac{a}{\theta},$$

dass r abnimmt, wenn θ wächst, dabei aber nie vollständig in Null übergehen kann. Die einzelnen Windungen nähern sich also fort und fort dem Pole, ohne ihn je vollständig zu erreichen; derselbe bildet einen sogenannten **asymptotischen Punkt**. In ihrer Annäherung an diesen Punkt treten die Windungen immer enger aneinander, wie sich sofort zeigt, wenn wir für zwei um den Umfang einer Windung von einander entfernte Punkte aus den Gleichungen

$$r = \frac{a}{\theta}, \qquad r_1 = \frac{a}{2\pi + \theta}$$

die Differenz

$$r - r_1 = \frac{2\pi a}{\theta(2\pi + \theta)}$$

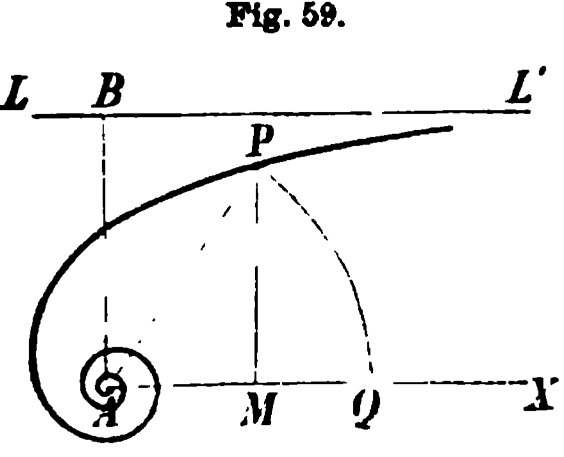


Fig. 59.

bilden. Der Zähler dieses Ausdrucks ist konstant, während der Nenner wächst, wenn θ zunimmt oder die Grösse von r sich vermindert.

Nach der andern Seite hin rückt für abnehmende θ oder zunehmende r die hyperbolische Spirale immer

näher an eine Gerade LL' (Fig. 59), welche in einem Abstande $AB = a$ parallel zur Polarachse AX läuft. Setzen wir nämlich $MP = y$, so ist

$$y = r \sin\theta,$$

folglich bei Einsetzung des Wertes von r aus Nr. 9)

$$y = a\frac{\sin\theta}{\theta}.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung, wenn man beachtet, dass der Quotient $\frac{\sin\theta}{\theta}$ kleiner als die Einheit ist, solange sich θ von Null unterscheidet, für $\theta = 0$ aber in Eins übergeht.* Da in dem letzteren Falle der Radiusvektor unendlich werden muss, so stellt die Gerade LL' eine Asymptote dar.

Bemerkenswert ist noch die folgende geometrische Deutung der Gleichung 8). Beschreibt man aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AP den von der Spirale und der polaren Achse eingeschlossenen Kreisbogen PQ, so ist die Länge dieses Bogens gleich $r\theta$, wenn r und θ die Polarkoordinaten des Punktes P bezeichnen. Mit Rücksicht auf die Gleichung der hyperbolischen Spirale folgt hieraus, dass ein solcher Kreisbogen, wie PQ, die unveränderliche Länge $a = AB$ besitzt, an welcher Stelle der Kurve auch der Punkt P angenommen sein mag.

IV. Wird in der Gleichung der logarithmischen Linie [vergl. § 42 Nr. 1) bis Nr. 6)] y mit r und x mit θ vertauscht, so entsteht die Gleichung der logarithmischen Spirale. Nach Analogie von § 42 Nr. 3) kann sie immer auf die Form

---

* Aus der für jeden zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Bogen θ geltenden Ungleichung

$$\tan\theta > \theta > \sin\theta$$

folgt, wenn man mit den darin enthaltenen Grössen in $\sin\theta$ dividiert,

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

Beide Grenzen, zwischen denen der Quotient $\frac{\sin\theta}{\theta}$ enthalten ist, rücken für abnehmende Werte von θ einander immer näher; schliesslich fallen beide zusammen und es geht auch der von ihnen eingeschlossene Quotient in die Einheit über, wenn $\theta = 0$ geworden ist.

10)
$$r = Ae^{\frac{\theta}{m}}$$
gebracht werden, woraus die Gleichung

11)
$$r = me^{\frac{\theta}{m}}$$
entsteht, wenn man die polare Achse in der Ebene der Kurve mit Beibehaltung des Poles um einen in Teilen des Radius gemessenen Bogen α dreht, für welchen die Relation

$$\alpha = m \log \frac{m}{A}$$

Geltung hat. Bei dieser Drehung geht nämlich θ in $\theta + \alpha$ über, und es sind ganz analoge Reduktionen wie bei der logarithmischen Linie anwendbar. Wir können hierbei unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstehen und m als positive Zahl auffassen. Nach 11) ergiebt sich dann für jedes θ ein positiver reeller Wert von r, der gleichzeitig mit θ zunimmt. Für $\theta = 0$ ist $r = m$, für $\theta = +\infty$ wird auch $r = \infty$, für $\theta = -\infty$ ist $r = 0$. Die logarithmische Spirale erstreckt sich hiernach mit ihren Windungen auf der einen Seite ins Unendliche, während sie sich auf der andern dem Pole fortwährend nähert, ohne ihn je zu erreichen. Der Pol bildet in gleicher Weise wie in der vorher untersuchten Kurve einen asymptotischen Punkt. Dabei müssen offenbar die einzelnen Windungen immer näher aneinander rücken, je mehr sie sich diesem Punkte nähern. Wir finden diese Bemerkung bestätigt, wenn wir den allgemeinen Ausdruck für den geradlinigen Abstand zweier um den Umfang einer Windung von einander entfernten Punkte aufsuchen. Werden die Leitstrahlen der zu den Bogenlängen θ und $2\pi + \theta$ der Polarwinkel gehörenden Punkte wieder mit r und r_1 bezeichnet, so hat man

$$r = me^{\frac{\theta}{m}}, \qquad r_1 = me^{\frac{2\pi+\theta}{m}} = me^{\frac{2\pi}{m}} e^{\frac{\theta}{m}},$$

folglich

$$r_1 - r = me^{\frac{\theta}{m}}\left(e^{\frac{2\pi}{m}} - 1\right).$$

Hierin bedeutet der auf der rechten Seite ausserhalb der Klammer befindliche Faktor den Radiusvektor r; der Inhalt der Parenthese dagegen ist eine beständige Grösse. Die Differenz $r_1 - r$ nimmt demnach in demselben Verhältnisse wie r ab oder zu.

Nach der Gleichung 11) sind auch noch negative Werte von r möglich, sobald $\frac{\theta}{m}$ einen Bruch mit geradem Nenner darstellt; man erhält hieraus zwar eine unbegrenzte Anzahl von Punkten, aber keine zusammenhängende Linie, weil diese Punkte nicht eine stetige Folge bilden.

§ 44.

Die Rollkurven.

Dieselbe gegenseitige Abhängigkeit, in welcher zwei durch eine Gleichung aneinander gebundene veränderliche Grössen stehen, ist auch dann noch vorhanden, wenn die Werte beider Variabeln durch zwei Gleichungen an eine dritte veränderliche Grösse geknüpft sind. Hat man z. B. zwei Gleichungen von der Form

$$1) \qquad x = \varphi(\omega), \qquad y = \psi(\omega),$$

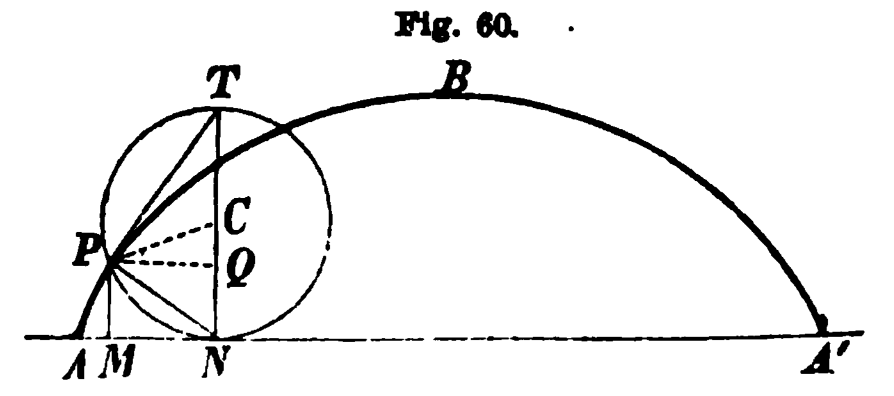
worin φ und ψ die allgemeinen Symbole beliebiger Funktionen einer Variabeln ω bezeichnen mögen, so erhält man daraus für jeden Wert von ω zwei zusammengehörige Werte von x und y, die, wenn man x und y als Parallelkoordinaten auffasst, die Lage eines Punktes bestimmen. Giebt nun die stetige Änderung von ω Werte von x und y, die sich ebenfalls stetig ändern, also eine kontinuierliche Folge von Punkten darstellen, so wird durch das System der beiden Gleichungen 1) der zusammenhängende Lauf einer Linie bestimmt, ganz abgesehen davon, ob die Mittel der Mathematik ausreichen, die Hilfsvariabele ω zwischen diesen Gleichungen zu eliminieren. Eine nutzbare Anwendung finden solche Gleichungssysteme bei einer Klasse von Kurven, die wir im folgenden als letztes Beispiel transcendenter Linien vorführen wollen.

Wird an einer festen Linie eine andere so hinbewegt, dass sie mit ihr in fortwährender Berührung bleibt, sich dabei aber an der festen Linie abwickelt, so dass bei je zweien ihrer aufeinander folgenden Lagen die zwischen den zusammengehörigen Berührungspunkten enthaltenen Bogenlängen in beiden Peripherien einander gleich sind, so beschreibt ein mit der bewegten Linie in fester Verbindung bleibender Punkt eine neue Linie, die wir im allgemeinen eine Rollkurve (Roulette) oder auch Cykloide nennen wollen. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle entstehen, wenn ein Kreis, ohne zu gleiten, auf einer Geraden oder auf der Peripherie

eines anderen Kreises fortrollt, oder wenn eine Gerade sich, ohne verschoben zu werden, an der Peripherie eines Kreises abwickelt.

I. **Die gemeine Cykloide** oder Cykloide im engeren Sinne ist der Weg, den ein Peripheriepunkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie rollt. In Fig. 60 sei AA' die feste Gerade und P der beschreibende Punkt, der in A mit dem Berührungspunkte der Geraden und des Kreises zusammengefallen sein mag.

Fig. 60.



Wir nehmen AA' zur x-Achse und A zum Koordinatenanfange eines rechtwinkligen Koordinatensystems, setzen also $AM = x$, $MP = y$; der durch seine in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Bogenlänge gemessene Winkel NCP (der sogenannte Wälzungswinkel) heisse ω, und $CP = CT = CN = a$ sei der Radius des rollenden Kreises. Dann erhält man, wenn PQ parallel zur x-Achse gezogen wird, aus

$$x = AN - MN = Arc\, PN - PQ, \qquad y = NC - QC$$

die zusammengehörigen Gleichungen:

$$2) \qquad x = a\omega - a \sin\omega, \qquad y = a - a\cos\omega.$$

Reduziert man die letzte dieser beiden Gleichungen auf $\cos\omega$, so ergiebt sich:

$$\cos\omega = \frac{a-y}{a}, \qquad \sin\omega = \sqrt{1-\cos^2\omega} = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a},$$

$$\omega = Arc\cos\left(\frac{a-y}{a}\right),$$

und hiermit kann durch Einsetzung dieser Werte in die erste Gleichung die Hilfsgrösse ω eliminiert werden. Bequemer ist es aber in den meisten Fällen, von dem Systeme der Gleichungen 2) Gebrauch zu machen.

Aus der für y aufgestellten Gleichung folgt, dass die Ordinate immer zwischen den Grenzen 0 und $2a$ enthalten sein muss, und zwar ist $y = 0$, wenn $\cos\omega = 1$, oder wenn ω einen der Werte

$$\ldots -4\pi, \quad -2\pi, \quad 0, \quad +2\pi, \quad +4\pi, \ldots$$

besitzt; man erhält dann für x die Längen

$$\ldots -4\pi a, \quad -2\pi a. \quad 0, \quad +2\pi a, \quad +4\pi a. \ldots$$

Ferner erreicht y seinen grössten Wert $2a$, so oft $\cos\omega = -1$, oder so oft ω einen der Werte

$$\ldots -3\pi, \quad -\pi, \quad +\pi, \quad +3\pi, \ldots$$

erlangt; für x finden sich dann die zugehörigen Grössen

$$\ldots -3\pi a, \quad -\pi a, \quad +\pi a, \quad +3\pi a, \ldots$$

Werden hierzu noch Zwischenwerte gefügt, so kommt man zu der Erkenntnis, dass die Kurve aus unendlich vielen kongruenten Zügen von der Form ABA' (Fig. 60) besteht.

Als ein weiteres Beispiel dafür, in welcher Weise das System der Gleichungen 2) zur Untersuchung der Kurve zu benutzen ist, wählen wir die Ermittelung der Tangentenlage. Wir können hierzu im allgemeinen den im § 41 zur Auffindung der Tangenten algebraischer Kurven benutzten Weg einschlagen, indem wir nämlich von der Richtung einer zwei Peripheriepunkte enthaltenden Sekante durch Drehung dieser Geraden bis zum Zusammenfallen der beiden Peripheriepunkte zur Tangentenrichtung übergehen.

Sind $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ zwei Cykloidenpunkte, denen die Wälzungswinkel $\omega + \delta$ und $\omega - \delta$ zugehören, so ist

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = a(\omega + \delta) - a\sin(\omega + \delta), & y_1 = a - a\cos(\omega + \delta), \\ x_2 = a(\omega - \delta) - a\sin(\omega - \delta), & y_2 = a - a\cos(\omega - \delta). \end{cases}$$

Unter Benutzung der Formeln

$$4)\quad \begin{cases} \sin(\omega + \delta) - \sin(\omega - \delta) = 2\cos\omega\sin\delta, \\ \cos(\omega - \delta) - \cos(\omega + \delta) = 2\sin\omega\sin\delta \end{cases}$$

folgt hieraus für den in der Drehrichtung der Polarwinkel gemessenen Winkel σ, den eine die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ enthaltende Sekante mit der Abscissenachse einschliesst,

$$5)\quad \tan\sigma = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\sin\omega\sin\delta}{\delta - \cos\omega\sin\delta}.$$

Wird hierin im Zähler und Nenner durch δ dividiert, so entsteht, wenn wir zur Abkürzung

$$6)\quad \frac{\sin\delta}{\delta} = \varepsilon$$

setzen, die Gleichung:

$$7)\quad \tan\sigma = \frac{\varepsilon\sin\omega}{1 - \varepsilon\cos\omega}.$$

Für $\delta = 0$ wird $\varepsilon = 1$ (vergl. die Anmerkung auf S. 250); dabei fallen beide Peripheriepunkte zusammen und die Sekante wird zur

Tangente. Bezeichnet also τ den im gleichen Sinne wie σ gemessenen Winkel, den diese Tangente mit der x-Achse bildet, so folgt aus 7):

$$8)\qquad \tan\tau = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega} = \cot\frac{\omega}{2}.$$

Man kann hieraus leicht herleiten, dass die Tangente im Punkte P (Fig. 60) durch den von der Geraden AA' am weitesten abstehenden Punkt T des Erzeugungskreises gehen muss. PT ist Tangente und PN Normale.

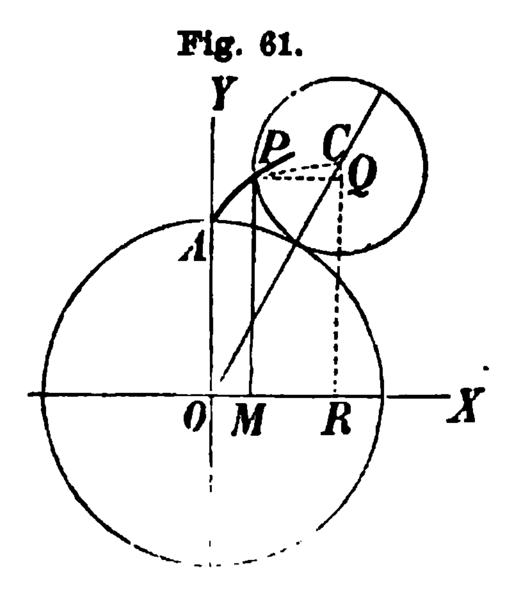
Beobachtet man den Weg, den, während der Erzeugungskreis auf der Basis AA' rollt, ein auf dem Radius CP oder seiner Verlängerung, im Abstande c vom Kreismittelpunkte gelegener Punkt beschreibt, so erhält man in gleicher Weise, wie die Gleichungen 2) entstanden, für den Ort dieses Punktes die zusammengehörigen Formeln:

$$9)\qquad x = a\omega - c\sin\omega, \qquad y = a - c\cos\omega.$$

Die hierdurch ausgedrückte Kurve führt den Namen geschweifte oder gedehnte Cykloide, wenn $c < a$, verkürzte oder verschlungene Cykloide, wenn $c > a$. Die Untersuchung ihrer Gestalt mit Benutzung der Gleichungen 9) kann in ähnlicher Weise wie bei der gemeinen Cykloide geführt werden.

II. Rollt ein Kreis auf der Aussenseite der Peripherie eines festen Kreises, so beschreibt ein Peripheriepunkt der rollenden Linie eine sogenannte Epicykloide. Zur Ermittelung der Gleichungen dieser Kurve legen wir in Fig. 61 durch den Mittelpunkt des festen Kreises ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen y-Achse den Anfangspunkt A der Bewegung enthält, in welchem der beschreibende Punkt P mit dem Berührungspunkte beider Kreise zusammenfiel. Setzen wir wieder den Wälzungswinkel $OCP = \omega$,

Fig. 61.



so ist wegen der Gleichheit der aneinander abgewickelten Bogenlängen $\angle COA = \frac{a\omega}{b}$ und $\angle QCP = \frac{(b+a)\omega}{b}$, wenn a den Radius des rollenden, b den Radius des festen Kreises bezeichnet. Sämtliche Winkel sollen hierbei wie vorher in Teilen des Halbmessers ausgedrückt werden. Aus der Figur folgt dann zunächst, wenn $PQ \parallel OX$ und $RC \parallel OY$ gezogen ist,

$$OM = OR - PQ, \qquad MP = RC - QC,$$

und hieraus ergiebt sich für die Koordinaten x und y des beschreibenden Punktes P:

$$10)\qquad \begin{cases} x = (b + a)\, sin\, \dfrac{a\omega}{b} - a\, sin\, \dfrac{(b+a)\,\omega}{b}, \\ y = (b + a)\, cos\, \dfrac{a\omega}{b} - a\, cos\, \dfrac{(b+a)\,\omega}{b}. \end{cases}$$

Werden beide Gleichungen quadriert und addiert, so erhält man für das Quadrat der Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkte O des festen Kreises:

$$11)\qquad x^2 + y^2 = (b + a)^2 + a^2 - 2a\,(b + a)\, cos\, \omega,$$

woraus sofort folgt, dass diese Entfernung immer zwischen den Grenzen b und $b + 2a$ enthalten sein muss. An der ersten dieser beiden Grenzen ist $cos\, \omega = 1$, ω besitzt also einen der Werte

$$\ldots - 4\pi, \quad - 2\pi, \quad 0, \quad + 2\pi, \quad + 4\pi, \ldots$$

an der zweiten Grenze ist $cos\, \omega = -1$, woraus man für ω die Werte

$$\ldots - 3\pi, \quad - \pi, \quad + \pi, \quad + 3\pi, \ldots$$

erhält. Die zugehörigen x und y finden sich aus den Gleichungen 10).

Sobald die beiden Radien a und b in einem kommensurablen Verhältnisse stehen, sind die Epicykloiden nicht mehr transcendente Linien, sondern gehören in das Gebiet der algebraischen Kurven. In diesem Falle sind nämlich offenbar auch die Winkel $\frac{a\omega}{b}$ und $\frac{(b+a)\,\omega}{b}$ kommensurabel. Bezeichnen wir nun ihr gemeinschaftliches Mass mit ω_1, so lässt sich

$$\frac{a\omega}{b} = m\omega_1, \qquad \frac{(b+a)\,\omega}{b} = n\omega_1$$

setzen, wobei m und n zwei ganze Zahlen bezeichnen. Dann erlangen die Gleichungen 10) die Form:

$$x = (b + a)\, sin\, m\omega_1 - a\, sin\, n\omega_1,$$
$$y = (b + a)\, cos\, m\omega_1 - a\, cos\, n\omega_1,$$

worin man nur die goniometrischen Funktionen der Winkel $m\omega_1$ und $n\omega_1$ in bekannter Weise durch $sin\, \omega_1$ und $cos\, \omega_1$ auszudrücken hat, um mittels der Gleichung $sin^2 \omega_1 + cos^2 \omega_1 = 1$ den Winkel ω_1 eliminieren zu können. Es bleibt dann eine algebraische Gleichung

zwischen x und y. — Als einfachstes hierher gehöriges Beispiel wählen wir den Fall, wenn beide Radien einander gleich sind. Die angegebene Rechnungsform lässt hierbei noch einige Vereinfachungen zu. Setzen wir nämlich in Nr. 10) $b = a$ und verlegen zugleich den Koordinatenanfang nach A (Fig. 61), so dass y in $y + a$ übergeht, so erhalten wir für den vorliegenden Fall:

$$x = 2a \sin\omega - a \sin 2\omega,$$
$$y = 2a \cos\omega - a(1 + \cos 2\omega).$$

Mittels der Formeln

$$\sin 2\omega = 2 \sin\omega \cos\omega, \qquad 1 + \cos 2\omega = 2\cos^2\omega$$

folgt hieraus:

$$x = 2a \sin\omega (1 - \cos\omega),$$
$$y = 2a \cos\omega (1 - \cos\omega).$$

Beide letzte Gleichungen geben durch Division verbunden

$$\tan\omega = \frac{x}{y},$$

woraus unter Berücksichtigung, dass nach der zweiten der vorhergehenden Gleichungen $\cos\omega$ und y immer gleiches Vorzeichen haben müssen,

$$\cos\omega = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

hervorgeht. Wird dieser Wert in den letzten für y gefundenen Ausdruck eingesetzt, so ergiebt sich nach einfacher Umformung:

$$12) \qquad (x^2 + y^2 + 2ay)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Linie vierten Grades besitzt, wie sich unter anderem durch Transformation in Polarkoordinaten leicht ableiten lässt, eine herzförmige Gestalt und führt hiervon den Namen Cardioide.

III. Lässt man den beweglichen Kreis auf der innern Seite der Peripherie eines festen Kreises rollen, so wird die von einem seiner Peripheriepunkte beschriebene Kurve Hypocykloide* genannt. Ihre Gleichungen werden unter Beibehaltung der vorher

* Besitzt der rollende Kreis einen grösseren Radius als der ruhende, so dass sich seine konkave Seite auf der konvexen des festen Kreises abwickelt, so erhält die Kurve von einigen den Namen Pericykloide. Auf die Ableitung der Gleichung hat dieser Unterschied keinen Einfluss.

angewendeten Bezeichnungen und der früheren Lage des Koordinatensystems ohne weiteres aus den für die Epicykloide geltenden Formeln hergeleitet, wenn man dem Halbmesser a und dem Wälzungswinkel ω, welche beide in eine entgegengesetzte Lage übergehen, die entgegengesetzten Vorzeichen erteilt. Man wird diese Bemerkung bestätigt finden, wenn man die Fig. 61 in der dem jetzigen Falle entsprechenden Weise abändert. Nach Analogie von Nr. 10) ergeben sich dann für den Hypocykloidenpunkt xy mit dem Wälzungswinkel ω die Gleichungen:

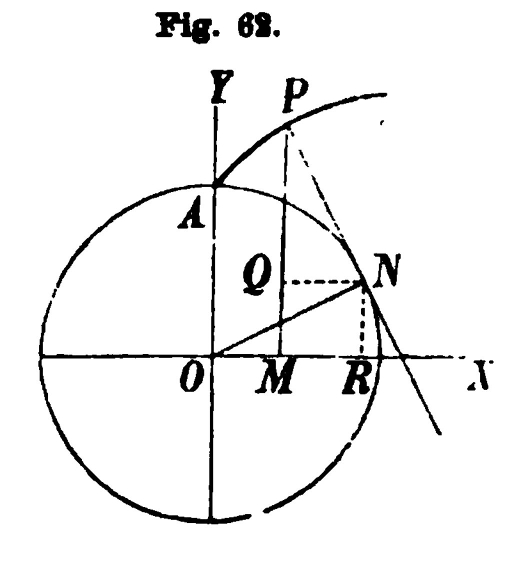
$$13)\quad \begin{cases} x = (b-a)\sin\dfrac{a\omega}{b} - a\sin\dfrac{(b-a)\omega}{b}, \\ y = (b-a)\cos\dfrac{a\omega}{b} + a\cos\dfrac{(b-a)\omega}{b}, \end{cases}$$

woran ähnliche Betrachtungen wie bei der Epicykloide geknüpft werden können. So gelangt man u. a. in gleicher Weise wie dort zu dem Resultate, dass, wenn die Halbmesser der beiden Kreise kommensurabel sind, die Hypocykloide in das Gebiet der algebraischen Kurven übertritt. Untersuchen wir z. B. den Fall, wo der Durchmesser des rollenden Kreises gleich dem Radius der festen Basis oder $b = 2a$ ist, so entsteht aus Nr. 13):

$$x = 0, \qquad y = 2a\cos\frac{\omega}{2}.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass dann die Hypocykloide in die geradlinige Ordinatenachse übergeht, die zweite, dass der beschreibende Punkt immer innerhalb derjenigen Strecke dieser Geraden bleiben muss, in welcher sie einen Durchmesser des festen Kreises bildet.

Fig. 62.



IV. Als letztes Beispiel einer Linie, welche nach der früher aufgestellten Begriffsbestimmung im weiteren Sinne ebenfalls zur Klasse der Rollkurven gezählt werden kann, wählen wir die Kreisevolvente (Fig. 62). Sie wird von einem Punkte P einer Geraden PN beschrieben, die sich ohne Verschiebung an der Peripherie eines festen Kreises so fortbewegt, dass sie immer mit ihm in Berührung bleibt. Es bildet also diese Kurve gewissermassen den direkten

Gegensatz zur gemeinen Cykloide, indem bei ihr der Kreis fest und die Gerade beweglich ist, während dort der umgekehrte Fall stattfand.

Um ihre Gleichungen für Parallelkoordinaten zu ermitteln, benutzen wir ein rechtwinkliges System, dessen Anfang mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises zusammenfällt. Die y-Achse wird durch den in der Kreisperipherie befindlichen Kurvenpunkt A gelegt. Stellen $OM = x$ und $MP = y$ die Koordinaten des beschreibenden Punktes P dar, für welchen die bewegte Gerade PN den Kreis in N tangiert, so ist, wenn man QN und RN parallel zu den Koordinatenachsen zieht,

$$x = OR - QN, \qquad y = RN + QP.$$

Wird nun der Radius $OA = ON = a$ gesetzt und der in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Winkel AON mit ω bezeichnet, so erhält man aus dem Entstehungsgesetze der Kurve:

$$PN = Arc\, AN = a\omega,$$

folglich in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen:

$$14) \qquad \begin{cases} x = a \sin\omega - a\omega \cos\omega, \\ y = a \cos\omega + a\omega \sin\omega. \end{cases}$$

Soll die Kreisevolvente durch Polarkoordinaten r und θ (in gleicher Weise wie bei den Spiralen, denen sie der Gestalt nach zugezählt werden kann) ausgedrückt werden, so können auch diese beiden veränderlichen Grössen vom Winkel ω abhängig gemacht werden. Behalten wir O als Koordinatenanfang bei und nehmen OY zur polaren Achse, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{x}{y}.$$

Mit Benutzung von Nr. 14) giebt die erste dieser beiden Formeln

$$15) \qquad r^2 = a^2 + a^2\omega^2,$$

woraus in Übereinstimmung mit der Entstehungsweise der Evolvente folgt, dass kein Punkt dieser Kurve innerhalb des festen Kreises gelegen sein kann. Von $r = a$ an wachsen die Werte von r gleichzeitig mit ω ins Unendliche. Die Gleichung $\tan\theta = \frac{x}{y}$ führt, wenn man aus 14) die Werte von x und y einsetzt und im Zähler und Nenner durch $a \cos\omega$ dividiert, zu dem Resultate:

$$\tan\theta = \frac{\tan\omega - \omega}{1 + \omega\tan\omega}.$$

Wird hierin auf ω reduziert, so entsteht die einfache Formel:

16) $$\omega = \tan(\omega - \theta),$$

aus welcher die den verschiedenen ω zugehörigen Werte von θ berechnet werden können. — Die Gleichungen 15) und 16) lassen sich übrigens auch auf sehr leichte Weise unmittelbar aus der Fig. 62 herleiten, wenn man darin den Leitstrahl OP zieht. Wir geben dies der Selbstübung des Lesers anheim.

Die Untersuchung über die Lage der Tangenten einer Kreisevolvente kann mit Hilfe der Gleichungen 14) auf demselben Wege wie bei der gemeinen Cykloide geführt werden. Sie liefert das Resultat, dass alle Tangenten des festen Kreises, welcher in dem im § 39 auf Seite 223 festgestellten Sinne die zugehörige Evolute darstellt, Normalen der Evolvente bilden. Es ist dies eine Eigenschaft, welche, wie die höhere Mathematik beweist, jeder Evolute in Beziehung zu ihrer Evolvente zukommt.

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

BEARBEITET

VON

O. FORT UND **O. SCHLÖMILCH.**

ZWEITER TEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE DES RAUMES

VON

DR. O. SCHLÖMILCH,

K. S. GEHEIMER RAT A. D.

FÜNFTE AUFLAGE.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1886.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorrede zur ersten Auflage.

Bei der Ausarbeitung der analytischen Geometrie des Raumes habe ich meine Aufmerksamkeit vorzüglich auf zwei Punkte gerichtet, die gerade für ein Schulbuch — und mehr soll das vorliegende nicht sein — ihre Berechtigung haben dürften.

Um zunächst die dem Kalkül der analytischen Geometrie eigentümlichen Abstraktionen möglichst anschaulich zu machen, ist die nahe Verwandtschaft der analytischen und der deskriptiven Geometrie so viel als thunlich hervorgehoben worden; gern hätte ich die Analogie zwischen beiden noch weiter ins Detail verfolgt und an einer Reihe von Aufgaben den Parallelismus des analytischen und deskriptiven Verfahrens nachgewiesen, wenn nicht hierdurch eine Weitläufigkeit der Exposition und ein Figurenreichtum entstanden wäre, die sich mit den engen Grenzen eines Lehrbuchs nicht vertragen. Ich musste mich daher auf eine prinzipielle Erörterung beschränken und habe nachher nur an geeigneten Stellen jene Analogie näher berührt. Im Zusammenhange damit ist die Entwickelung der Fundamentalformeln durchaus nach einem und demselben Verfahren, nämlich durch Anwendung von Projektionen ausgeführt worden; man erhält hierdurch auch die Formeln zur Koordinatenverwandlung auf die kürzeste Weise und fast ohne Rechnung.

Zweitens habe ich in dem, was ich gebe, nach einer gewissen Vollständigkeit gestrebt. So sind die lehrreichen, auf gerade Linien und Ebenen bezüglichen Aufgaben, welche die deskriptive Geometrie sorgfältig zu behandeln pflegt, mit möglichster Ausführlichkeit und allgemein in Beziehung auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bearbeitet, wobei sich

hie und da auch einige wissenschaftliche Ausbeute fand, wie z. B. die Konstruktion der Transversalen zu vier gegebenen Geraden. — Für die Flächen zweiten Grades habe ich zwei Diskussionen gegeben, die Cauchysche und die Plückersche, und zwar scheint mir letztere die notwendige wissenschaftliche Ergänzung der ersten zu sein. Wenn es nämlich nur darauf ankommt, aus der allgemeinen Gleichung die individuellen Flächen auszulesen, so kann man sich die Sache durch Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystemes erleichtern und dann führt Cauchys Betrachtung jedenfalls auf die kürzeste und eleganteste Weise zum Ziele; hieran schliesst sich naturgemäss die Betrachtung der einzelnen Flächen, wie sie in den §§ 34—38 mitgeteilt ist. Wenn aber nachher die Gleichung irgend einer Fläche zweiten Grades auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bezogen vorkommt und rasch entschieden werden soll, welche individuelle Fläche durch dieselbe charakterisiert wird, so wäre es eine zu grosse Umständlichkeit, die Gleichung auf rechtwinklige Koordinaten zu bringen und die ganze Cauchysche Betrachtung zu wiederholen; hier ist es die Plückersche Diskussion, welche durch Entwickelung leicht anwendbarer Kriterien eine augenblickliche Entscheidung herbeiführt. Bei dieser Stellung lässt sich übrigens die Plückersche Untersuchung vereinfachen, weil man die individuellen Flächen zweiten Grades als schon bekannt voraussetzen darf.

Das letzte Kapitel — die analytische Projektionslehre — ist gewissermassen nur ein Anhang zur analytischen Geometrie, hoffentlich aber denen nicht unwillkommen, welchen daran liegt, die Ergebnisse des Kalküls in möglichst einfacher Weise graphisch darstellen zu können.

Dresden, Michaelis 1855.

O. Schlömilch.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Die vorliegende zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten nur durch eine Änderung, welche den Gebrauch des schiefwinkligen Koordinatensystemes betrifft. Da nämlich letzteres meistens zu komplizierten Formeln führt und daher selten benutzt wird, so habe ich mich im eigentlichen Texte auf das rechtwinklige Koordinatensystem beschränkt und die Untersuchungen über das schiefwinklige System in Anhänge zu den einzelnen Kapiteln verwiesen. Durch diese Änderung dürfte das Buch an praktischer Brauchbarkeit wesentlich gewonnen haben; der Text enthält nun gerade dasjenige Material, welches man auf polytechnischen Instituten im Laufe eines Semesters zu behandeln pflegt.

Dresden, im September 1863.

O. Schlömilch.

Vorrede zur dritten und vierten Auflage.

Entsprechend dem in den früheren Vorreden angegebenen Zwecke des vorliegenden Werkes bot sich keine Veranlassung, die gegenwärtige neue Auflage mit grösseren Zusätzen auszustatten. So wichtig und interessant auch die verschiedenen neueren Koordinatensysteme in rein wissenschaftlicher Beziehung sind, so haben sie bis jetzt in der angewandten Mathematik doch nur sehr spärliche Anwendung gefunden, und zur Zeit ist es immer noch das System der Punktkoordinaten, welches bei den Problemen der Geodäsie, Mechanik u. s. w. die Hauptrolle spielt.

Dresden, im August 1877.

O. Schlömilch.

Vorrede zur fünften Auflage.

Da die fünfte Auflage des ersten Teils nach dem Ableben seines Verfassers von Herrn Prof. Dr. Heger hier besorgt und mit mehrfachen Verbesserungen ausgestattet worden ist, so hielt ich es für geboten, dem genannten Herrn alle diejenigen Änderungen und Zusätze anheimzugeben, wodurch die Gleichförmigkeit beider Teile zu erreichen war. Herr Prof. Heger hat sich dieser Arbeit mit dankenswerter Bereitwilligkeit unterzogen und namentlich die Theorie der Ebene und die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades durch wertvolle Ausführungen bereichert.

Dresden, im Mai 1886.

O. Schlömilch.

Inhaltsverzeichnis.

Sechstes Kapitel. Die Kegelflächen.

Siebentes Kapitel. Die Umdrehungsflächen.

Achtes Kapitel. Die Flächen zweiten Grades.

Neuntes Kapitel. Flächen verschiedener Gattungen.

Zehntes Kapitel. Analytische Projektionslehre.

Erstes Kapitel.

Die Punkte im Raume.

§ 1.

Das Parallelkoordinatensystem.

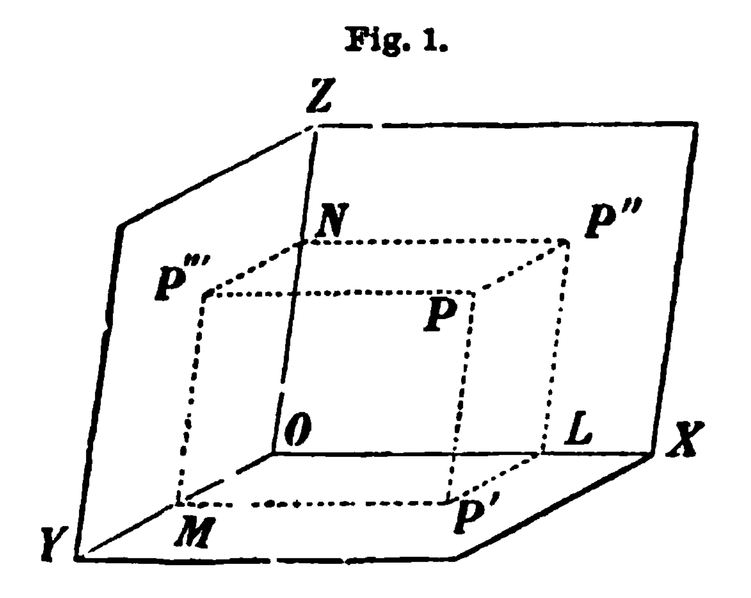
So wie man in der analytischen Geometrie der Ebene die Lage eines Punktes dadurch bestimmen kann, dass man ihn auf ein System ebener Parallelkoordinaten bezieht, so benutzt man zur Fixierung eines im Raume befindlichen Punktes ein analoges System räumlicher Parallelkoordinaten, welches auf folgende Weise zu stande kommt.

Wir denken uns drei in einem Punkte O sich schneidende Ebenen ihrer Lage nach als fest bestimmt; der Durchschnitt der ersten und zweiten Ebene heisse OX, der Durchschnitt der ersten und dritten OY, der Durchschnitt der zweiten und dritten OZ. Die erste Ebene, welche die Geraden OX und OY enthält, nennen wir die Koordinatenebene oder Projektionsebene xy; in gleicher Weise bezeichnen wir die beiden anderen Ebenen XOZ und YOZ als die Koordinaten- oder Projektionsebenen xz und yz. Die Geraden OX, OY, OZ heissen die Koordinatenachsen und zwar OX die Achse der x, OY die der y und OZ die der z; der Punkt O, in welchem die Koordinatenachsen zusammentreffen, wird der Anfangspunkt der Koordinaten genannt; die Winkel XOY, XOZ, YOZ endlich, welche die Koordinatenachsen miteinander bilden, mögen den Namen der Koordinatenwinkel führen und der Reihe nach mit $\angle(xy)$, $\angle(xz)$, $\angle(yz)$ bezeichnet werden.

Betrachten wir nun einen Punkt P innerhalb des von den Koordinatenebenen eingeschlossenen Raumes, so können wir seine

Lage dadurch bestimmen, dass wir durch P drei den Koordinatenebenen parallele Ebenen legen und die Abschnitte angeben, welche diese neuen Ebenen auf den Koordinatenachsen bilden. Die vorhandenen sechs Ebenen schliessen nämlich ein Parallelepiped ein, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel laufen; die Punkte O und P sind zwei gegenüberliegende Ecken desselben; von den übrigen sechs Ecken mögen L, M, N diejenigen sein, welche der Reihe nach in den Achsen der x, der y und der z liegen, endlich P', P'', P''' diejenigen, welche der Reihe nach in die Ebenen xy, xz und yz fallen. Das fragliche Parallelepiped ist nun bestimmt und damit zugleich die Lage des Punktes P gegeben, sobald man die drei Kanten des Körpers kennt; sie werden bezeichnet durch

Fig. 1.



$$
\begin{aligned}
OL &= MP' = NP'' = PP''' = x,\\
OM &= NP''' = LP' = PP'' = y,\\
ON &= LP'' = MP''' = PP' = z,
\end{aligned}
$$

und heissen die **schiefwinkligen Parallelkoordinaten** (oft auch schlechtweg die Koordinaten) des Punktes P. Die in den Koordinatenebenen liegenden Eckpunkte P', P'', P''' nennt man die **schiefwinkligen Projektionen** des Punktes P; ihre Lagen sind durch x, y, z gleichzeitig bestimmt, denn es lassen sich $OL = x$ und $OM = y$ als die ebenen Parallelkoordinaten der Projektion P' auf die Ebene xy betrachten, in gleicher Weise x und z als Koordinaten der Projektion P'' auf die Ebene xz, sowie y und z als Koordinaten der Projektion P''' auf die Ebene yz.

Um allgemeiner die Lage eines beliebigen nicht gerade innerhalb des Körperwinkels $OXYZ$ befindlichen Punktes zu bestimmen, denken wir uns die bisherigen Koordinatenebenen allseitig ins Unendliche erweitert, so dass auch die bisher nur nach einer Seite hin ins Unendliche fortgehenden Koordinatenachsen jetzt nach beiden Seiten hin unendlich werden. Die erweiterten Koordinatenebenen teilen den ganzen unendlichen Raum in acht Teile, die sich als körperliche Winkel bezeichnen lassen, wenn die Rückverlängerungen

von OX, OY, OZ der Reihe nach OX_1, OY_1, OZ_1 genannt werden; man hat nämlich die acht Winkelräume

$$OXYZ,$$
$$OX_1YZ, \quad OXY_1Z, \quad OXYZ_1,$$
$$OXY_1Z_1, \quad OX_1YZ_1, \quad OX_1Y_1Z,$$
$$OX_1Y_1Z_1.$$

Befindet sich nun der Punkt P_1 in dem Raume OX_1YZ, so besitzt das seine Lage bestimmende Parallelepiped die Kanten OL_1, OM, ON, von denen die erste der früheren Kante OL entgegengesetzt liegt und deshalb mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen werden muss; vorausgesetzt, dass die von O nach X hin gezählten x als positive x betrachtet werden, ist im vorliegenden Falle x negativ zu nehmen. Auf gleiche Weise entscheidet sich bei jeder anderen Lage die Wahl des Vorzeichens. Wenn überhaupt die positiven x, y, z im Sinne von OX, OY, OZ genommen und die absoluten Werte der Koordinaten immer mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden, so sind die Koordinaten eines Punktes

Fig. 2.

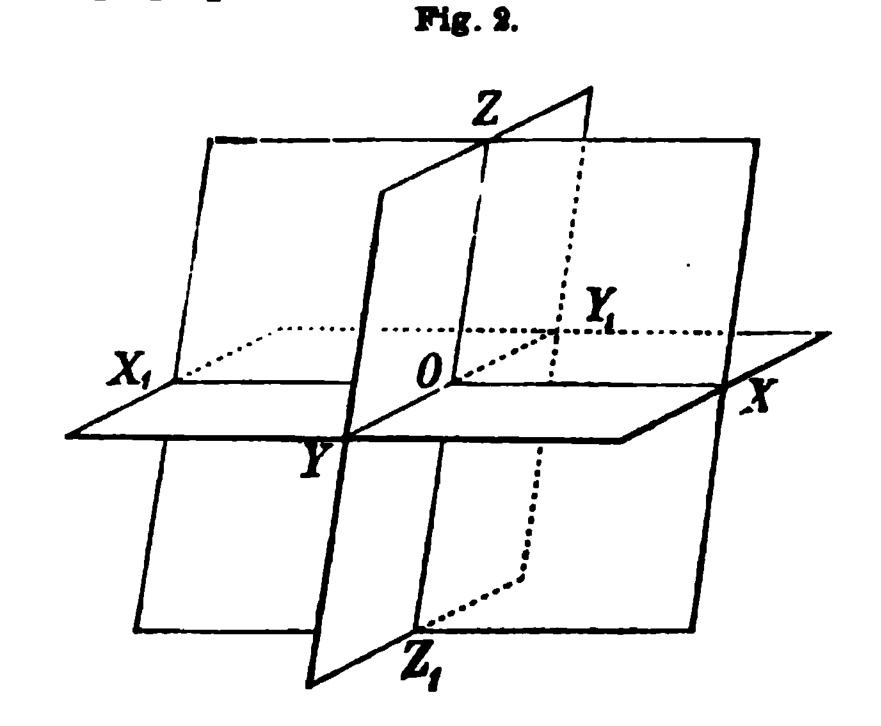
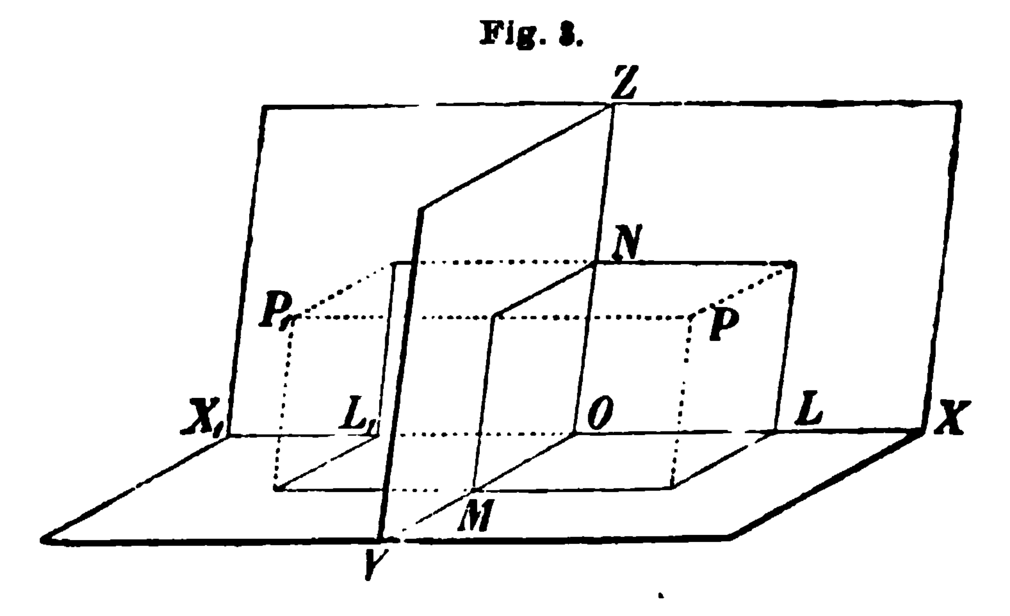


Fig. 3.



im Raume	$OXYZ$	$: x = + x_0, \quad y = + y_0, \quad z = + z_0;$
" "	OX_1YZ	$: x = - x_0, \quad y = + y_0, \quad z = + z_0;$
" "	OXY_1Z	$: x = + x_0, \quad y = - y_0, \quad z = + z_0;$
" "	$OXYZ_1$	$: x = + x_0, \quad y = + y_0, \quad z = - z_0;$
" "	OXY_1Z_1	$: x = + x_0, \quad y = - y_0, \quad z = - z_0;$
" "	OX_1YZ_1	$: x = - x_0, \quad y = + y_0, \quad z = - z_0;$
" "	OX_1Y_1Z	$: x = - x_0, \quad y = - y_0, \quad z = + z_0;$
" "	$OX_1Y_1Z_1$	$: x = - x_0, \quad y = - y_0, \quad z = - z_0.$

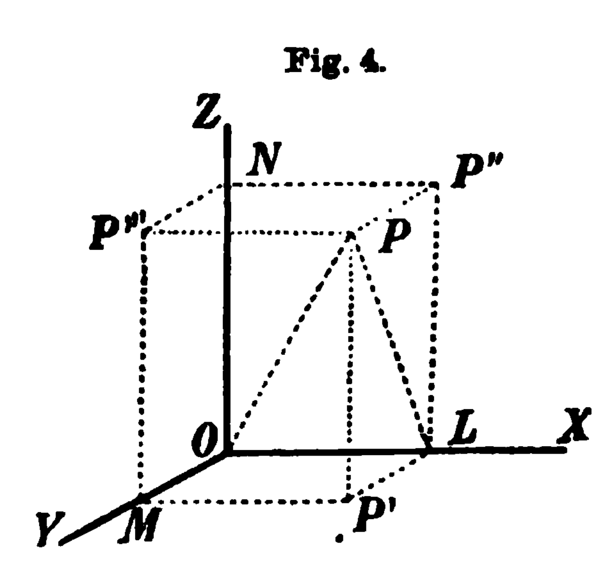
Liegt ein Punkt in einer der Koordinatenebenen, so ist eine seiner Koordinaten der Null gleich; gehört er zwei Koordinatenebenen zugleich an, d. h. liegt er auf einer der Koordinatenachsen, so verschwinden zwei seiner Koordinaten; für den Anfangspunkt der Koordinaten, der allen Koordinatenebenen zugleich angehört, gelten die Koordinaten $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$.

§ 2.

Das rechtwinklige Koordinatensystem und seine graphische Darstellung.

Wenn nicht besondere Umstände die Wahl eines schiefwinkligen Koordinatensystems erfordern, nimmt man in der Regel die Koordinatenebenen senkrecht zueinander, wodurch auch die zwischen den Koordinatenachsen enthaltenen Winkel $\angle(xy)$, $\angle(xz)$, $\angle(yz)$ zu rechten Winkeln werden; das so entstehende spezielle System von Parallelkoordinaten heisst das r e c h t w i n k l i g e Koordinatensystem und bedarf wegen seines überaus häufigen Gebrauches einer genaueren Betrachtung.

Fig. 4.

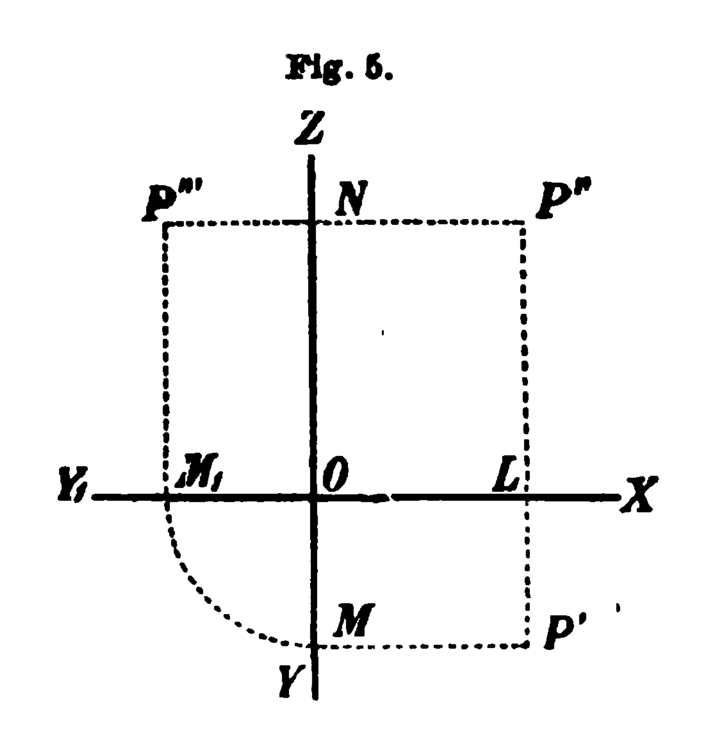


Was zunächst die Koordinaten $x = PP'''$, $y = PP''$ und $z = PP'$ anbetrifft, so stehen diese senkrecht auf den zugehörigen Koordinatenebenen, d. h. die r e c h t w i n k l i g e n K o o r d i n a t e n eines P u n k t e s s i n d s e i n e E n t f e r n u n g e n v o n d e n K o o r d i n a t e n e b e n e n, und zwar ist x die Entfernung des Punktes von der Ebene yz, dem analog y seine Entfernung von der Ebene zx, endlich z seine Entfernung von der Ebene xy.

Die Projektionen P', P'', P''' des Punktes P werden jetzt zu dessen orthogonalen (oder normalen) Projektionen, denen wir in Übereinstimmung mit der deskriptiven Geometrie besondere Namen beilegen wollen; es heisse nämlich P' die H o r i z o n t a l p r o j e k t i o n, P'' die V e r t i k a l p r o j e k t i o n und P''' die s e i t l i c h e (vertikale) Projektion des Punktes P. Diese Beziehungen sind leicht in einer Ebene darzustellen, wenn man die Ebene xy so weit um die x-Achse und die Ebene yz so weit um die z-Achse gedreht denkt, bis

beide Ebenen mit der Ebene xz zusammenfallen. Nehmen wir letztere zur Ebene der Zeichnung, so repräsentieren die drei nebeneinander liegenden Winkelräume XOY, XOZ und Y_1OZ die drei Koordinaten- oder Projektionsebenen, wobei die y-Achse in zwei verschiedenen Lagen OY und OY_1 erscheint. Die früheren rechtwinklig zu einander und senkrecht auf der x-Achse stehenden Geraden LP' und LP'' vereinigen sich zu einer einzigen Geraden $P'P''$, welche die x-Achse senkrecht in L schneidet; zugleich hat man die drei rechtwinkligen Koordinaten des Punktes vor sich, nämlich $OL = x$, $LP' = y$ und $LP'' = z$. Die dritte Projektion P''' lässt sich übrigens leicht aus P' und P'' ableiten, wenn man berücksichtigt, dass P''' die Ecke eines aus den Seiten $OM_1 = OM = LP' = y$ und $ON = LP'' = z$ konstruierten Rechtecks ist; eben deswegen pflegt man bei der graphischen Darstellung der Koordinaten und Projektionen eines Punktesystemes die dritte Projektion wegzulassen. Zu bemerken ist endlich noch, dass man sich die beiden übrig bleibenden Ebenen xy und xz (die horizontale und vertikale Projektionsebene) vollständig, d. h. in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung zu denken hat, dass mithin die Ebene der Zeichnung als eine aus der Aufeinanderlagerung zweier Ebenen entstandene Doppelebene zu betrachten ist. Demgemäss bedeutet der unterhalb der x-Achse liegende Teil der Zeichnung ebensowohl die Vorderseite der Horizontalebene, als die untere Hälfte der Vertikalebene, und in ähnlicher Weise enthält der oberhalb der x-Achse liegende Teil der Zeichnung ebensowohl die hintere Seite der Horizontalebene, als die obere Hälfte der Vertikalebene; dennoch kann über die Bedeutung eines Punktes kein Zweifel entstehen, wenn die in der Horizontalebene liegenden Punkte jederzeit mit einem, und die der Vertikalebene angehörigen Punkte immer mit zwei Accenten bezeichnet werden.

Fig. 5.



Man wird bemerken, dass diese graphische Darstellung der Koordinaten und Projektionen eines Punktes mit der in der deskriptiven Geometrie üblichen Auffassung zusammenstimmt. In der

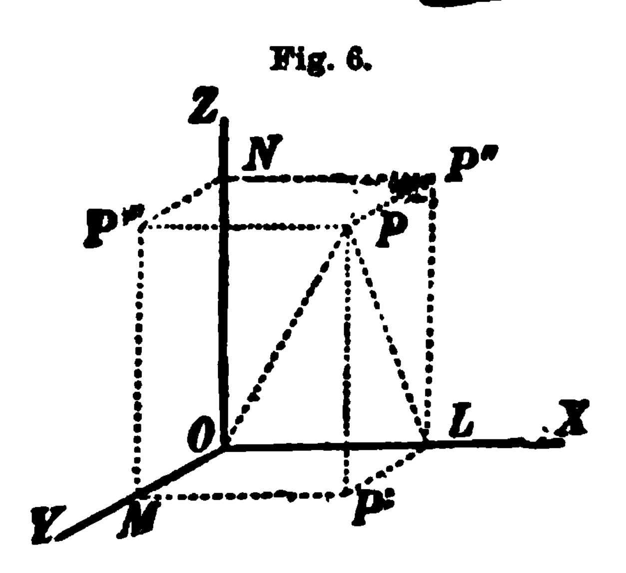
That sind auch beide Darstellungen nicht wesentlich verschieden, und wenn man in einer deskriptiv-geometrischen Zeichnung die sogenannte Grundlinie (den Grundschnitt) als x-Achse nimmt, auf ihr einen festen Punkt O wählt und die in einer Vertikalen liegenden Projektionen P' und P'' eines Punktes durch eine Gerade verbindet, welche die x-Achse in L senkrecht schneidet, so sind $OL = x$, $LP' = y$ und $LP'' = z$ die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P im Raume.

§ 3.

Das cylindrische und das sphärische Koordinatensystem.

I. Man kann sich die Lage des Punktes P, dessen rechtwinklige Koordinaten wiederum x, y, z heissen mögen, dadurch fixiert denken, dass man zuerst den Punkt P''' bestimmt und in diesem die Gerade $P'''P = x$ senkrecht auf der Ebene yz errichtet. Verwendet man zur Bestimmung von P''' die ebenen rechtwinkligen Koordinaten $OM = y$ und $MP''' = z$, so kommt man auf das System der rechtwinkligen Koordinaten zurück, benutzt man dagegen zur Bestimmung des Punktes P''' Polarkoordinaten in der Ebene yz, so entsteht ein neues, aus rechtwinkligen und polaren Koordinaten gemischtes System. Für letzteren Zweck denke man sich die Gerade OP''' gezogen, die Länge $OP''' = p$ und $\angle YOP''' = \omega$ gesetzt; die drei Grössen ω, p, x bestimmen dann die Lage des Punktes P und heissen die Cylinderkoordinaten desselben. Der Grund dieser Bezeichnung liegt darin, dass die Gerade $P'''P$ den Mantel eines Cylinders beschreibt, sobald man p und x unverändert, dagegen ω alle Werte von 0^0 bis 360^0 durchlaufen lässt. Wie bei ebenen Polarkoordinaten nimmt man p gewöhnlich nur positiv und zählt ω

Fig. 6.



von 0^0 bis 360^0, was ausreicht, um den Punkt P''' in allen vier Quadranten der Ebene yz herumzuführen; x kann wie früher positiv oder negativ sein. Der Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und den cylindrischen Koordinaten des Punktes P spricht sich in folgenden unmittelbar ersichtlichen Formeln aus:

$$1)\qquad x = x,\quad y = p\cos\omega,\quad z = p\sin\omega$$

und umgekehrt

$$2)\qquad x = x,\quad p = \sqrt{y^2 + z^2},\quad \tan\omega = \frac{z}{y}.$$

Bei der letzten Formel ist ω so zu wählen, dass y und z, nach den Formeln 1) berechnet, diejenigen Vorzeichen erhalten, welche sie thatsächlich besitzen. Sind z. B. gegeben die rechtwinkligen Koordinaten $x = +a$, $y = -b$, $z = -c$, wo a, b, c die absoluten Werte der Koordinaten bedeuten, und wird p positiv genommen, so müssen y und z, also auch $\cos\omega$ und $\sin\omega$ gleichzeitig negativ ausfallen; die Cylinderkoordinaten des Punktes sind hiernach $+a$, $\sqrt{b^2 + c^2}$ und derjenige im dritten Quadranten liegende Winkel, dessen Tangente $= \frac{c}{b}$ ist.

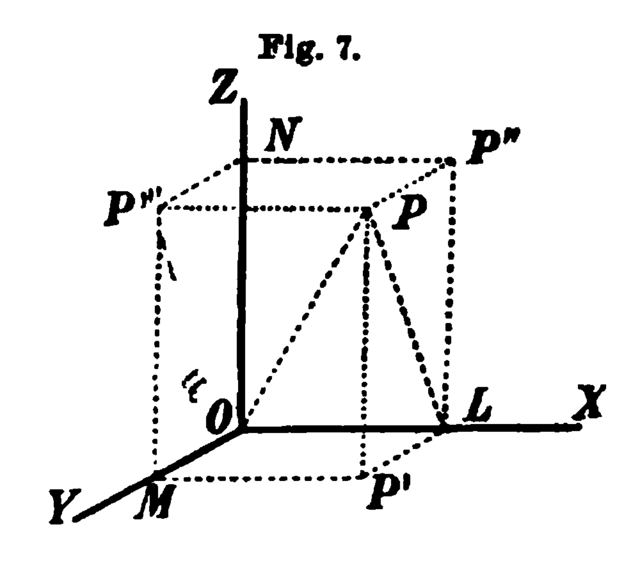
Selbstverständlich kann man statt P''' ebensowohl P'' als P' durch Polarkoordinaten ausdrücken und die jedesmal übrige rechtwinklige Koordinate ungestört lassen, was zu analogen Systemen von Cylinderkoordinaten führt. Denkt man sich z. B. OP' gezogen und setzt $OP' = q$, $\angle XOP' = \psi$, so hat man die Cylinderkoordinaten ψ, q, z und es ist

$$x = q\cos\psi,\quad y = q\sin\psi,\quad z = z,$$

und umgekehrt

$$q = \sqrt{x^2 + y^2},\quad \tan\psi = \frac{y}{x},\quad z = z.$$

II. Aus dem vorigen Systeme der ω, p, x lässt sich ein ferneres Koordinatensystem ableiten, wenn man bemerkt, dass der Punkt P nunmehr als zur Ebene $OLPP'''$ gehörig angesehen, mithin auch durch Polarkoordinaten in dieser Ebene ausgedrückt werden kann. Betrachtet man nämlich ω als den Neigungswinkel der Ebene $OLPP'''$ gegen die Ebene xy, so wird durch ω zunächst die Lage der Ebene $OLPP'''$ fixiert und in letzterer mögen dann die Polarkoordinaten $OP = r$, $\angle XOP = \varphi$ zur völligen Bestimmung des Punktes P dienen. Nicht selten nennt man r den räumlichen



Radiusvektor des Punktes P und die drei Grössen ω, φ, r räumliche Polarkoordinaten oder **sphärische Koordinaten**; letztere Bezeichnung hat darin ihren Grund, dass sich der Punkt P auf einer mit dem Radius r beschriebenen Kugelfläche bewegt, sobald r konstant bleibt, während sich ω und φ ändern. Gewöhnlich nimmt man r positiv und zählt ω wie früher von 0^0 bis 360^0, so dass die Ebene $OLPP'''$ eine vollständige Drehung um die x-Achse ausführt; für den Winkel φ ist dann der Spielraum von 0^0 bis 180^0 ausreichend, um den Punkt P alle Stellen des ganzen unendlichen Raumes betreten zu lassen. Der Zusammenhang zwischen den rechtwinkligen und den sphärischen Koordinaten des Punktes P ergiebt sich aus der Bemerkung, dass OL senkrecht auf der Ebene $P'LP''P$, mithin auch senkrecht auf der in genannter Ebene liegenden Geraden LP, dass also das Dreieck OLP rechtwinklig bei L ist; man hat demgemäss

$$x = r\cos\varphi, \quad p = OP''' = LP = r\sin\varphi$$

und durch Substitution dieser Werte in Nr. 1)

$$3) \qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\omega, \quad z = r\sin\varphi\sin\omega,$$

sowie umgekehrt

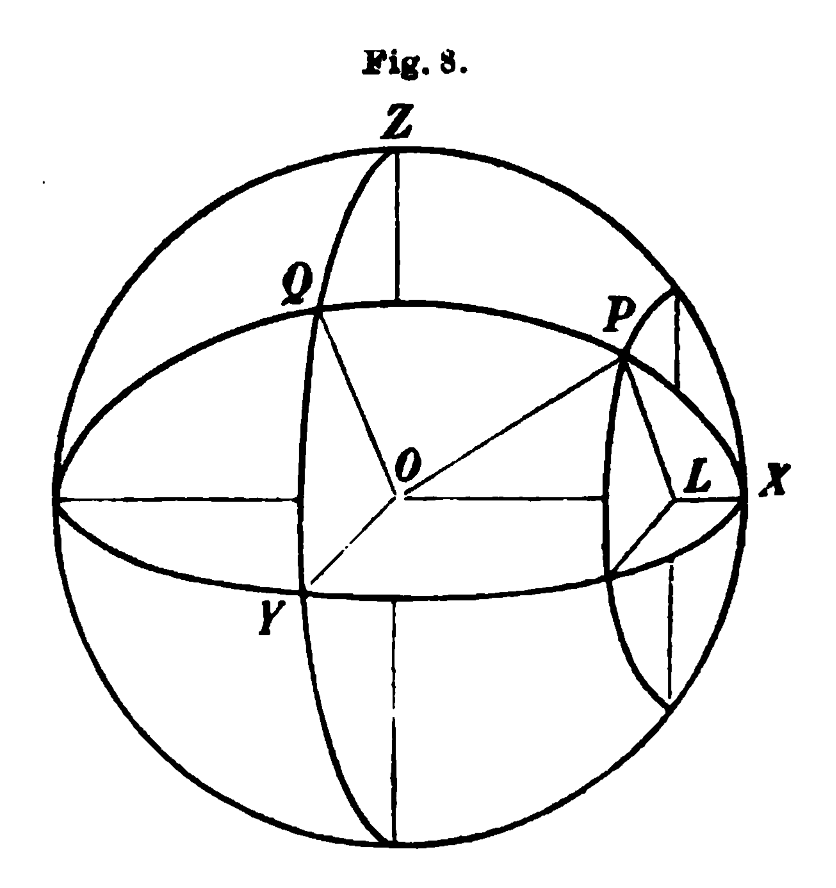
$$4) \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \tan\omega = \frac{z}{y}.$$

Bei den letzten Formeln hat man φ und ω so zu wählen, dass x, y, z, nach den Formeln 3) berechnet, diejenigen Vorzeichen erhalten, welche ihnen thatsächlich zukommen. Sind z. B. gegeben $x = +a$, $y = -b$, $z = -c$, wo a, b, c die absoluten Werte der Koordinaten bedeuten, und wird r positiv genommen, so ist $\cos\varphi$ positiv, mithin φ zwischen 0^0 und 90^0 enthalten; da jetzt $r\sin\varphi$ positiv ausfällt, y und z aber negativ sind, so muss ω so gewählt werden, dass $\cos\omega$ und $\sin\omega$ zugleich negativ sind; demgemäss hat man für ω denjenigen Winkel zwischen 180^0 und 270^0 zu nehmen, dessen Tangente $= \frac{c}{b}$ ist. Dasselbe Resultat findet sich leicht geometrisch, wenn man beachtet, in welchem Oktanten des Raumes der durch $x = a$, $y = -b$ und $z = -c$ bestimmte Punkt liegt.

Noch wollen wir bemerken, dass das besprochene Koordinatensystem in nahem Zusammenhange mit der geographischen Ortsbestimmung steht. Denken wir uns zunächst nur r gegeben, so

ist die Lage des Punktes P noch nicht vollkommen bestimmt, vielmehr kann er beliebig auf einer mit dem Halbmesser r um den Mittelpunkt O beschriebenen Kugel liegen; es bedarf daher noch einer näheren Angabe seiner Lage auf dieser Fläche. Stellen wir uns letztere auf die Weise entstanden vor, dass sich ein in der xy-Ebene aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser r beschriebener Halbkreis um die x-Achse gedreht hat, so ist die Ebene der xy die erste Meridianebene der Kugel und die Ebene LOP irgend eine spätere Meridianebene, deren Lage gegen die erste durch den Neigungswinkel ω bestimmt wird; letzterer ist daher nichts anderes als die **geographische Länge** des Punktes P. Bei jener Drehung beschreibt ferner die y-Achse den auf der Drehungsachse senkrechten grössten Kreis, d. h. den **Äquator**, mithin ist $\angle POQ$ die geographische Breite des Punktes P und folglich φ das **Komplement der Breite** oder die **Poldistanz**.

Fig. 3.



Analoge sphärische Systeme entstehen, wenn man nicht von der Ebene $OLPP'''$, sondern von einer der Ebenen $OMPP''$ oder $ONPP'$ ausgeht. Um noch das letztere zu erwähnen, sei wie früher $\angle XOP' = \psi$, ferner $\angle POP' = \tau$ und $OP = r$; es wird dann

$$x = r \cos \tau \cos \psi, \quad y = r \cos \tau \sin \psi, \quad z = r \sin \tau$$

und umgekehrt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \tan \psi = \frac{y}{x}, \quad \sin \tau = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Der Äquator liegt hier in der Ebene xy, ferner ist ψ die geographische Länge, τ die geographische Breite.

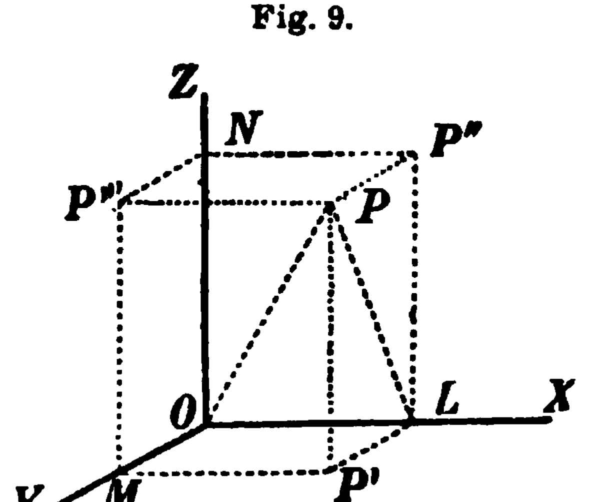
§ 4.

Grösse und Lage des Radiusvektor.

Wenn die drei Koordinaten eines Punktes P gegeben sind, so ist dadurch auch seine Entfernung vom Koordinatenanfange O,

d. h. sein Radiusvektor, der Grösse und Richtung nach bestimmt; man kann daher die Aufgabe stellen: aus den Koordinaten x, y, z die Länge $OP = r$ und die Winkel $XOP = \varphi$, $YOP = \psi$, $ZOP = \chi$ (die sogen. Richtungswinkel des Radiusvektor) zu berechnen. Bei der Lösung dieser Aufgabe beschränken wir uns auf das rechtwinklige Koordinatensystem. (Fig. 9.)

Fig. 9.



Aus den Dreiecken OLP und $LP'P$, deren gleichnamige Winkel Rechte sind, folgt wie früher

$$1)\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

und $x = r \cos\varphi$; dazu gesellen sich noch zwei ähnliche Gleichungen zufolge der Bemerkung, dass durch das Ziehen von MP und NP zwei Dreiecke OMP und ONP entstehen würden, deren gleichnamige Winkel rechte sind. Man hat daher zusammen

$$2)\qquad x = r\cos\varphi, \quad y = r\cos\psi, \quad z = r\cos\chi,$$

d. h. die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes können auch als die Projektionen des Radiusvektor auf die Koordinatenachsen betrachtet werden. Endlich folgen aus Nr. 1) und 2) die Formeln

$$3)\qquad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\psi = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \cos\chi = \dfrac{z}{r} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \end{cases}$$

welche in Verbindung mit Nr. 1) die Lösung der gestellten Aufgabe enthalten. Nimmt man hierbei, wie es am natürlichsten ist, r im absoluten Sinne, so hängen die Vorzeichen der Cosinus nur von den Vorzeichen der Zähler x, y, z ab, und hiernach bestimmt sich von selbst, ob der eine oder andere von den Winkeln φ, ψ, χ spitz oder stumpf ist. Dass keiner derselben grösser als 180^0 genommen zu werden braucht, ergiebt sich aus den Formeln unmittelbar und auch, damit übereinstimmend, aus einer leichten geometrischen Betrachtung.

Substituiert man die unter Nr. 2 angegebenen Werte von x, y, z in die Gleichung 1), so gelangt man zu der Relation

$$4) \qquad \cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1,$$

woraus hervorgeht, dass die Winkel φ, ψ, χ nicht unabhängig voneinander sind, dass vielmehr aus zweien unter ihnen der dritte gefunden werden kann. So ergiebt sich z. B., wenn φ und ψ gegeben sind,

$$\cos\chi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi - \cos^2\psi}$$

oder

$$\cos\chi = \sqrt{-\cos(\varphi - \psi)\cos(\varphi + \psi)}.$$

Hiernach ist $\cos\chi$, mithin auch χ unmöglich, wenn sowohl $\varphi - \psi$ als $\varphi + \psi$ weniger als 90^0 beträgt; für $\varphi + \psi = 90^0$ wird $\cos\chi = 0$, mithin χ eindeutig $= 90^0$; liegt endlich $\varphi - \psi$ im ersten, dagegen $\varphi + \psi$ im zweiten oder dritten Quadranten, so wird χ reell und zweideutig, weil die vorkommende Quadratwurzel ebensowohl positiv als negativ genommen werden kann. Diese Ergebnisse lassen sich durch folgende rein geometrische Betrachtung verifizieren. Wäre nur der Winkel φ gegeben, so würde die Richtung des Radiusvektor nicht hinreichend bestimmt sein, vielmehr könnte derselbe beliebig auf einer geraden Kegelfläche gezogen werden, die den Koordinatenanfang zur Spitze, die x-Achse zur Achse und den gegebenen Winkel φ als Winkel zwischen Achse und Seite hat; in gleicher Weise kann, falls nur ψ gegeben ist, der Radiusvektor willkürlich auf einer Kegelfläche genommen werden, deren Spitze der Koordinatenanfang, deren Achse die y-Achse, und bei welcher der Winkel zwischen Achse und Seite $= \psi$ ist. Soll nun der Radiusvektor mit der x-Achse den Winkel φ und gleichzeitig mit der y-Achse den Winkel ψ einschliessen, so muss er auf beiden Kegelflächen zugleich liegen; jedoch sind hier drei Fälle zu unterscheiden. Ist nämlich $\varphi + \psi < 90^0$, so haben die genannten Kegelflächen keinen Punkt mit einander gemein, und dann ist die Aufgabe unmöglich; im Falle $\varphi + \psi = 90^0$ berühren sich die beiden Kegelflächen längs einer in der xy-Ebene liegenden Geraden, und dann ist $\chi = 90^0$; wenn endlich $\varphi - \psi$ im ersten, dagegen $\varphi + \psi$ im zweiten oder dritten Quadranten liegt, so schneiden sich beide Kegelflächen in zwei Geraden und dann erhält χ zwei reelle voneinander verschiedene Werte.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass der Vergleich der Formeln 2) mit den Formeln 3) des vorigen Paragraphen zu den beiden Relationen

$$\cos\psi = \sin\varphi\cos\omega, \qquad \cos\chi = \sin\varphi\sin\omega$$

führt, welche auch aus bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie hergeleitet werden können.

§ 5.

Zwei Punkte im Raume.

Wenn zwei Punkte P und P_1 (Fig. 10) durch ihre Koordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 gegeben sind, so kann man zunächst die Formeln des vorigen Paragraphen auf jeden einzelnen Punkt anwenden und hat dann

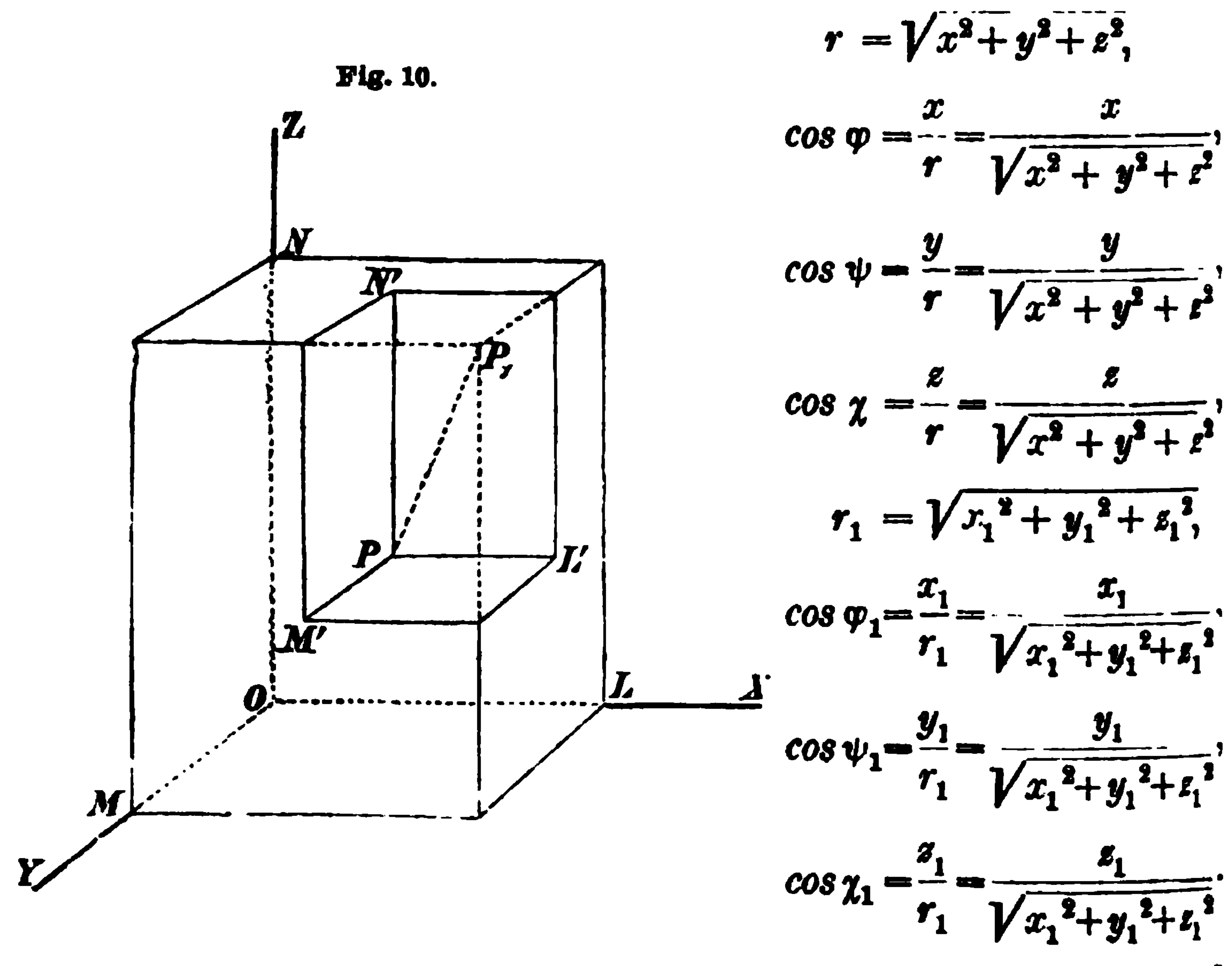


Fig. 10.

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{x_1}{r_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\psi_1 = \frac{y_1}{r_1} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\cos\chi_1 = \frac{z_1}{r_1} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Ausserdem tritt als neu hinzu die Frage nach der Grösse und Richtung der verbindenden Geraden PP_1 und die Bestimmung des Winkels POP_1, welchen die Vektoren r und r_1 miteinander bilden.

Um die erste Frage zu beantworten, denken wir uns durch P drei Gerade parallel zu den Koordinatenachsen gelegt und betrachten diese Parallelen als die Achsen eines neuen Koordinatensystemes mit dem Anfangspunkte P. Nennen wir x', y', z' die

Koordinaten von P_1 in Beziehung auf dieses sekundäre System, so haben wir zufolge des Satzes, dass die Koordinaten eines Punktes dessen Entfernungen von den Koordinatenebenen darstellen*

$$x' = PL' = x_1 - x, \quad y' = PM' = y_1 - y, \quad z' = PN' = z_1 - z.$$

Ferner kann in dem neuen Koordinatensysteme die Gerade PP_1 als Radiusvektor des Punktes P_1 angesehen werden, mithin gelten auch alle Formeln des vorigen Paragraphen nur mit den gehörigen Modifikationen. Setzen wir nämlich

$$PP_1 = s, \quad \angle X'PP_1 = \lambda, \quad \angle Y'PP_1 = \mu, \quad \angle Z'PP_1 = \nu,$$

so erhalten wir

$$s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$\cos\lambda = \frac{x'}{s} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{y'}{s} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{z'}{s} = \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}},$$

und nach Substitution der Werte von x', y', z'

$$1) \qquad s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

$$2) \quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{x_1 - x}{s} = \dfrac{x_1 - x}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}, \\ \cos\mu = \dfrac{y_1 - y}{s} = \dfrac{y_1 - y}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}, \\ \cos\nu = \dfrac{z_1 - z}{s} = \dfrac{z_1 - z}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}}. \end{cases}$$

Um noch den Winkel $POP_1 = \Theta$ zu bestimmen, wenden wir auf das Dreieck OPP_1 eine bekannte trigonometrische Formel an, nämlich

$$\cos\Theta = \frac{r^2 + r_1^2 - s^2}{2rr_1}$$

und substituieren im Zähler die vorhin angegebenen Werte von r^2, r_1^2 und s^2; es wird dann

* Der Anschaulichkeit wegen ist Fig. 10 so gezeichnet, als wäre das Parallelepiped aus den Kanten x, y, z massiv und von diesem das Parallelepiped aus den Kanten x', y', z' weggenommen.

$$3)\qquad \cos\Theta = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1}.$$

Will man alles durch die Koordinaten von P und P_1 ausdrücken, so hat man auch im Nenner für r und r_1 ihre Werte zu setzen; dies giebt

$$4)\qquad \cos\Theta = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)}}.$$

Dagegen kann man auch die Winkel einführen, welche r und r_1 mit den Koordinatenachsen bilden; die Gleichung 3) gestattet nämlich folgende Schreibweise

$$\cos\Theta = \frac{x}{r}\cdot\frac{x_1}{r_1} + \frac{y}{r}\cdot\frac{y_1}{r_1} + \frac{z}{r}\cdot\frac{z_1}{r_1}$$

und hiernach ist

$$5)\qquad \cos\Theta = \cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\psi\cos\psi_1 + \cos\chi\cos\chi_1.$$

Überhaupt dient diese Formel, um aus den Richtungswinkeln zweier beliebig langen Geraden den Winkel zwischen diesen Geraden zu berechnen.

Die Verbindung mehrerer Punkte im Raume, z. B. ein räumliches Polygon, kann immer als successive Verbindung von je zwei Punkten aufgefasst werden; es liegt daher keine Veranlassung vor, die obigen Betrachtungen auf mehr als zwei Punkte auszudehnen.

Anhang zum ersten Kapitel.

Da es für manche Fälle zweckmässig sein kann, ein schiefwinkliges Koordinatensystem zu benutzen, so wollen wir die in den §§ 4 und 5 gelösten Aufgaben noch einmal ganz allgemein und auch nach einer etwas anderen Methode behandeln. Im voraus möge hierbei an ein paar auf die rechtwinkligen Projektionen von Geraden bezügliche Sätze erinnert werden. Erstens ist bekannt, dass die rechtwinklige Projektion einer begrenzten Strecke s auf eine Gerade g durch das Produkt $s.\cos(sg)$ dargestellt wird, worin (sg) den Winkel zwischen den Geraden s und g bezeichnet. Dabei ist es gleichgiltig, ob sich die Geraden s und g schneiden oder nicht; nur hat man im letzteren Falle unter (sg) den Winkel zu verstehen, den zwei durch irgend einen Punkt gehende Parallelen zu jenen Geraden miteinander bilden würden.* Zweitens weiss

* Wenn die beiden Geraden sich schneiden, so ist der obige Satz in den Elementen der Trigonometrie unmittelbar enthalten; schneiden

man, dass die rechtwinklige Projektion einer gebrochenen Linie $ABCDEF$ auf eine Gerade GH einerlei mit der Projektion der Geraden AF ist, wobei die Winkel (AB, GH), (BC, GH), (CD, GH) u. s. w. immer nach einer und derselben, aus der Bezeichnung von selbst ersichtlichen Drehungsrichtung gezählt werden.

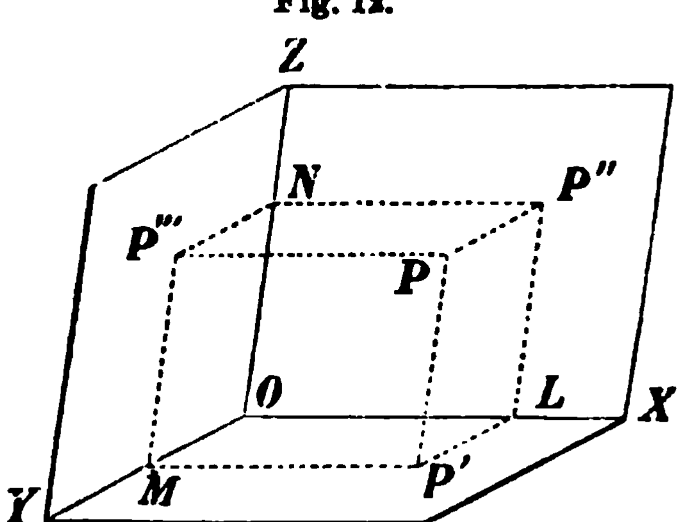


Fig. 12.

I. Ein Punkt im Raume.

Projizieren wir die aus $OL = x$, $LP' = y$, $P'P = z$ bestehende gebrochene Linie $OLP'P$ rechtwinklig auf irgend eine Gerade g im Raume, so setzt sich die Projektion aus den drei Stücken $x \cos(xg)$, $y \cos(yg)$, $z \cos(zg)$ zusammen; die nämliche Projektion muss aber auch zum Vorschein kommen, wenn die Strecke $OP = r$ auf dieselbe Gerade projiziert wird; es gilt daher die Fundamentalgleichung

$$r \cos(rg) = x \cos(xg) + y \cos(yg) + z \cos(zg).$$

Für die willkürliche Gerade g nehmen wir der Reihe nach OP, OX, OY, OZ und erhalten so die vier Beziehungen

$$1) \qquad r = x \cos(xr) + y \cos(yr) + z \cos(zr),$$

$$2) \qquad \begin{cases} r \cos(xr) = x + y \cos(yx) + z \cos(zx), \\ r \cos(yr) = x \cos(xy) + y + z \cos(zy), \\ r \cos(zr) = x \cos(xz) + y \cos(yz) + z, \end{cases}$$

---

sie sich nicht, so erkennt man seine Richtigkeit auf folgende Weise. Die gegebene Strecke sei $AB = s$ und $GH = g$ die Gerade, auf welche sie projiziert werden soll; die Projektion $A'B'$ kommt dadurch zu stande, dass man durch A normal zu GH eine Ebene legt, welche GH in A' schneidet, und auf gleiche Weise durch B eine zu GH normale Ebene, welche GH in B' schneidet. Zieht man durch A parallel zu GH eine Gerade, welche der zweiten Normalebene in C begegnet, so ist $AC = A'B'$, weil beide Gerade als die Entfernung der zwei auf GH senkrechten Ebenen gelten können; ferner ist AC senkrecht zur Ebene $BB'C$, mithin $\angle ACB = 90°$. Hieraus folgt

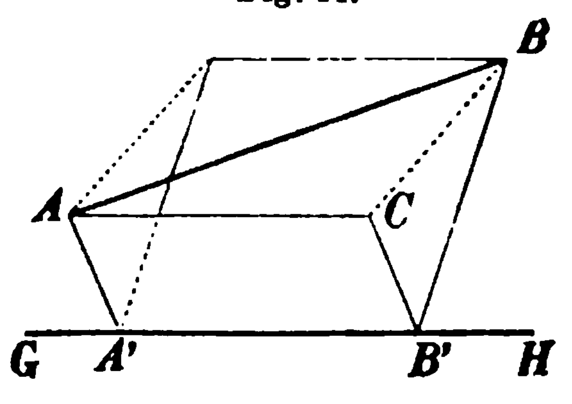


Fig. 11.

$$A'B' = AC = AB \,.\, \cos BAC = s \cos(sg),$$

wie oben behauptet wurde.

in denen ausser den bekannten Koordinatenwinkeln die vier Unbekannten r, $\angle(xr)$, $\angle(yr)$, $\angle(zr)$ vorkommen. Die erste derselben findet sich dadurch, dass man die obigen vier Gleichungen der Reihe nach mit r, x, y, z multipliziert und die Produkte addiert; dabei heben sich die mit (xr), (yr), (zr) behafteten Glieder und es bleibt

$$3)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ + 2\,yz\cos(yz) + 2\,zx\cos(zx) + 2\,xy\cos(xy);$$

daraus ergiebt sich r selbst durch Ausziehung der Quadratwurzel, die hier im absoluten Sinne zu nehmen ist. Die Gleichungen 2) liefern nun die gesuchten Winkel, nämlich

$$4)\quad \begin{cases} \cos(xr) = \dfrac{x + y\cos(yx) + z\cos(zx)}{r}, \\[2ex] \cos(yr) = \dfrac{y + z\cos(zy) + x\cos(xy)}{r}, \\[2ex] \cos(zr) = \dfrac{z + x\cos(xz) + y\cos(yz)}{r}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 2) können auch umgekehrt dazu dienen, um die Koordinaten x, y, z durch den Radiusvektor r und dessen Richtungswinkel auszudrücken; es sind dann x, y, z als Unbekannte anzusehen. Mit Benutzung der abkürzenden Zeichen

$$5)\quad \begin{cases} \cos(yz) = \alpha, & \cos(zx) = \beta, & \cos(xy) = \gamma, \\ \cos(xr) = \xi, & \cos(yr) = \eta, & \cos(zr) = \zeta, \end{cases}$$

erhält man aus Nr. 2 die drei Ausdrücke*

---

* Die in den Gleichungen 6) und 7) vorkommenden Grössen

$$\alpha - \beta\gamma, \qquad \beta - \gamma\alpha, \qquad \gamma - \alpha\beta, \\ 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

die wir der Reihe nach α', β', γ' und δ^2 nennen wollen, lassen sich mittels einiger Formeln der sphärischen Trigonometrie anderweit umwandeln. Betrachten wir nämlich die Koordinatenwinkel (yz), (zx), (xy) als Seitenwinkel a, b, c der von den Koordinatenebenen gebildeten körperlichen Ecke, und bezeichnen wir die gegenüber an den Kanten OX, OY, OZ liegenden Neigungswinkel mit A, B, C, so ist $\alpha' = \cos a - \cos b\cos c$ und zufolge der Grundformel der sphärischen Trigonometrie

$$\alpha' = \cos A\sin b\sin c, \qquad \beta' = \cos B\sin c\sin a, \qquad \gamma' = \cos C\sin a\sin b.$$

Aus der bekannten Formel

$$\sin^2 A = \frac{1 + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

folgt weiter durch Vergleich mit dem Obigen

$$6)\quad\begin{cases} x = \dfrac{(1-\alpha^2)\,\xi - (\gamma - \alpha\beta)\,\eta - (\beta - \gamma\alpha)\,\zeta}{1 + 2\,\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \\ y = \dfrac{(1-\beta^2)\,\eta - (\alpha - \beta\gamma)\,\zeta - (\gamma - \alpha\beta)\,\xi}{1 + 2\,\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r, \\ z = \dfrac{(1-\gamma^2)\,\zeta - (\beta - \gamma\alpha)\,\xi - (\alpha - \beta\gamma)\,\eta}{1 + 2\,\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}\, r. \end{cases}$$

Substituiert man diese Werte in Nr. 1), so findet man nach Hebung von r und Wegschaffung des Bruches

$$7)\quad\begin{cases} (1-\alpha^2)\,\xi^2 + (1-\beta^2)\,\eta^2 + (1-\gamma^2)\,\zeta^2 \\ -2\,(\alpha - \beta\gamma)\,\eta\zeta - 2\,(\beta - \gamma\alpha)\,\zeta\xi - 2\,(\gamma - \alpha\beta)\,\xi\eta \\ = 1 + 2\,\alpha\beta\gamma - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2). \end{cases}$$

Bei dem rechtwinkligen Koordinatensysteme ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$; die Formeln 4) gehen dann über in die Formeln 3) des § 4, und aus der Relation 7) wird die einfachere Nr. 4 im § 4.

II. Zwei Punkte im Raume.

Wenn zwei Punkte P und P_1 durch ihre Koordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 gegeben sind, so denken wir uns durch P drei Gerade parallel zu den Koordinatenachsen gelegt, und betrachten diese Parallelen als die Achsen eines neuen Koordinatensystemes mit dem Anfangspunkte P. Nennen wir x', y', z' die Koordinaten von P_1 in Beziehung auf dieses sekundäre System, so ist

$$x' = x_1 - x, \quad y' = y_1 - y, \quad z' = z_1 - z;$$

ferner kann s als Radiusvektor des Punktes P_1 rücksichtlich des neuen Systemes angesehen werden, mithin gelten jetzt alle Formeln

---

$$\delta^2 = \sin^2 A \sin^2 b \sin^2 c$$

oder bei Ausziehung der Wurzel, welche wir im absoluten Sinne nehmen,

$$\delta = \sin A \sin b \sin c = \sin B \sin c \sin a = \sin C \sin a \sin b.$$

Zwischen den Grössen α', β', γ', δ besteht demnach die Proportion

$$\alpha' : \beta' : \gamma' : \delta = \cot A : \cot B : \cot C : 1.$$

Denken wir uns ferner von O aus auf den Achsen OX, OY, OZ drei Strecken abgeschnitten, von denen jede der Längeneinheit gleich ist, und konstruieren ein Parallelepiped, dessen Kanten jene Abschnitte sind, so besitzt die in der xy-Ebene liegende Basis desselben den Flächeninhalt $\sin c$, die Höhe des Parallelepipeds ist $\sin b \sin A$, mithin sein Volumen $= \sin c \sin b \sin A$. Man erkennt hieraus die geometrische Bedeutung des später oft wiederkehrenden Ausdrucks

$$\delta = \sqrt{1 + 2\,\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}.$$

* by spherical trigonometry

des vorigen Abschnittes wieder, wenn s für r, und x', y', z' für x, y, z gesetzt werden. Durch nachherige Substitution der Werte von x', y', z' gelangt man auf diese Weise zu den folgenden Formeln, in denen wieder α, β, γ zur Abkürzung für $\cos(yz)$, $\cos(zx)$ und $\cos(xy)$ gebraucht worden sind:

$$1)\quad s^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 + 2(y_1 - y)(z_1 - z)\alpha + 2(z_1 - z)(x_1 - x)\beta + 2(x_1 - x)(y_1 - y)\gamma,$$

$$2)\quad \begin{cases} \cos(xs) = \dfrac{x_1 - x + (y_1 - y)\gamma + (z_1 - z)\beta}{s}, \\ \cos(ys) = \dfrac{y_1 - y + (z_1 - z)\alpha + (x_1 - x)\gamma}{s}, \\ \cos(zs) = \dfrac{z_1 - z + (x_1 - x)\beta + (y_1 - y)\alpha}{s}. \end{cases}$$

Um zweitens $\angle POP_1 = \angle(rr_1)$ zu bestimmen, projizieren wir r rechtwinklig auf r_1 und bemerken, dass die nämliche Projektion zum Vorschein kommt, wenn statt $r = OP$ die gebrochene Linie $OLP'P$ auf r_1 projiziert wird; dies giebt

$$r\cos(rr_1) = x\cos(xr_1) + y\cos(yr_1) + z\cos(zr_1);$$

hier sind noch die Werte von $\cos(xr_1)$, $\cos(yr_1)$, $\cos(zr_1)$ einzusetzen, welche man aus den Formeln des vorigen Abschnittes unmittelbar erhält, indem man r_1 für r schreibt. Nach Division mit r findet sich auf diese Weise

$$3)\quad \cos(rr_1) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 + \alpha(yz_1 + y_1z) + \beta(zx_1 + z_1x) + \gamma(xy_1 + x_1y)}{rr_1},$$

worin man, wenn es nötig ist, die Werte

$$4)\quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy} \\ r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2\alpha y_1z_1 + 2\beta z_1x_1 + 2\gamma x_1y_1} \end{cases}$$

substituieren kann. Will man $\cos(rr_1)$ nicht durch die Koordinaten von P und P_1, sondern durch die Winkel darstellen, welche einerseits r, andererseits r_1 mit den Koordinatenachsen einschliessen, so setze man wieder

$$\cos(xr) = \xi, \quad \cos(yr) = \eta, \quad \cos(zr) = \zeta,$$
$$\cos(xr_1) = \xi_1, \quad \cos(yr_1) = \eta_1, \quad \cos(zr_1) = \zeta_1,$$

und drücke x, y, z durch ξ, η, ζ aus, ebenso x_1, y_1, z_1 durch ξ_1, η_1, ζ_1, wie dies die Formeln 6) des vorigen Abschnittes lehren. Bezeichnet man für den Augenblick die Grössen

$$\alpha - \beta\gamma, \qquad \beta - \gamma\alpha, \qquad \gamma - \alpha\beta$$

der Reihe nach mit α', β', γ', ferner

$$1 - \alpha^2, \qquad 1 - \beta^2, \qquad 1 - \gamma^2$$

mit α'', β'', γ'', und den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit μ, so hat man für x, y, z, x_1, y_1, z_1 die Werte:

$$x = \frac{\alpha''\xi - \gamma'\eta - \beta'\zeta}{\mu}\, r, \qquad x_1 = \frac{\alpha''\xi_1 - \gamma'\eta_1 - \beta'\zeta_1}{\mu}\, r_1,$$

$$y = \frac{\beta''\eta - \alpha'\zeta - \gamma'\xi}{\mu}\, r, \qquad y_1 = \frac{\beta''\eta_1 - \alpha'\zeta_1 - \gamma'\xi_1}{\mu}\, r_1,$$

$$z = \frac{\gamma''\zeta - \beta'\xi - \alpha'\eta}{\mu}\, r, \qquad z_1 = \frac{\gamma''\zeta_1 - \beta'\xi_1 - \alpha'\eta_1}{\mu}\, r_1,$$

und diese sind in die Gleichung 3) einzusetzen. Auf gewöhnlichem Wege ausgeführt, würde diese Substitution einen äusserst weitläufigen gebrochenen Ausdruck liefern, dessen Zähler aus nicht weniger als 81 Gliedern bestünde, und man würde einige Mühe haben, die Formel in ihre einfachste Gestalt zu bringen; dagegen gelangt man durch folgende Bemerkung leicht zum Ziele. Wenn man sich die sämtlichen in der Gleichung 3) vorkommenden Produkte xx_1, yy_1 u. s. w. nach Substitution der obigen Werte entwickelt denkt, so erhält man nach Hebung von rr_1 einen Ausdruck von der Form

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu^2}\,[A\xi\xi_1 + B\eta\eta_1 + C\zeta\zeta_1$$
$$+ A'\eta\zeta_1 + A''\eta_1\zeta + B'\zeta\xi_1 + B''\zeta_1\xi + C'\xi\eta_1 + C''\xi_1\eta],$$

worin die Koeffizienten A, B, ... C'' nur von den Koordinatenwinkeln abhängig sind und sich bei wirklicher Ausrechnung von selbst finden würden. Die linke Seite dieser Gleichung bleibt dieselbe, wenn r und r_1 gegeneinander vertauscht werden $[\angle(rr_1) = \angle(r_1 r)]$, es muss folglich die rechte Seite die nämliche Eigenschaft besitzen, also ungeändert bleiben, wenn ξ mit ξ_1 und gleichzeitig η mit η_1, sowie ζ mit ζ_1 vertauscht wird. Man erkennt hieraus, dass der Koeffizient von $\xi\eta_1$ derselbe sein muss, wie der von $\xi_1\eta$, d. h. $C' = C''$, und dass ebenso $B' = B''$, $A' = A''$ ist; die Formel lautet hiernach

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu^2}[A\xi\xi_1 + B\eta\eta_1 + C\zeta\zeta_1$$
$$+ A'(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) + B'(\zeta\xi_1 + \zeta_1\xi) + C'(\xi\eta_1 + \xi_1\eta)].$$

Da die Koeffizienten $A, B, \ldots C'$ von der individuellen Lage der Vektoren r und r_1 unabhängig sind, so kann irgend eine spezielle Richtung der letzteren zur Bestimmung von $A, B, \ldots C'$ dienen: so muss z. B. in dem Falle, wo $\angle(rr_1) = 0$, also $\xi_1 = \xi$, $\eta_1 = \eta$, $\zeta_1 = \zeta$ wird, diejenige Gleichung zum Vorschein kommen, welche jederzeit zwischen den Grössen ξ, η, ζ besteht (Nr. 7 im vorigen Abschnitte). Nun giebt die obige Formel bei dieser Spezialisierung

$$1 = \frac{1}{\mu^2}[A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2A'\eta\zeta + 2B'\zeta\xi + 2C'\xi\eta]$$

und wenn man diese mit der erwähtnen Beziehung, nämlich

$$1 = \frac{1}{\mu}[\alpha''\xi^2 + \beta''\eta^2 + \gamma''\zeta^2 - 2\alpha'\eta\zeta - 2\beta'\zeta\xi - 2\gamma'\xi\eta]$$

zusammenhält, so ergeben sich die Werte

$$A = \alpha''\mu, \qquad B = \beta''\mu, \qquad C = \gamma''\mu,$$
$$A' = -\alpha'\mu, \qquad B' = -\beta'\mu, \qquad C' = -\gamma'\mu;$$

die gesuchte Formel lautet demnach

$$\cos(rr_1) = \frac{1}{\mu}[\alpha''\xi\xi_1 + \beta''\eta\eta_1 + \gamma''\zeta\zeta_1$$
$$- \alpha'(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - \beta'(\zeta\xi_1 + \zeta_1\xi) - \gamma'(\xi\eta_1 + \zeta_1\eta)]$$

oder auch vermöge der Bedeutungen von α', β', γ', α'', β'', γ'' und μ:

$$5) \quad \begin{cases} (1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2)\cos(rr_1) \\ = (1 - \alpha^2)\xi\xi_1 + (1 - \beta^2)\eta\eta_1 + (1 - \gamma^2)\zeta\zeta_1 \\ - (\alpha - \beta\gamma)(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - (\beta - \gamma\alpha)(\zeta\xi_1 + \zeta_1\xi) \\ - (\gamma - \alpha\beta)(\xi\eta_1 + \xi_1\eta). \end{cases}$$

Im speziellen Falle eines rechtwinkligen Koordinatensystemes ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$, und dann gehen die vorigen Formeln in die einfacheren des § 5 über.

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie im Raume.

§ 6.

Die Gleichungen der Geraden.

Wenn ein Punkt P, dessen rechtwinklige Projektionen auf die Koordinatenebenen durch die Koordinaten x und y, x und z, y und z bestimmt sind, seine Lage im Raume ändert, so bewegen sich auch seine Projektionen, und wenn P die gerade oder krumme Linie s durchläuft, so beschreiben die Projektionen P', P'', P''' gerade oder krumme Linien, welche wir der Reihe nach mit s', s'', s''' bezeichnen und die Projektionen der Linie s nennen. Erinnert man sich nun, dass bereits durch zwei Projektionen eines Punktes die drei Koordinaten desselben gegeben sind und damit zugleich die übrige dritte Projektion bestimmt ist, so übersieht man leicht, dass aus zweien der Projektionen s', s'', s''' die dritte abgeleitet werden kann, dass mithin die räumliche Kurve s durch irgend zwei ihrer Projektionen bestimmt wird. Sind z. B. die Projektionen s' und s'' gegeben, so lege man durch einen beliebigen Punkt L der x-Achse eine Ebene parallel der yz-Ebene; die genannte Hilfsebene schneidet die Linie s' in einem Punkte P', ebenso s'' in einem Punkte P''; diese Punkte sind die Projektionen des Punktes P im Raume, welchen man dadurch erhält, dass man in

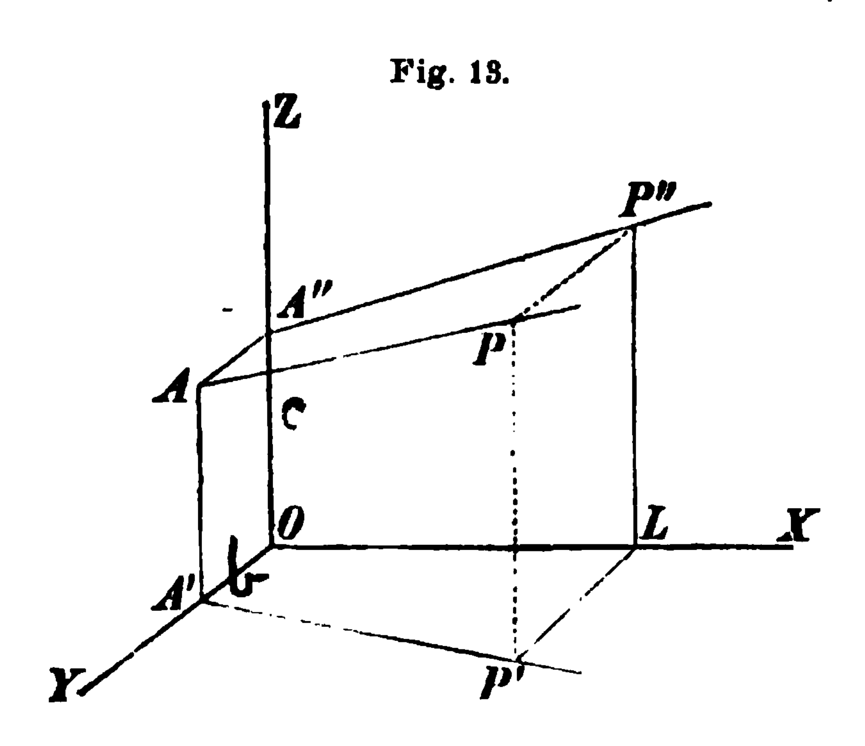


Fig. 13.

der Hilfsebene das Rechteck $LP'PP''$ aus den bekannten Seiten $LP' = y$ und $LP'' = z$ konstruiert. Giebt man nun der willkürlichen Entfernung $OL = x$ alle möglichen Werte, so erhält man auf diese Weise alle möglichen Punkte der Linie s. Ganz ähnlich ist das Verfahren, wenn zwei andere Projektionen von s als gegeben angesehen werden. Diese geometrische Betrachtung, die mit der deskriptiv-geometrischen Auffassung völlig übereinstimmt, ist leicht analytisch auszudrücken, indem man beachtet, dass die ebene Linie s' durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten $OL = x$ und $LP' = y$ irgend eines ihrer Punkte P', ebenso die Linie s'' durch eine Gleichung zwischen den Koordinaten $OL = x$ und $LP'' = z$ charakterisiert wird; eine Linie im Raume ist demnach bestimmt durch zwei Gleichungen zwischen je zwei Koordinaten eines beliebigen Punktes von ihr, und zwar bedeutet eine Gleichung zwischen x und y die Gleichung ihrer Projektion auf die xy-Ebene, eine Gleichung zwischen x und z die Gleichung ihrer Projektion auf die xz-Ebene, endlich eine Gleichung zwischen y und z die Gleichung ihrer Projektion auf die yz-Ebene. Eliminiert man x aus den beiden ersten Gleichungen, so muss man die letzte erhalten, ebenso könnte man aus den Gleichungen zweier anderen Projektionen die Gleichung der noch übrigen Projektion ableiten.

Um diese allgemeinen Erörterungen auf die Gerade im Raume anzuwenden, bedarf es nur der Bemerkung, dass in diesem Falle sämtliche Projektionen gerade Linien sind; denkt man sich demnach die Gerade durch ihre Projektionen auf die xy- und xz-Ebene bestimmt, wie es künftig in Übereinstimmung der deskriptiven Geometrie meistenteils geschehen wird, so sind die Gleichungen ihrer Projektionen oder, wie man kurz zu sagen pflegt, die Gleichungen der Geraden:

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c.$$

Aus der analytischen Geometrie der Ebene kennt man die Bedeutung der vier Konstanten B, b, C, c; bezeichnet man nämlich durch α' den Winkel, welchen die Horizontalprojektion $A'P'$ mit der x-Achse bildet, und analog durch α'' den Winkel zwischen der Vertikalprojektion $A''P''$ und der x-Achse, so hat man

$$2) \qquad B = \tan\alpha', \qquad C = \tan\alpha''.$$

Ferner sind b und c die Abschnitte OA' und OA'', welche die Projektionen s' und s'' auf den Achsen der y und der z bilden, oder

auch die Koordinaten des Punktes A, in welchem die Gerade die yz-Ebene schneidet. Nennen wir in Übereinstimmung mit der deskriptiven Geometrie die Durchschnitte einer Geraden mit den Projektionsebenen die Spuren der Geraden, so können wir b und c kurz als die Koordinaten der yz-Spur unserer Geraden bezeichnen. Nicht überflüssig ist hierbei die Bemerkung, dass die Koeffizienten B und C die Richtungen der Projektionen, mithin auch die Richtung der Geraden im Raume bestimmen, während b und c den Punkt der yz-Ebene angeben, durch welchen die Gerade geht. Lässt man demnach B und C ungeändert, giebt aber b und c andere und andere Werte, so erhält man die Gleichungen eines Systemes paralleler Geraden; nimmt man umgekehrt b und c konstant, dagegen für B und C der Reihe nach verschiedene Werte, so hat man die Gleichungen von Geraden, welche zusammen einen Strahlenbüschel ausmachen, dessen Mittelpunkt in der yz-Ebene liegt.

Ganz ähnlich gestaltet sich die Sache, wenn die Gerade durch zwei andere Projektionen bestimmt wird; wählt man hierzu die Projektionen auf die yx- und yz-Ebenen, so sind die Gleichungen

3) $$x = A_1 y + a_1, \qquad z = C_1 y + c_1,$$

wo a_1 und c_1 die Koordinaten der xz-Spur bedeuten; endlich hat man zur Bestimmung der Geraden durch ihre Projektionen auf die Ebenen zx und zy

4) $$x = A_2 z + a_2, \qquad y = B_2 z + b_2,$$

wo a_2 und b_2 die Koordinaten der xy-Spur sind.

Wie sich nach dem eingangs Gesagten von selbst versteht, können aus einem der Gleichungssysteme 1), 3) und 4) die beiden anderen hergeleitet werden. Gehen wir von den Gleichungen 1) aus, weil sie der deskriptiv-geometrischen Anschauungsweise am nächsten liegen, so können wir zunächst x durch y ausdrücken und den gefundenen Wert in die für z geltende Gleichung substituieren; wir haben so

$$x = \frac{1}{B} y - \frac{b}{B}, \qquad z = \frac{C}{B} y + c - \frac{bC}{B};$$

aus der Vergleichung mit Nr. 3) erhalten wir für die Koeffizienten A_1, C_1 die Werte

$$A_1 = \frac{1}{B}, \qquad C_1 = \frac{C}{B},$$

und für die Koordinaten der xz-Spur:

5) $$a_1 = -\frac{b}{B}, \quad c_1 = c - \frac{bC}{B} = \frac{cB - bC}{B}.$$

Auf analoge Weise bilden wir aus den Gleichungen 1) die folgenden

$$x = \frac{1}{C}z - \frac{c}{C}, \quad y = \frac{B}{C}z + b - \frac{cB}{C}$$

und erhalten durch Vergleichung mit Nr. 4)

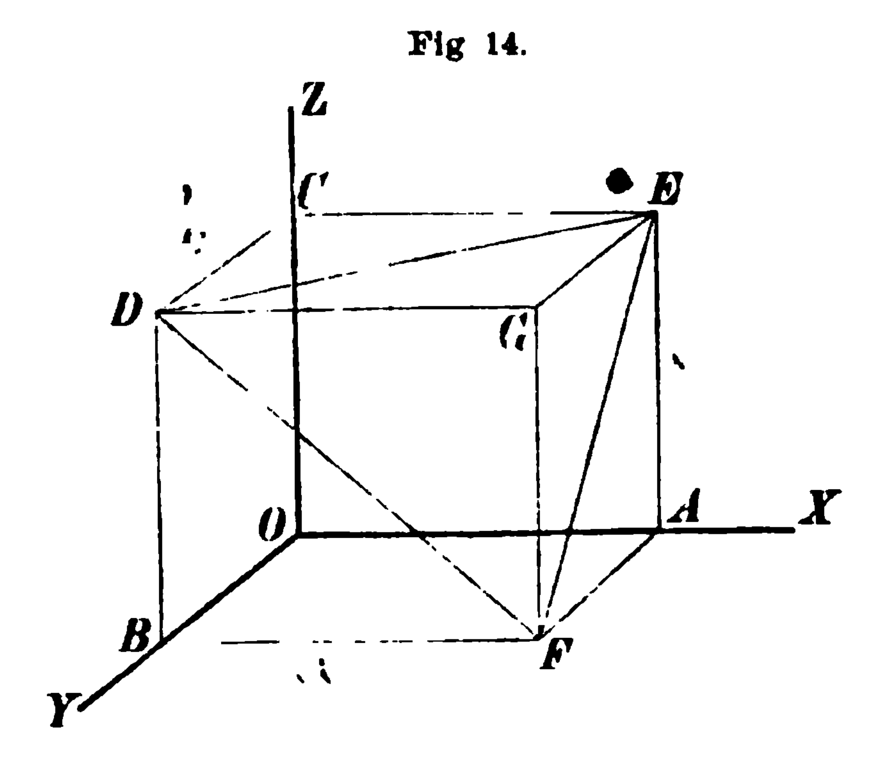
$$A_2 = \frac{1}{C}, \quad B_2 = \frac{B}{C},$$

sowie für die Koordinaten der xy-Spur:

6) $$a_2 = -\frac{c}{C}, \quad b_2 = b - \frac{cB}{C} = \frac{bC - cB}{C}.$$

Die vorigen allgemeinen Formeln erleiden in dem Falle eine Modifikation, wo die Gerade einer oder zweien der Koordinatenebenen parallel liegt. Ist sie parallel zur xy-Ebene, wie z. B. die Gerade DE, so sind ihre Projektionen auf die Ebenen xz und yz parallel zu den Achsen der x, resp. y, und es gelten dann die Beziehungen

Fig 14.



$$y = Bx + b, \quad z = c,$$

wo $OB = CD = b$ und $OC = AE = c$. Symmetrischer gestaltet sich die erste Gleichung, wenn man den Abschnitt $CE = OA$ in Rechnung bringt; für $OA = a$ hat man nämlich

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad z = c$$

als Gleichungen jener Geraden. Der Punkt ac ist die xz-Spur und der Punkt bc die yz-Spur der Geraden, die xy-Spur fällt ins Unendliche; eben deswegen würden sich in diesem Falle die Gleichungen der Geraden nicht unter der Form von Nr. 4) darstellen lassen. Für eine der xz-Ebene parallele Gerade, wie z. B. DF, hat man in entsprechender Weise die Gleichungen

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \quad y = b,$$

wo ab die xy-Spur und bc die yz-Spur ist. Eine der yz-Ebene parallele Gerade, wie z. B. EF, wird dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = a,$$

ihre xy- und xz-Spuren sind die Punkte ab und ac.

Ist die Gerade zweien der Koordinatenebenen zugleich, d. h. einer der Koordinatenachsen parallel, so vereinfachen sich die obigen Gleichungen noch weiter. So hat man für die Gerade $DG \parallel OX$

$$y = b, \quad z = c, \quad (x \text{ beliebig})$$

und der Punkt bc ist die einzige in diesem Falle vorhandene Spur; eine Parallele zur y-Achse (z. B. EF) wird in gleicher Weise durch

$$x = a, \quad z = c$$

charakterisiert, eine Parallele zur z-Achse (FG) durch

$$x = a, \quad y = b.$$

Daran schliesst sich die Bemerkung, dass von den drei Gleichungspaaren

$$\begin{aligned} y = 0 &\text{ und } z = 0, \\ x = 0 &\;\;\text{„}\;\; z = 0, \\ x = 0 &\;\;\text{„}\;\; y = 0 \end{aligned}$$

das erste die x-Achse, das zweite die y-Achse und das dritte die z-Achse bezeichnet.

Die bisher entwickelten Formeln geben die Winkel, welche die Projektionen der Geraden mit den Achsen einschliessen, nicht aber die Winkel, welche die Gerade selbst mit den Achsen bildet. Um letztere Winkel zu finden, denken wir uns durch den Anfangspunkt der Koordinaten eine Parallele zu der gegebenen Geraden gelegt und auf dieser vom Anfangspunkte der Koordinaten aus eine beliebige Strecke r abgeschnitten, deren Endpunkt die Koordinaten x, y, z besitzen möge. Nennen wir der Reihe nach α, β, γ die Winkel, welche die Gerade AP mit den Koordinatenachsen bildet, und φ, ψ, χ die Richtungswinkel des Radiusvektor r, so haben wir wegen $AP \parallel r$

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \psi, \quad \gamma = \chi$$

und nach den Formeln 3) in § 4

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Hier ist noch die Bedingung hinzuzufügen, dass die Strecke r parallel zu AP durch den Koordinatenanfang geht. Nun sind überhaupt die Gleichungen irgend einer durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehenden Geraden:

$$y = B_1 x, \quad z = C_1 x,$$

und wenn diese Gerade parallel zur ursprünglichen Geraden liegen soll, so müssen, wie schon erwähnt, die gleichnamigen Projektionen parallel sein, also die Bedingungen

$$B_1 = B, \quad C_1 = C$$

stattfinden. Die Gleichungen der Geraden r sind folglich

$$y = Bx, \quad z = Cx.$$

Nach Substitution dieser Werte gehen die vorhin aufgestellten Formeln in die folgenden über:

$$7)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+B^2+C^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{1+B^2+C^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{1+B^2+C^2}}. \end{cases}$$

Dividiert man sowohl die zweite als die dritte dieser Gleichungen durch die erste, so erhält man die beiden Formeln

$$8)\quad B = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad C = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}$$

oder zufolge von Nr. 1)

$$\tan\alpha' = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}, \qquad \tan\alpha'' = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

Diese Relationen kann man auch mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie finden und aus ihnen, in Verbindung mit der Formel

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

rückwärts die Gleichungen 7) herleiten.

Infolge der Formeln 8) lassen sich die Gleichungen 1) folgendermassen schreiben:

$$9)\qquad y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,x + b, \qquad z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\,x + c,$$

und zwar sind dies die Gleichungen derjenigen Geraden, welche in der Richtung $\alpha\beta\gamma$ durch den Punkt bc der yz-Ebene geht. Bezeichnet fgh irgend einen von xyz verschiedenen Punkt derselben Geraden, so gelten auch für ihn die Gleichungen 9), nämlich

$$g = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,f + b, \qquad h = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}\,f + c.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen von den vorigen fallen b und c weg und es bleibt

$$10)\qquad y - g = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - f), \qquad z - h = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x - f);$$

dies sind die Gleichungen derjenigen Geraden, welche in der Richtung $\alpha\beta\gamma$ durch den Punkt fgh geht.

Hiernach lässt sich die Bedeutung der symmetrisch gebauten Gleichungen

$$11)\qquad \frac{x - f}{L} = \frac{y - g}{M} = \frac{z - h}{N}$$

leicht ermessen. Bringt man sie nämlich auf die Form

$$y - g = \frac{M}{L}(x - f), \qquad z - h = \frac{N}{L}(x - f),$$

so erkennt man augenblicklich, dass jene Gleichungen eine Gerade bedeuten, welche durch den Punkt fgh geht, und deren Richtung mittels der Bedingungen

$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{M}{L}, \qquad \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{N}{L}$$

oder kürzer durch die Proportion

$$12)\qquad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = L : M : N$$

bestimmt wird. Die Werte von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ selber erhält man aus den Formeln 7), indem man $B = \frac{M}{L}$ und $C = \frac{N}{L}$ substituiert; sie sind:

$$13)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 11) empfehlen sich in vielen Fällen nicht nur durch ihre symmetrische Form, sondern auch dadurch, dass sie der unmittelbarsten Bestimmung einer Geraden — nämlich der Bestimmung durch einen Punkt und die Richtung — direkt entsprechen.

§ 7.

Verschiedene Bestimmungsweisen einer Geraden.

I. Parallele zu einer gegebenen Geraden. Wenn durch einen gegebenen Punkt fgh eine Parallele zu einer gegebenen, mittels der Gleichungen

1) $$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

bestimmten Geraden gelegt werden soll, so bezeichne man die Gleichungen der gesuchten Geraden vorläufig durch

2) $$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

und bestimme die vier Unbekannten B_1, b_1, C_1, c_1 aus den geforderten Bedingungen. Einerseits hat man, weil die Gerade durch den gegebenen Punkt gehen soll,

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

andererseits wegen der parallelen Lage beider Geraden

$$B_1 = B \quad \text{und} \quad C_1 = C.$$

Entwickelt man aus diesen vier Gleichungen die Werte der vier Unbekannten, so folgt durch deren Substitution in Nr. 1)

2) $$y = Bx + g - Bf, \qquad z = Cx + h - Cf,$$

oder in symmetrischerer Form:

3) $$y - g = B(x - f), \qquad z - h = C(x - f).$$

Drückt man B und C durch die Winkel aus, welche die gegebene Gerade mit den Koordinatenachsen einschliessen, so kommt man auf die Gleichungen 10) des vorigen Paragraphen zurück.

II. Gerade durch zwei Punkte. Bezeichnen wir mit

4) $$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden, welche durch die gegebenen Punkte $f_1 g_1 h_1$ und $f_2 g_2 h_2$ geht, so sind die vier Unbekannten B, b, C, c mittels der folgenden vier Gleichungen zu bestimmen:

$$g_1 = Bf_1 + b, \qquad h_1 = Cf_1 + c,$$
$$g_2 = Bf_2 + b, \qquad h_2 = Cf_2 + c,$$

welche die analytischen Ausdrücke der angegebenen Bedingungen sind. Man findet ohne Mühe

$$B = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}, \qquad b = \frac{f_2 g_1 - f_1 g_2}{f_2 - f_1},$$

$$C = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1}, \qquad c = \frac{f_2 h_1 - f_1 h_2}{f_2 - f_1},$$

und folglich sind die Gleichungen der gesuchten Geraden:

$$5) \quad y = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1} x + \frac{f_2 g_1 - f_1 g_2}{f_2 - f_1}, \qquad z = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1} x + \frac{f_2 h_1 - f_1 h_2}{f_1 - f_2}.$$

Dieselben enthalten, einzeln betrachtet, den unmittelbar einleuchtenden Satz, dass die Projektionen der gesuchten Geraden durch die gleichnamigen Projektionen der gegebenen Punkte gehen.

Je nach Bedürfnis kann man den Gleichungen 5) noch andere Formen erteilen, z. B.:

$$y - g_1 = \frac{g_2 - g_1}{f_2 - f_1}(x - f_1), \qquad z - h_1 = \frac{h_2 - h_1}{f_2 - f_1}(x - f_1),$$

oder

$$y - g_2 = \frac{g_1 - g_2}{f_1 - f_2}(x - f_2), \qquad z - h_2 = \frac{h_1 - h_2}{f_1 - f_2}(x - f_2)$$

und am elegantesten

$$6) \qquad \frac{y - g_1}{y - g_2} = \frac{x - f_1}{x - f_2}, \qquad \frac{z - h_1}{z - h_2} = \frac{x - f_1}{x - f_2}.$$

Die vorstehenden Gleichungen lehren auch die Relationen kennen, welche zwischen den Koordinaten dreier Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und $f_3 g_3 h_3$ stattfinden müssen, wenn diese in einer geraden Linie liegen sollen. Hierzu ist nämlich erforderlich, dass der dritte Punkt auf der durch die beiden ersten Punkte gehenden Geraden liegt, dass also seine Koordinaten den Gleichungen 6) genügen; die fragliche Bedingung ist demnach in den beiden Gleichungen

$$7) \qquad \frac{g_3 - g_1}{g_3 - g_2} = \frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_2}, \qquad \frac{h_3 - h_1}{h_3 - h_2} = \frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_2}$$

enthalten, welche geometrisch bedeuten, dass im vorliegenden Falle die gleichnamigen Projektionen der drei Punkte in je einer Geraden liegen müssen.

§ 8.

Zwei Gerade.

Wenn zwei Gerade im Raume, deren Gleichungen

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c,$$

$$2) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$

sein mögen, nicht parallel laufen, so können sie entweder sich schneiden oder aneinander vorbeigehen, ohne irgend einen Punkt gemein zu haben. Um diese Fälle analytisch zu sondern, bestimmen wir zunächst die Durchschnitte der gleichnamigen Projektionen beider Geraden. Aus den Gleichungen

$$y = Bx + b \quad \text{und} \quad y = B_1 x + b_1$$

finden wir als Koordinaten x' und y' des Durchschnittes der Projektionen auf die xy-Ebene

$$3) \qquad x' = -\frac{b_1 - b}{B_1 - B}, \quad y' = \frac{bB_1 - b_1 B}{B_1 - B};$$

ebenso folgt aus den Gleichungen

$$z = Cx + c \quad \text{und} \quad z = C_1 x + c_1,$$

dass sich die Projektionen auf die xz-Ebene in einem Punkte schneiden, dessen Koordinaten sind:

$$4) \qquad x'' = -\frac{c_1 - c}{C_1 - C}, \quad z'' = \frac{cC_1 - c_1 C}{C_1 - C}.$$

Wenn nun die beiden Geraden im Raume einen Punkt S als wirklichen Durchschnitt gemein haben, so müssen seine Projektionen S' und S'' mit den Durchschnitten der gleichnamigen Projektionen der Geraden zusammenfallen, d. h. x' und y' müssen die Koordinaten von S', ebenso x'' und z'' die Koordinaten von S'' sein; dies ist aber nur möglich für $x' = x''$, und so ergiebt sich als Bedingung für das Vorhandensein eines Durchschnittes die Gleichung

$$5) \qquad \frac{b_1 - b}{B_1 - B} = \frac{c_1 - c}{C_1 - C} \quad \text{oder} \quad \frac{b_1 - b}{c_1 - c} = \frac{B_1 - B}{C_1 - C}$$

oder auch

$$6) \qquad (b_1 - b)(C_1 - C) = (c_1 - c)(B_1 - B).$$

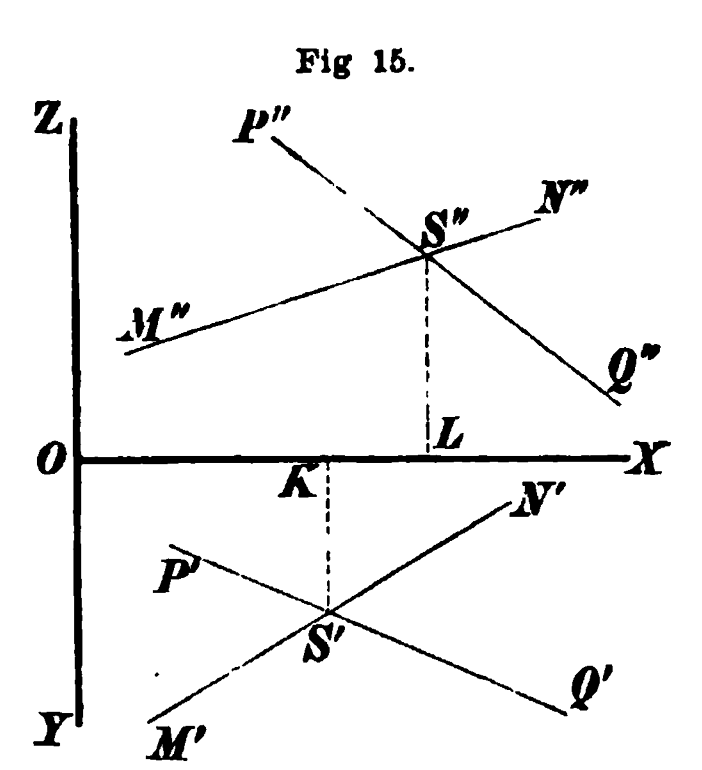
Ist eine dieser drei Gleichungen erfüllt, so hat man für die Koordinaten des Durchschnittes, welche in diesem Falle x', y', z' heissen mögen, die Werte

$$7) \qquad \begin{cases} x' = -\dfrac{b_1 - b}{B_1 - B} = -\dfrac{c_1 - c}{C_1 - C}, \\[2ex] y' = \dfrac{bB_1 - b_1 B}{B_1 - B}, \quad z' = \dfrac{cC_1 - c_1 C}{C_1 - C}. \end{cases}$$

Im entgegengesetzten Falle kann nur von den Durchschnitten der Projektionen die Rede sein und die Formeln in 3) und 4) bestehen

dann ohne weiteren Zusammenhang untereinander. Dieses Resultat stimmt überein mit dem bekannten Satze der deskriptiven Geometrie, dass zwei Gerade MN und PQ sich nur dann schneiden, wenn der Durchschnitt S' ihrer Horizontalprojektionen $M'N'$ und $P'Q'$ in derselben Vertikalen liegt wie der Durchschnitt S'' ihrer Vertikalprojektionen $M''N''$ und $P''Q''$. Man hat nämlich

$$OK = x', \quad KS' = y',$$
$$OL = x'', \quad LS'' = z'',$$



und wenn die Gerade $S'S''$ senkrecht auf OX stehen soll, so muss $OK = OL$, d. h. $x' = x''$ sein.

Bei zwei parallelen Geraden ist $B_1 = B$, $C_1 = C$ und mithin die Gleichung 6) erfüllt; die Formeln 7) geben $x' = \infty$, $y' = \infty$, $z' = \infty$, und sprechen den bekannten Satz aus, dass zwei Parallelen einen unendlich fernen Punkt gemein haben. Um diesen Fall mit dem vorigen in einen Ausdruck zusammenzufassen, sagen wir: zwei Gerade liegen in einer und derselben Ebene oder nicht, je nachdem die Gleichung

$$(b_1 - b)(C_1 - C) = (c_1 - c)(B_1 - B)$$

erfüllt oder nicht erfüllt ist; im ersten Falle haben sie einen Punkt gemein, der ebensowohl in endlicher als in unendlicher Entfernung liegen kann, im zweiten Falle besitzen die Geraden keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Einige Aufmerksamkeit verdient noch der Fall, wenn die eine der gegebenen Geraden parallel zu einer oder zweien der Koordinatenebenen liegt. Ist die bisher durch

$$y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

charakterisierte Gerade, welche kurz s heissen möge, parallel zur xy-Ebene, so hat man in den vorigen Formeln einfach $C = 0$ zu nehmen; ist sie parallel zur xz-Ebene, so wird dagegen $B = 0$. Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn s der yz-Ebene parallel liegt; die Gleichungen von s sind dann

$$x = a, \qquad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

und sie liefern, mit den Gleichungen 2) zusammen auf einen und denselben Punkt $x'y'z'$ angewendet, die Bedingung

$$8) \qquad \frac{B_1 a + b_1}{b} + \frac{C_1 a + c_1}{c} = 1.$$

Liegt die Gerade s parallel zur x-Achse, so ist $B = C = 0$, mithin nach 5)

$$9) \qquad \frac{b - b_1}{B_1} = \frac{c - c_1}{C_1} \quad \text{oder} \quad \frac{b - b_1}{c - c_1} = \frac{B_1}{C_1};$$

See p. 30 line 6 & 11 + pp. 22 & 23

verglichen mit der yz-Projektion von s_1, d. h. mit der Geraden

$$\frac{y - b_1}{B_1} = \frac{z - c_1}{C_1}$$

giebt die obige Bedingung 9) zu erkennen, dass ein Durchschnitt von s und s_1 nur dann existiert, wenn die yz-Projektion von s_1 durch die yz-Spur von s geht. Ist ferner s parallel der y-Achse, so sind die Gleichungen von s

$$x = a, \qquad z = c,$$

mit den Gleichungen 2) zusammen auf einen und denselben Punkt $x'y'z'$ angewendet, liefern sie die Bedingung

$$10) \qquad c = C_1 a + c_1,$$

welche geometrisch bedeutet, dass die xz-Projektion von s_1 durch die xz-Spur von s gehen muss. Wäre endlich s parallel der z-Achse, mithin

$$x = a, \qquad y = b,$$

so würde sich durch ähnliche Schlüsse die Bedingung

$$11) \qquad b = B_1 a + b_1$$

ergeben, welche sagt, dass die xy-Projektion von s_1 durch die gleichnamige Spur von s gehen muss.

Es bleibt nun noch der Winkel zu bestimmen, welchen die Geraden jedenfalls miteinander bilden, sie mögen sich schneiden oder nicht. Zu diesem Zwecke legen wir durch den Anfangspunkt der Koordinaten Parallelen zu den gegebenen Geraden; die Gleichungen dieser Parallelen sind

$$y = Bx, \quad z = Cx; \qquad y = B_1 x, \quad z = C_1 x;$$

wir nennen ferner r die Strecke vom Anfangspunkte der Koordinaten bis zu dem auf der ersten Parallelen liegenden Punkte xyz, ebenso r_1 die Strecke vom Koordinatenanfang bis zu einem auf der zweiten Parallelen willkürlich gewählten Punkte $x_1 y_1 z_1$, dessen Koordinaten den Gleichungen

$$y_1 = B_1 x_1, \qquad z_1 = C_1 x_1$$

genügen müssen, und bestimmen den Winkel (rr_1), welcher der gesuchte Winkel ist. Nach § 5 haben wir

$$\cos(rr_1) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}},$$

und hieraus folgt, wenn wir den Winkel (rr_1) kürzer mit Θ bezeichnen und für y, z, y_1, z_1 die vorhin angegebenen Werte setzen,

$$12) \qquad \cos\Theta = \frac{1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(1 + B^2 + C^2)(1 + B_1^2 + C_1^2)}}.$$

Wegen des doppelten Vorzeichens der Quadratwurzel liefert diese Formel zwei Werte von Θ, die sich zu 180^0 ergänzen; in der That bilden auch zwei Gerade miteinander zwei Winkel, einen spitzen und einen stumpfen.

Soll der Winkel zwischen beiden Geraden ein rechter sein (wobei sie sich ebensowohl rechtwinklig schneiden als kreuzen können), so muss $\cos\Theta = 0$ werden, also der Zähler des obigen Bruches verschwinden. Die Gleichung

$$13) \qquad 1 + BB_1 + CC_1 = 0$$

enthält folglich die Bedingung dafür, dass beide Geraden senkrecht zueinander liegen. Hieran knüpft sich die Aufgabe des nächsten Paragraphen.

§ 9.

Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade.

Die Koordinaten eines gegebenen Punktes mögen f, g, h, und

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

die Gleichungen einer gegebenen Geraden sein. Soll nun durch den Punkt fgh eine Gerade gezogen werden, welche die durch Nr. 1) ausgedrückte Gerade senkrecht schneidet, so hat man die Gleichungen des gesuchten Perpendikels vorläufig in der Form

$$2) \qquad y = Mx + m, \qquad z = Nx + n$$

aufzustellen und die darin vorkommenden Unbekannten M, m, N, n mittels folgender Bedingungen zu bestimmen. Weil erstens die verlangte Gerade durch den Punkt fgh gehen soll, muss gleichzeitig

$$3) \qquad g = Mf + m, \qquad h = Nf + n$$

sein; damit ferner das Perpendikel die gegebene Gerade schneidet ist die Gleichung

$$4) \qquad (m - b)(N - C) = (n - c)(M - B)$$

notwendig; endlich gehört (nach § 8, Nr. 13) zur senkrechten Lage beider Geraden gegeneinander die Gleichung

$$5)\qquad 1 + BM + CN = 0.$$ see 13) p. 33.

Aus den Gleichungen 3) erhalten wir

$$6)\qquad m = g - Mf, \qquad n = h - Nf,$$

und durch Substitution derselben in Nr. 4) wird die letztere Gleichung zu

$$7)\qquad (Cf + c - h)M - (Bf + b - g)N = B(c - h) - C(b - g).$$

Die Gleichungen 5) und 7) bestimmen die beiden Unbekannten M und N; setzt man nämlich zur Abkürzung

$$8)\qquad \begin{cases} F = B(Bf + b - g) + C(Cf + c - h), \\ G = C[B(c - h) - C(b - g)] - (Bf + b - g), \\ H = B[C(b - g) - B(c - h)] - (Cf + c - h), \end{cases}$$

so findet man

$$M = \frac{G}{F}, \qquad N = \frac{H}{F}$$

und nachher aus Nr. 6)

$$m = g - \frac{G}{F}f, \qquad n = h - \frac{H}{F}f.$$

Zufolge dieser Werte der vier Unbekannten sind nun die Gleichungen der gesuchten Senkrechten:

$$9)\qquad y - g = \frac{G}{F}(x - f), \qquad z - h = \frac{H}{F}(x - f),$$

oder in symmetrischerer Form

$$10)\qquad \frac{x - f}{F} = \frac{y - g}{G} = \frac{z - h}{H}.$$

Wir suchen zweitens die Koordinaten x_0, y_0, z_0 desjenigen Punktes zu bestimmen, in welchem die von fgh ausgehende Senkrechte die gegebene Gerade schneidet. Da der verlangte Punkt den beiden vorhandenen Geraden gemeinschaftlich angehört, so gelten für seine Koordinaten die Gleichungen

$$11)\qquad \begin{cases} y_0 = Bx_0 + b, \\ y_0 - g = \frac{G}{F}(x_0 - f), \qquad z_0 - h = \frac{H}{F}(x_0 - f). \end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen folgt durch Elimination von y_0

$$x_0 = -\frac{F(b - g) + Gf}{BF - G} = f - \frac{Bf + b - g}{BF - G}F.$$

Vermöge der in Nr. 8) angegebenen Werte von F und G findet man weiter, dass

$$BF - G = (Bf + b - g)(1 + B^2 + C^2)$$

ist, und hierdurch vereinfacht sich der vorige Wert von x_0. Die zweite und dritte Gleichung in Nr. 11) liefern nachher die Werte von y_0, z_0, und überhaupt sind schliesslich

$$12)\qquad \begin{cases} x_0 = f - \dfrac{F}{1 + B^2 + C^2}, \\ y_0 = g - \dfrac{G}{1 + B^2 + C^2}, \\ z_0 = h - \dfrac{H}{1 + B^2 + C^2} \end{cases}$$

die Koordinaten des Fusspunktes der vom Punkte fgh auf die gegebene Gerade herabgelassenen Senkrechten.

Endlich möge noch die Entfernung p der Punkte fgh und $x_0y_0z_0$ aufgesucht werden. Hierzu dient die Formel

$$p = \sqrt{(x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2 + (z_0 - h)^2},$$

in welche die obigen Werte von x_0, y_0, z_0 einzuführen sind; man hat daher

$$13)\qquad p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + B^2 + C^2}.$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine Vereinfachung. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$B(c - h) - C(b - g) = a',$$

$$Bf + b - g = b', \qquad Cf + c - h = c',$$

so ist nach Nr. 8)

$$F = Bb' + Cc', \qquad G = Ca' - b', \qquad H = -Ba' - c',$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} & F^2 + G^2 + H^2 \\ = {} & b'^2 + c'^2 + B^2a'^2 + B^2b'^2 + C^2a'^2 + C^2c'^2 \\ & + 2(BCb'c' - Ca'b' + Ba'c') \\ = {} & (1 + B^2 + C^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) \\ & - a'^2 - B^2c'^2 - C^2b'^2 + 2(BCb'c' - Ca'b' + Ba'c'). \end{aligned}$$

Substituiert man in den Gliedern der letzten Zeile für a', b', c' ihre oben angegebenen Werte, so findet man, dass sich alles aufhebt und dass nur übrig bleibt

$$F^2 + G^2 + H^2 = (1 + B^2 + C^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2).$$

Demnach wird aus Nr. 13)

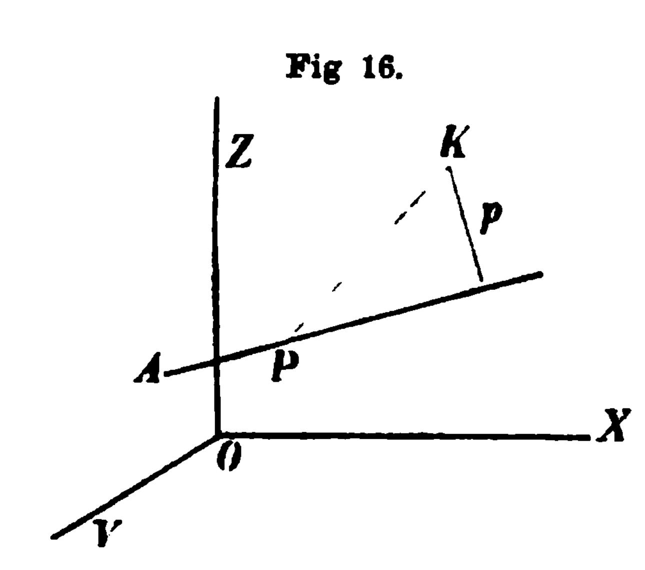
$$p=\sqrt{\left\{\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{1+B^2+C^2}\right\}}$$

oder vermöge der Werte von a', b', c'

$$14)\quad p=\sqrt{\left\{\frac{[B(c-h)-C(b-g)]^2+(Bf+b-g)^2+(Cf+c-h)^2}{1+B^2+C^2}\right\}},$$

und damit ist der Abstand des Punktes fgh von der gegebenen Geraden bestimmt.

Zu der Formel 14) führt noch ein anderer Weg, der von dem früheren unabhängig und dem Verfahren der deskriptiven Geometrie nachgebildet ist. Letztere würde nämlich den gegebenen Punkt fgh (in der Figur K) mit irgend einem Punkte P der gegebenen Geraden verbinden, die durch beide Gerade bestimmte Ebene in die Bildebene umlegen und nachher die gesuchte Senkrechte planimetrisch konstruieren. Dem entspricht folgende Rechnung. Die Koordinaten des willkürlich gewählten Punktes P mögen x, y, z sein, wobei die Gleichungen



$$y=Bx+b, \qquad z=Cx+c$$

stattfinden; die Entfernung KP heisse u, so bestimmen sich zunächst die Winkel λ, μ, ν, welche u mit den Koordinatenachsen bildet, durch die Formeln

$$\cos\lambda=\frac{f-x}{u}, \qquad \cos\mu=\frac{g-y}{u}, \qquad \cos\nu=\frac{h-z}{u}.$$

Sind ferner α, β, γ die Richtungswinkel der Geraden AP und bezeichnet ω den Winkel zwischen dieser Geraden und PK, so hat man

$$\cos\omega=\cos\alpha\cos\lambda+\cos\beta\cos\mu+\cos\gamma\cos\nu$$

oder nach Substitution aller Cosinuswerte

$$\cos\omega=\frac{(f-x)+B(g-y)+C(h-z)}{u\sqrt{1+B^2+C^2}}.$$

Weiter ist

$$p^2=u^2\sin^2\omega=u^2-(u\cos\omega)^2$$
$$=(f-x)^2+(g-y)^2+(h-z)^2-(u\cos\omega)^2$$

und vermöge des obigen Wertes von $\cos\omega$

$$p^2 = (f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2 - \frac{[(f-x) + B(g-y) + C(h-z)]^2}{1 + B^2 + C^2},$$

oder, wenn alles auf gleichen Nenner gebracht wird,

$$p^2 = \frac{[B(f-x) - (g-y)]^2 + [C(f-x) - (h-z)]^2 + [B(h-z) - C(g-y)]^2}{1 + B^2 + C^2}.$$

Durch Substitution der Werte von y und z geht diese Formel in die frühere Nr. 14) über.

Die für p entwickelten Formeln dienen auch zur Bestimmung des **Abstandes zweier parallelen Geraden**, deren Gleichungen

$$15)\quad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = Bx + b_1, & z = Cx + c_1 \end{cases}$$

sein mögen. Setzt man nämlich fest, dass der Punkt fgh auf der zweiten Geraden liegt, dass mithin die Gleichungen

$$g = Bf + b_1, \quad h = Cf + c_1$$

stattfinden, so ist seine Entfernung von der ersten Geraden einerlei mit dem gegenseitigen Abstande beider Parallelen. Zufolge der vorstehenden Werte von g und h erhält man zunächst

$$16)\quad \begin{cases} F = (b - b_1)\,B + (c - c_1)\,C, \\ G = (c - c_1)\,BC - (b - b_1)\,(1 + C^2), \\ H = (b - b_1)\,BC - (c - c_1)\,(1 + B^2), \end{cases}$$

und nachher ist wie in Nr. 13)

$$17)\quad p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2}}{1 + B^2 + C^2}.$$

Anhang zum zweiten Kapitel.

I. Die Gerade, bezogen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem.

Die Entwickelungen des § 6 bleiben für ein schiefwinkliges Koordinatensystem insofern ungestört, als auch hier die Bestimmung der Geraden durch zwei ihrer (schiefwinkligen) Projektionen erfolgt. Denkt man sich wieder die Ebenen xy und xz zu Projektionsebenen genommen, so sind wie früher die Gleichungen der Geraden:

$$1)\quad y = Bx + b, \quad z = Cx + c,$$

wobei b und c die Koordinaten der yz-Spur der Geraden bedeuten. Dagegen ändern sich die Formeln, worin Winkel vorkommen, weil

die Dreiecke, aus denen jene Winkel gefunden werden, nicht mehr rechtwinklige sind.

Bezeichnen wir die gegebene, durch die Gleichungen 1) bestimmte Gerade mit s, ihre Projektionen mit s' und s'', so haben wir nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie der Ebene

$$2) \quad \tan(s'x) = \frac{B \sin(xy)}{1 + B \cos(xy)}, \qquad \tan(s''x) = \frac{C \sin(xz)}{1 + C \cos(xz)},$$

woraus für $\angle(xy) = \angle(xz) = 90^0$ die speziellen Formeln 2) in § 6 hervorgehen.

Um ferner die Winkel zu bestimmen, welche die Gerade s mit den Koordinatenachsen einschliesst, denken wir uns durch den Koordinatenanfang parallel zu s eine Gerade gezogen und auf dieser einen beliebigen Radiusvektor r abgeschnitten, dessen Endpunkt die Koordinaten x, y, z haben möge; die Winkel (sx), (sy), (sz) sind dann identisch mit den Winkeln (rx), (ry), (rz). Wegen $r /\!/ s$ ist nun $r' /\!/ s'$, $r'' /\!/ s''$; die Konstanten B und C sind daher für beide Geraden dieselben, d. h.

$$y = Bx, \qquad z = Cx.$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\cos(xy) = \gamma, \qquad \cos(zx) = \beta, \qquad \cos(yz) = \alpha,$$

so ist nach den Formeln des Anhanges zum ersten Kapitel

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy},$$

$$\cos(rx) = \frac{x + \gamma y + \beta z}{r},$$

$$\cos(ry) = \frac{y + \alpha z + \gamma x}{r},$$

$$\cos(rz) = \frac{z + \beta x + \alpha y}{r};$$

wenn man hier die Werte $y = Bx$, $z = Cx$ substituiert und zur Vereinfachung das Zeichen

$$3) \qquad D = \sqrt{1 + B^2 + C^2 + 2\alpha BC + 2\beta C + 2\gamma B}$$

benutzt, so erhält man

$$4) \qquad \begin{cases} \cos(sx) = \dfrac{1 + \gamma B + \beta C}{D}, \\[2ex] \cos(sy) = \dfrac{B + \alpha C + \gamma}{D}, \\[2ex] \cos(sz) = \dfrac{C + \beta + \alpha B}{D}. \end{cases}$$

p. 16.

II. Der Winkel zwischen zwei Geraden.

Zu jeder von den beiden gegebenen Geraden, welche durch die Gleichungen

$$1)\quad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1 \end{cases}$$

bestimmt sein mögen, denken wir uns durch den Koordinatenanfang eine Parallele gelegt; auf der ersten Parallelen sei ein willkürlicher Radiusvektor r abgeschnitten, dessen Endpunkt xyz heissen möge, ebenso auf der zweiten Parallelen ein Radiusvektor r_1 mit dem Endpunkte $x_1 y_1 z_1$; es ist dann

$$y = Bx, \quad z = Cx; \qquad y_1 = B_1 x_1, \quad z_1 = C_1 x_1.$$

Ferner haben wir nach den im Anhange zum ersten Kapitel entwickelten Formeln

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2\alpha yz + 2\beta zx + 2\gamma xy},$$

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2\alpha y_1 z_1 + 2\beta z_1 x_1 + 2\gamma x_1 y_1},$$

$$\cos(rr_1) = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1 + \alpha(yz_1 + y_1 z) + \beta(zx_1 + z_1 x) + \gamma(xy_1 + x_1 y)}{rr_1}.$$

p. 18.

Hier sind die vorigen Werte von y, z, y_1, z_1 zu substituieren, und wenn man dabei zur Abkürzung

$$2)\quad \begin{cases} D = \sqrt{1 + B^2 + C^2 + 2\alpha BC + 2\beta C + 2\gamma B}, \\ D_1 = \sqrt{1 + B_1^2 + C_1^2 + 2\alpha B_1 C_1 + 2\beta C_1 + 2\gamma B_1} \end{cases}$$

setzt, so ergiebt sich, weil $\angle(rr_1) = \angle(ss_1)$ ist,

$$3)\quad \cos(ss_1) = \frac{1 + BB_1 + CC_1 + \alpha(BC_1 + B_1 C) + \beta(C + C_1) + \gamma(B + B_1)}{DD_1}.$$

Als Bedingung für die gegenseitige senkrechte Lage der beiden Geraden findet man hieraus

$$4)\quad 1 + BB_1 + CC_1 + \alpha(BC_1 + B_1 C) + \beta(C + C_1) + \gamma(B + B_1) = 0.$$

Wir knüpfen an diese allgemeinen Formeln die Lösung einiger, die gerade Linie betreffenden kompliziorteren Aufgaben, wobei wir ein beliebiges Koordinatensystem zu Grunde legen.

III. Gerade durch einen Punkt und zwei Gerade.

Wie aus den Elementen der Stereometrie bekannt ist, lässt sich durch einen gegebenen Punkt immer eine Gerade so ziehen, dass sie zwei bestimmte, nicht in einer Ebene liegende Gerade schneidet.

Um dasselbe Problem analytisch zu lösen, bezeichnen wir den gegebenen Punkt mit fgh und nennen

$$1)\qquad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2 \end{cases}$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, sowie

$$2)\qquad y = Px + p, \qquad z = Qx + q$$

die Gleichungen der gesuchten Geraden. Die Bedingung, dass letztere durch den Punkt fgh gehen soll, wird durch die Gleichungen

$$3)\qquad g = Pf + p, \qquad h = Qf + q$$

ausgedrückt; die zweite Bedingung, dass die gesuchte Gerade jede der beiden gegebenen Geraden schneiden soll, liefert die Gleichungen

$$4)\qquad \frac{p - b_1}{q - c_1} = \frac{P - B_1}{Q - C_1}, \qquad \frac{p - b_2}{q - c_2} = \frac{P - B_2}{Q - C_2},$$

und so hat man zusammen vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten P, p, Q, q. Substituiert man die aus Nr. 3) gezogenen Werte

$$5)\qquad p = g - Pf, \qquad q = h - Qf$$

in die Gleichungen 4), so ergeben sich nach Wegschaffung der Brüche die neuen Gleichungen

$$(C_1 f + c_1 - h)\,P - (B_1 f + b_1 - g)\,Q = B_1(c_1 - h) - C_1(b_1 - g),$$
$$(C_2 f + c_2 - h)\,P - (B_2 f + b_2 - g)\,Q = B_2(c_2 - h) - C_2(b_2 - g),$$

woraus P und Q leicht zu entwickeln sind. Zur Abkürzung sei

$$\begin{aligned} B_1(c_1 - h) - C_1(b_1 - g) &= k_1, & B_2(c_2 - h) - C_2(b_2 - g) &= k_2, \\ B_1 f + b_1 - g &= m_1, & B_2 f + b_2 - g &= m_2, \\ C_1 f + c_1 - h &= n_1, & C_2 f + c_2 - h &= n_2; \end{aligned}$$

die Werte von P und Q sind dann folgende:

$$P = \frac{k_2 m_1 - k_1 m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, \qquad Q = \frac{k_2 n_1 - k_1 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1},$$

hieraus finden sich p und q nach Nr. 5) und schliesslich sind die Gleichungen der verlangten Geraden

$$6)\qquad y - g = \frac{k_2 m_1 - k_1 m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}(x - f), \qquad z - h = \frac{k_2 n_1 - k_1 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}(k - f).$$

Für die Koordinaten der Durchschnitte dieser Geraden mit den gegebenen Geraden findet man nach § 8

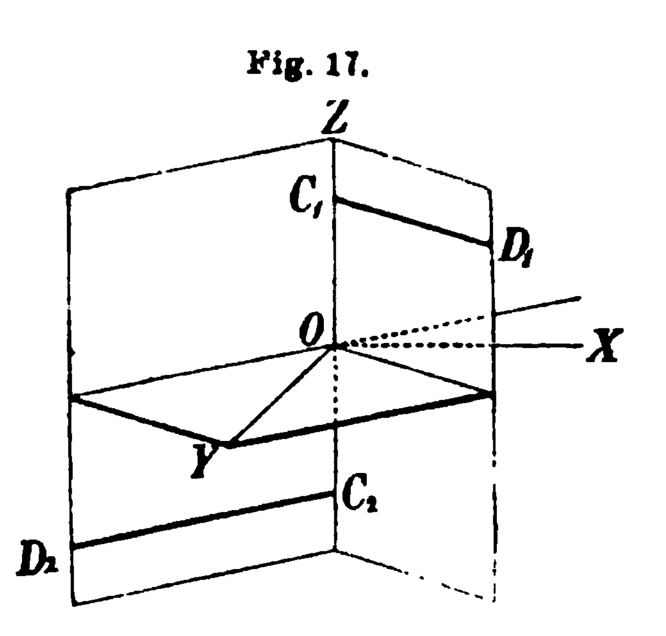
$$7)\qquad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{p - b_1}{P - B_1} = -\dfrac{q - c_1}{Q - C_1}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{b_1 P - p B_1}{P - B_1}, \qquad z_1 = \dfrac{c_1 Q - q C_1}{Q - C_1}; \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{p - b_2}{P - B_2} = -\dfrac{q - c_2}{Q - C_2}, \\ y_2 = \dfrac{b_2 P - p B_2}{P - B_2}, \quad z_2 = \dfrac{c_2 Q - q C_2}{Q - C_2}, \end{cases}$$

wo die oben angegebenen Werte von P, p, Q, q zu substituieren sind.

Die gefundenen Ausdrücke vereinfachen sich, wenn man dem Koordinatensysteme eine besondere, gegen die gegebenen Geraden symmetrische Lage erteilt; man erhält eine solche auf folgende Weise. Aus den Elementen der Stereometrie ist bekannt, dass immer eine Gerade existiert, die zwei gegebene kreuzende Gerade senkrecht schneidet und die Entfernung beider gegebenen Geraden angiebt (wie man sie analytisch bestimmen kann, wird später gezeigt werden); diese Gerade nehmen wir zur z-Achse, sie schneidet die gegebenen Geraden C_1D_1 und C_2D_2 in zwei Punkten C_1 und C_2, zwischen welche wir den Koordinatenanfang in die Mitte legen, so dass $OC_1 = c$ und $OC_2 = -c$ ist; ferner ziehen wir durch O Parallelen zu C_1D_1 und C_2D_2, halbieren die Winkel zwischen diesen Parallelen und nehmen die aufeinander senkrechten Halbierungslinien zu den Achsen der x und der y. In Beziehung auf dieses neue rechtwinklige Koordinatensystem sind die Gleichungen der gegebenen Geraden

Fig. 17.



$$y = Bx, \qquad z = c,$$
$$y = -Bx, \qquad z = -c,$$

also durch Vergleich mit dem früheren

$$B_1 = B, \quad b_1 = 0, \quad C_1 = 0, \quad c_1 = c,$$
$$B_2 = -B, \quad b_2 = 0, \quad C_2 = 0, \quad c_2 = -c;$$

hieraus ergeben sich die Werte

$$k_1 = B(c - h); \quad k_2 = B(c + h),$$
$$m_1 = Bf - g, \quad m_2 = -(Bf + g),$$
$$n_1 = c - h, \quad n_2 = -(c + h),$$

und als Gleichungen der gesuchten Geraden

$$9)\quad y - g = \frac{B(Bcf - gh)}{cg - Bfh}(x - f), \quad z - h = \frac{B(c^2 - h^2)}{cg - Bfh}(x - f).$$

Liegt der Punkt fgh auf einer der gegebenen Geraden, wie z. B. wenn $g = Bf$ und $h = c$, so nehmen die Koeffizienten von $x - f$ die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$ an und geben dadurch zu erkennen, dass die Aufgabe in diesem Falle unbestimmt ist.

IV. Transversale zu zweien und Parallele zur dritten von drei gegebenen Geraden.

Wenn drei gegebene Gerade durch die Gleichungen

$$1)\qquad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

bestimmt sind, so kann nach einer vierten Geraden gefragt werden, welche der ersten parallel ist und die beiden anderen schneidet. Die Gleichungen der gesuchten Geraden mögen heissen

$$2)\qquad y = Px + p, \qquad z = Qx + q;$$

vermöge des Parallelismus dieser und der ersten Geraden ist

$$3)\qquad P = B, \qquad Q = C;$$

weil ferner die verlangte Gerade die beiden übrigen Geraden schneiden soll, müssen noch die Gleichungen

$$4)\qquad \frac{p - b_1}{q - c_1} = \frac{P - B_1}{Q - C_1} \quad \text{und} \quad \frac{p - b_2}{q - c_2} = \frac{P - B_2}{Q - C_2}$$

erfüllt sein. Nach Substitution der Werte von P und Q werden aus diesen Gleichungen die folgenden

$$(C - C_1)\,p - (B - B_1)\,q = b_1(C - C_1) - c_1(B - B_1),$$
$$(C - C_2)\,p - (B - B_2)\,q = b_2(C - C_2) - c_2(B - B_2),$$

aus denen sich p und q bestimmen lassen. Setzt man zur Abkürzung

$$5)\qquad \begin{cases} b_1(C - C_1) - c_1(B - B_1) = d_1, \\ b_2(C - C_2) - c_2(B - B_2) = d_2, \end{cases}$$

so sind die Werte von p und q:

$$6)\qquad \begin{cases} p = \dfrac{d_2(B - B_1) - d_1(B - B_2)}{(B - B_1)(C - C_2) - (B - B_2)(C - C_1)}, \\[2ex] q = \dfrac{d_2(C - C_1) - d_1(C - C_2)}{(B - B_1)(C - C_2) - (B - B_2)(C - C_1)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der verlangten Geraden lauten demnach

$$7)\qquad y = Bx + p, \qquad z = Cx + q,$$

wobei p und q die oben angegebenen Werte besitzen. Die Durchschnitte dieser und der beiden anderen Geraden finden sich durch

Formeln, welche mit den unter Nr. 8) und 9) des vorigen Paragraphen entwickelten übereinstimmen, in denen aber $P = B$, $Q = C$ und für p und q die obigen Ausdrücke zu setzen sind.

Weit einfacher wird die Lösung unserer Aufgabe, wenn wir ein in Beziehung auf die drei gegebenen Geraden symmetrisch liegendes Koordinatensystem wählen. Denken wir uns zunächst durch irgend einen Punkt im Raume Parallelen zu den drei Geraden gelegt und diese als Koordinatenachsen genommen, so erhalten wir als Gleichungen der drei Geraden:

$$\begin{aligned} y &= b_1, & z &= c_1, \\ x &= a_2, & z &= c_2, \\ x &= a_3, & z &= b_3; \end{aligned}$$

dieses Koordinatensystem verschieben wir parallel nach einem Punkte, dessen Koordinaten sind

$$\tfrac{1}{2}(a_2 + a_3), \quad \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3), \quad \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2),$$

und haben so, wenn die neuen Koordinaten mit x', y', z' bezeichnet werden:

$$\begin{aligned} y' + \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3) &= b_1, & z' + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) &= c_1, \\ x' + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3) &= a_2, & z' + \tfrac{1}{2}(c_1 + c_2) &= c_2, \\ x' + \tfrac{1}{2}(a_2 + a_3) &= a_3, & y' + \tfrac{1}{2}(b_1 + b_3) &= b_3; \end{aligned}$$

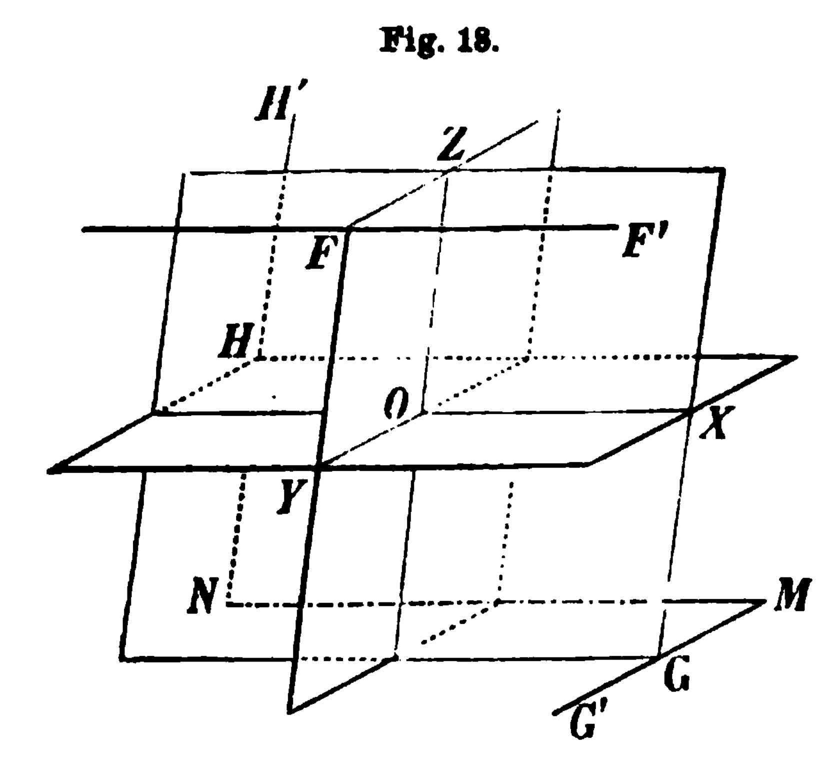
lassen wir endlich die nicht mehr nötigen Accente weg und setzen zur Abkürzung

$$\tfrac{1}{2}(a_2 - a_3) = f, \quad \tfrac{1}{2}(b_1 - b_3) = g, \quad \tfrac{1}{2}(c_1 - c_2) = h,$$

so sind die Gleichungen der drei gegebenen Geraden:

$$8) \quad \begin{cases} y = g, & z = h, \\ x = f, & z = -h, \\ x = -f, & y = -g. \end{cases}$$

Fig. 18.



Zu demselben Koordinatensysteme gelangt man auch, wenn man durch jede der gegebenen Geraden zwei Ebenen parallel zu den anderen Geraden legt, den Mittelpunkt (Diagonalendurchschnitt) des von diesen sechs Ebenen begrenzten Parallelepipedes zum Koordinatenanfang nimmt und durch ihn die Koordinatenachsen parallel zu den gegebenen

Geraden zieht. Soll nun die gesuchte Gerade der ersten Geraden parallel liegen, so sind ihre Gleichungen

$$y = p, \qquad z = q;$$

soll sie ferner die anderen Geraden schneiden, so ergeben sich die Bedingungen

$$-h = q \quad \text{und} \quad -g = p;$$

die Gleichungen der verlangten Geraden sind folglich

$$9) \qquad y = -g \quad \text{und} \quad z = -h,$$

wie man geometrisch leicht verifizieren kann. In der Figur ist die fragliche Gerade mit MN bezeichnet.

V. Transversale zu vier gegebenen Geraden.

Dass die Aufgabe, „eine Gerade zu finden, welche drei gegebene Gerade schneidet", unbestimmt ist, erkennt man leicht aus Nr. III, wenn man den dort gegebenen Punkt (fgh) auf einer dritten Geraden fortrücken lässt; bestimmt dagegen ist die Aufgabe, „eine Gerade zu finden, welche vier gegebene Gerade schneidet", vorausgesetzt, dass kein Paar dieser Geraden in einer Ebene liegt. Sind

$$1) \qquad \begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \\ y = B_3 x + b_3, & z = C_3 x + c_3 \end{cases}$$

die Gleichungen der gegebenen und

$$2) \qquad y = Px + p, \qquad y = Qx + q$$

die der gesuchten Geraden, so müssen die vier Unbekannten P, p, Q, q den folgenden vier Gleichungen genügen:

$$3) \qquad \begin{cases} \dfrac{p - b}{q - c} = \dfrac{P - B}{Q - C}, & \dfrac{p - b_1}{q - c_1} = \dfrac{P - B_1}{Q - C_1}, \\[2ex] \dfrac{p - b_2}{q - c_2} = \dfrac{P - B_2}{Q - C_2}, & \dfrac{p - b_3}{q - c_3} = \dfrac{P - B_3}{Q - C_3}, \end{cases}$$

welche zur Bestimmung jener Grössen hinreichen. Um aber den Weitläufigkeiten zu entgehen, welche die Auflösung der vorstehenden Gleichungen mit sich bringt, wollen wir die Grössen p und q vermeiden und zunächst den Punkt $x_0 y_0 z_0$ aufsuchen, in welchem die verlangte Gerade die erste der gegebenen Geraden schneidet. Da der genannte Punkt beiden Geraden zugleich angehört, so gelten für seine Koordinaten die Gleichungen

$$4)\qquad y_0 = Bx_0 + b, \qquad z_0 = Cx_0 + c,$$
$$5)\qquad y_0 = Px_0 + p, \qquad z_0 = Qx_0 + q,$$

woraus man durch Elimination von y_0 und z_0 erhält:

$$6)\qquad p = b + (B - P)x_0, \qquad q = c + (C - Q)x_0.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in die drei letzten Gleichungen von Nr. 3) liefert drei Gleichungen zur Bestimmung von P, Q und x_0; die Substitution in die erste jener Gleichungen ist nicht mehr nötig; denn dass die gesuchte Gerade die erste Gerade schneidet, ist schon dadurch ausgedrückt, dass beide den Punkt $x_0 y_0 z_0$ gemein haben sollen. Die zweite Gleichung in Nr. 3) wird nach der angedeuteten Operation zur folgenden:

$$[c_1 - c + (C_1 - C)x_0]P - [b_1 - b + (B_1 - B)x_0]Q$$
$$= B_1(c_1 - c) - C_1(b_1 - b) + (BC_1 - B_1C)x_0,$$

und von ähnlicher Gestalt sind die aus den zwei anderen Gleichungen entstehenden neuen Gleichungen. Zur Abkürzung sei nun

$$B_1(c_1 - c) - C_1(b_1 - b) = l_1, \quad BC_1 - B_1C = L_1,$$
$$B_2(c_2 - c) - C_2(b_2 - b) = l_2, \quad BC_2 - B_2C = L_2,$$
$$B_3(c_3 - c) - C_3(b_3 - b) = l_3, \quad BC_3 - B_3C = L_3,$$
$$b_1 - b = m_1, \quad B_1 - B = M_1, \quad c_1 - c = n_1, \quad C_1 - C = N_1,$$
$$b_2 - b = m_2, \quad B_2 - B = M_2, \quad c_2 - c = n_2, \quad C_2 - C = N_2,$$
$$b_3 - b = m_3, \quad B_3 - B = M_3, \quad c_3 - c = n_3, \quad C_3 - C = N_3;$$

die aufzulösenden drei Gleichungen sind dann folgende:

$$(n_1 + N_1x_0)P - (m_1 + M_1x_0)Q = l_1 + L_1x_0,$$
$$(n_2 + N_2x_0)P - (m_2 + M_2x_0)Q = l_2 + L_2x_0,$$
$$(n_3 + N_3x_0)P - (m_3 + M_3x_0)Q = l_3 + L_3x_0.$$

Aus den beiden ersten ergeben sich für P und Q die Ausdrücke

$$7)\quad P = \frac{(l_1 + L_1x_0)(m_2 + M_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(m_1 + M_1x_0)}{(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)},$$

$$8)\quad Q = \frac{(l_1 + L_1x_0)(n_2 + N_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(n_1 + N_1x_0)}{(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_1 + M_1x_0)(n_2 + N_2x_0)},$$

und wenn man diese in die letzte der obigen drei Gleichungen substituiert, so bleibt folgende nur die eine Unbekannte x_0 enthaltende Gleichung übrig:

$$9)\begin{cases}(n_3 + N_3x_0)[(l_1 + L_1x_0)(m_2 + M_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(m_1 + M_1x_0)]\\ -(m_3 + M_3x_0)[(l_1 + L_1x_0)(n_2 + N_2x_0) - (l_2 + L_2x_0)(n_1 + N_1x_0)]\\ = (l_3 + L_3x_0)[(m_2 + M_2x_0)(n_1 + N_1x_0) - (m_2 + M_2x_0)(n_2 + N_2x_0)].\end{cases}$$

Nach Ausführung der angedeuteten Multiplikationen kann man alle Glieder auf eine Seite bringen; dies giebt eine kubische Gleichung von der Form

$$10)\qquad \varkappa + \lambda x_0 + \mu x_0^2 + \nu x_0^3 = 0,$$

und zwar ist der Koeffizient der höchsten Potenz

$$\nu = L_1(M_2N_3 - M_3N_2) + L_2(M_3N_1 - M_1N_3) + L_3(M_1N_2 - M_2N_1).$$

Dieser Ausdruck zieht sich sehr zusammen, wenn man beachtet, dass

$$L_1 = BC_1 - B_1C = B(C_1 - C) - C(B_1 - B) = BN_1 - CM_1$$

und ebenso

$$L_2 = BN_2 - CM_2, \quad L_3 = BN_3 - CM_3$$

ist; es findet sich nämlich durch Ausführung der Multiplikationen und Vereinigung der mit B und C behafteten Glieder

$$\begin{aligned}\nu = B[N_1(M_2N_3 - M_3N_2) + N_2(M_3N_1 - M_1N_3) + N_3(M_1N_2 - M_2N_1)]\\ + C[M_1(M_2N_3 - M_3N_2) + M_2(M_3N_1 - M_1N_3) + M_3(M_1N_2 - M_2N_1)],\end{aligned}$$

d. h. $\nu = 0$.

Die Gleichung 10) ist daher nur eine quadratische und liefert im allgemeinen zwei Werte von x_0; die Gleichungen 7) und 8) bestimmen nachher die Unbekannten P und Q, die in Nr. 6) verzeichneten Gleichungen endlich liefern p und q. Hierin liegt in der That eine vollständige Lösung der Aufgabe, doch ist nicht zu leugnen, dass die ganze Rechnung etwas unbehilflicher Natur ist und namentlich zu einer Konstruktion der verlangten Geraden gänzlich unbrauchbar sein würde. Wir geben daher eine zweite weit einfachere Behandlung des Problems.

Die in Nr. 1) erwähnten Geraden mögen kurz s, s_1, s_2, s_3 und die gesuchte Transversale mag t heissen; durch jede der drei Geraden s_1, s_2, s_3 legen wir zwei Ebenen parallel zu den beiden übrigen Geraden, nehmen den Mittelpunkt des von den entstandenen sechs Ebenen begrenzten Parallelepipedes zum Koordinatenanfang und ziehen durch ihn die Koordinatenachsen parallel zu den Geraden s_1, s_2, s_3. Wie im vorigen Abschnitte haben wir dann

$$11)\qquad \begin{cases} y = g, & z = h \quad \text{als Gleichungen von } s_1,\\ x = f, & z = -h \quad \text{,, \quad ,, \quad ,, } s_2,\\ x = -f, & z = -g \quad \text{,, \quad ,, \quad ,, } s_3;\end{cases}$$

ferner seien wie vorhin

$$12)\qquad y = Bx + b, \quad z = Cx + c \text{ die Gleichungen von } s,$$

$$13)\qquad y = Px + p, \quad z = Qx + q \quad \text{,, \quad ,, \quad ,, } t.$$

Die Bedingung für den Durchschnitt von t mit s ist

14) $$\frac{p-b}{q-c}=\frac{P-B}{Q-C};$$

die Bedingung für den Durchschnitt von t mit s_1

15) $$\frac{p-g}{q-h}=\frac{P}{Q}.$$

Wenn ferner ein Durchschnitt von t mit s_2 existieren soll, so muss die xz-Projektion von t durch die gleichnamige Spur von s_2 gehen; dies giebt

16) $$-h=Qf+q;$$

endlich schneiden sich t und s_3, wenn die xy-Projektion von t durch die xy-Spur von s_3 geht, d. h. wenn

17) $$-g=-Pf+p.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgen die Ausdrücke

18) $$P=\frac{p+g}{f},\quad Q=-\frac{q+h}{f}$$

und durch Substitution derselben verwandelt sich die Gleichung 15) in die nachstehende

19) $$pq=gh;$$

auf gleiche Weise ergiebt sich aus Nr. 14), wenn man das vorstehende Ergebnis benutzt,

20) $$(c-h-Cf)p+(b-g+Bf)q=2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf).$$

Die Bestimmung von p und q aus den Gleichungen 19) und 20) unterliegt jetzt keiner Schwierigkeit; die Formeln in 18) geben nachher P und Q, womit die Aufgabe gelöst ist. Besonderes Interesse gewährt es aber, die geometrische Bedeutung der letzten Gleichungen aufzusuchen und daraus eine Konstruktion der Transversale t herzuleiten.

Die Gleichung 19) sagt, dass die yz-Spur der Geraden t, nämlich der Punkt pq, auf einer Hyperbel liegt, deren Asymptoten die Achsen der y und der z sind und deren Potenz dem Produkte gh gleich kommt; die Gleichung 20) giebt zu erkennen, dass der Punkt pq einer Geraden angehört, welche von der y-Achse das Stück

$$m=\frac{2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf)}{c-h-Cf}$$

und von der z-Achse die Strecke

$$n=\frac{2gh-b(h+Cf)-c(g-Bf)}{b-g+Bf}$$

abschneidet; der Punkt pq ist demnach der Durchschnitt jener Hyperbel mit dieser Geraden. Um nun die Strecken m und n zu konstruieren, legen wir durch den Punkt $-f$, $-g$, $+h$ eine Parallele zu s und suchen ihre yz-Spur; die Gleichungen der fraglichen Parallelen sind

$$y + g = B(x + f), \quad z - h = C(x + f),$$

oder

$$y = Bx - g + Bf, \quad z = Cx + h + Cf,$$

mithin die Koordinaten ihrer yz-Spur

$$b_1 = -g + Bf, \quad c_1 = h + Cf.$$

Legen wir zweitens durch den Punkt $+f$, $+g$, $-h$ eine Parallele zu s, so erhalten wir für die Koordinaten ihrer yz-Spur

$$b_2 = g - Bf, \quad c_2 = -h - Cf,$$

d. i.

$$b_2 = -b_1 \text{ und } c_2 = -c_1.$$

Vermöge dieser Werte können die für m und n angegebenen Ausdrücke auf folgende Form gebracht werden:

$$m = \frac{2gh}{c - c_1} + \frac{bc_1 - b_1c}{c_1 - c},$$

$$n = \frac{2gh}{b - b_2} + \frac{bc_2 - b_2c}{b - b_2}.$$

Nun stellt aber der Ausdruck

$$\frac{bc_1 - b_1c}{c_1 - c}$$

das Stück dar, welches die Verbindungslinie der Punkte bc und b_1c_1 von der z-Achse abschneidet und welches kurz m_1 heissen möge, ebenso bedeutet der Ausdruck

$$\frac{bc_2 - b_2c}{b - b_2}$$

die Strecke, welche die Verbindungslinie der Punkte bc und b_2c_2 auf der y-Achse abschneidet und die wir kurz n_2 nennen; es ist daher

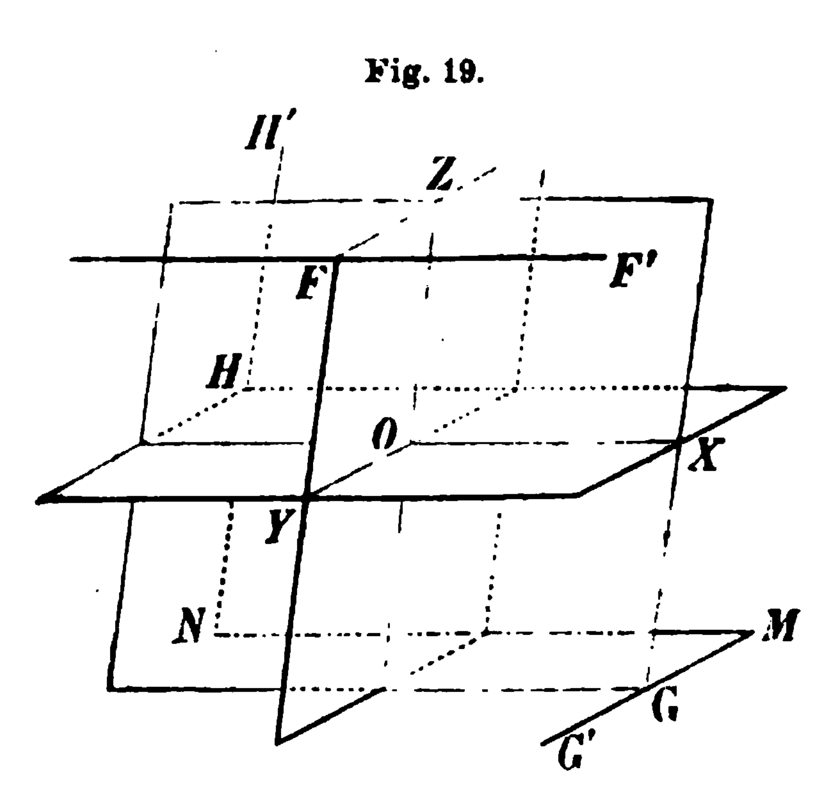
$$21) \quad m = \frac{gh}{\frac{1}{2}(c - c_1)} + m_1, \quad n = \frac{gh}{\frac{1}{2}(b - b_2)} + n_2$$

und diese Ausdrücke sind einfach genug für eine geometrische Konstruktion; letztere besteht nämlich aus folgenden Operationen.

Man konstruiert zunächst die vorhin erwähnte Hyperbel zwischen den Asymptoten OY und OZ mit der Potenz gh; zu der gegebenen Geraden s, deren yz-Spur die Koordinaten b, c besitzt und

A heissen möge, legt man durch den Punkt $-f, -g, +h$ (in der Figur H') eine Parallele und bestimmt ihre yz-Spur A_1, deren Koordinaten b_1 und c_1 sind; auf gleiche Weise hat man durch den Punkt $+f, +g, -h$ (in der Figur G') eine Parallele zu s zu legen und ihre yz-Spur A_2 aufzusuchen, deren Koordinaten b_2 und c_2 sind. Die Gerade AA_1 schneidet von der y-Achse ein Stück ab, welches mit m_1 einerlei ist, ebenso schneidet AA_2 von der z-Achse eine Strecke $= n_2$ ab; das erste Stück vergrössert man um die zur Ordinate $\frac{1}{2}(c - c_1)$ gehörende Hyperbelabscisse, das zweite Stück um die zur Abscisse $\frac{1}{2}(b - b_2)$ gehörige Hyperbelordinate, und erhält hiermit auf der y-Achse die Strecke $OM = m$, sowie auf der z-Achse die Strecke $ON = n$. Die Gerade MN schneidet die Hyperbel in zwei Punkten U, V, und diese sind die yz-Spuren der beiden Geraden, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen. Will man endlich die verlangten Geraden selber konstruieren, so braucht man nur durch den einen oder anderen der Punkte U und V eine Gerade zu legen, welche zwei der gegebenen Geraden, etwa s und s_1, schneidet.

Fig. 19.

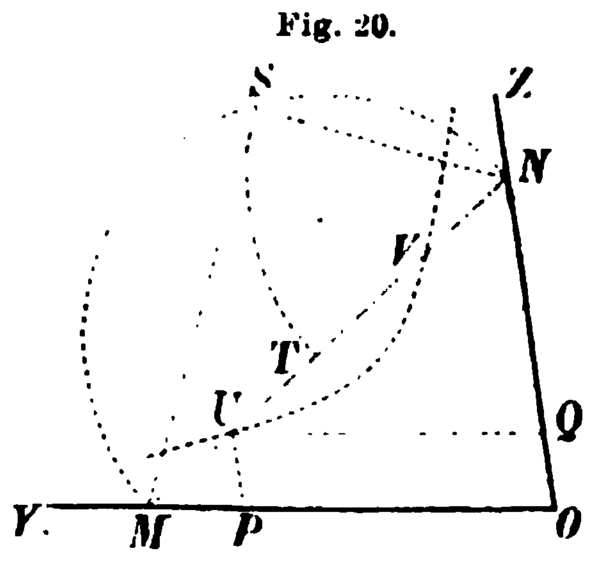


Wir haben bei der angegebenen Konstruktion eine Hyperbel benutzt, weil sich diese sehr ungezwungen darbot, können aber auch auf folgende Weise statt der Hyperbel einen Kreis verwenden. Nachdem m_1 und n_2 wie vorhin bestimmt worden sind, konstruieren wir die Ausdrücke

$$\frac{gh}{\frac{1}{2}(c - c_1)} \quad \text{und} \quad \frac{gh}{\frac{1}{2}(b - b_2)}$$

als vierte Proportionalen und leiten daraus nach Formel 21) m und n ab, wodurch wir wieder zu der Geraden MN gelangen. Es kommt nun bloss darauf an, in MN den Punkt U (oder V) zu finden, dessen Koordinaten $OP = p$ und $OQ = q$ der Gleichung $pq = gh$ genügen. Setzen wir die bekannte Strecke

Fig. 20.



$MN = l$, die unbekannten Stücke $MU = u$ und $NU = v$, so ist in den ähnlichen Dreiecken OMN, PMU und QNU

$$l : m = v : p \quad \text{mithin} \quad p = \frac{mv}{l},$$

$$l : n = u : q \quad \text{,,} \quad q = \frac{nu}{l};$$

an die Stelle der Gleichung $pq = gh$ tritt daher die folgende

$$uv = \frac{ghl^2}{mn} \quad \text{oder} \quad uv = k^2,$$

worin k zur Abkürzung dienen möge und mittels der Proportion

$$22) \qquad \sqrt{mn} : \sqrt{gh} = l : k$$

leicht konstruiert werden kann. Ausserdem haben wir $u + v = l$ und durch Verbindung beider Gleichungen

$$u = \tfrac{1}{2}\left[l - \sqrt{l^2 - (2k)^2}\right],$$
$$v = \tfrac{1}{2}\left[l + \sqrt{l^2 - (2k)^2}\right].$$

Dies giebt folgende Konstruktion. Nachdem k mittels der Proportion 22) bestimmt ist, beschreibt man über MN als Durchmesser einen Halbkreis, trägt in diesem von M aus die Linie $MS = 2k$ ein, nimmt $NT = NS$ und halbiert die Strecke MT in U; der zweite Punkt V liegt von N aus in der Entfernung $NV = MU$.

VI. Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade.

Die Koordinaten eines gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen und

$$1) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden. Soll nun durch den Punkt fgh eine Gerade gezogen werden, welche die erste Gerade senkrecht schneidet, so sind die in den Gleichungen des gesuchten Perpendikels etwa

$$2) \qquad y = Mx + m, \qquad z = Nx + n$$

vorkommenden vier Unbekannten M, N, m, n mittels folgender Bedingungen zu bestimmen. Weil erstens die verlangte Gerade durch den Punkt fgh gehen soll, ist

$$3) \qquad g = Mf + m, \qquad h = Nf + n;$$

weil ferner das Perpendikel die gegebene Gerade schneiden soll, muss die Bedingungsgleichung

$$4) \qquad (m - b)(N - C) = (n - c)(M - B)$$

stattfinden; endlich gehört zur senkrechten Lage beider Geraden gegeneinander die Gleichung (II, Nr. 4)

$$5)\quad \left.\begin{array}{c} 1 + BM + CN \\ + \alpha(BN + CM) + \beta(C + N) + \gamma(B + M) \end{array}\right\} = 0,$$

in welcher wir die gleichartigen Grössen vereinigen, so dass die Gleichung lautet

$$6)\quad (B + \gamma + C\alpha) M + (C + \beta + B\alpha) N = -(1 + B\gamma + C\beta).$$

Aus den Gleichungen 3) erhalten wir

$$7)\qquad m = g - Mf, \qquad n = h - Nf,$$

durch deren Substitution die Gleichung 4) in die folgende übergeht:

$$8)\quad (Cf + c - h) M - (Bf + b - g) N = B(c - h) - C(b - g).$$

Die Gleichungen 3) und 8) bestimmen M und N, wobei zur Abkürzung gesetzt werden möge:

$$9)\quad \begin{cases} F = (Bf + b - g)(B + C\alpha + \gamma) + (Cf + c - h)(C + B\alpha + \beta), \\ G = [B(c-h) - C(b-g)](C + B\alpha + \beta) - (Bf + b - g)(1 + B\gamma + C\beta), \\ H = [C(b-g) - B(c-h)](B + C\alpha + \gamma) - (Cf + c - h)(1 + B\gamma + C\beta); \end{cases}$$

die Werte der vier Unbekannten sind dann

$$M = \frac{G}{F}, \qquad N = \frac{H}{F},$$

$$m = g - \frac{G}{F} f, \qquad n = h - \frac{H}{F} f,$$

mithin die Gleichungen der gesuchten Senkrechten:

$$10)\qquad y - g = \frac{G}{F}(x - f), \qquad z - h = \frac{H}{F}(x - f).$$

Wir suchen zweitens die Koordinaten x_0, y_0, z_0 desjenigen Punktes zu bestimmen, in welchem die von fgh ausgehende Senkrechte die gegebene Gerade schneidet. Da der fragliche Durchschnitt beiden Geraden gleichzeitig angehört, so gelten für seine Koordinaten die Beziehungen

$$11)\quad y_0 = Bx_0 + b, \quad y_0 - g = \frac{G}{F}(x_0 - f), \quad z_0 - h = \frac{H}{F}(x_0 - f);$$

aus den ersten beiden Gleichungen erhalten wir

$$x_0 = -\frac{F(b - g) + Gf}{BF - G}$$

oder auch

$$12)\qquad x_0 = f - \frac{Bf + b - g}{BF - G} F.$$

Vermöge der oben angegebenen Werte von F und G ist aber

$$BF - G = (Bf + b - g)\{B(B + C\alpha + \gamma) + 1 + B\gamma + C\beta\}$$
$$+ (C + B\alpha + \beta)\{B(Cf + c - h) - B(c - h) + C(b - g)\}$$

und unter der Bemerkung, dass der Inhalt der letzten Parenthese $= C(Bf + b - g)$ ist,

$$BF - G$$
$$= (Bf + b - g)(1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\beta + 2BC\alpha).$$

Benutzen wir die schon früher gebrauchte Abkürzung

13) $$D^2 = 1 + B^2 + C^2 + 2B\gamma + 2C\beta + 2BC\alpha,$$

so vereinfacht sich der Wert von x_0 wesentlich; aus den Gleichungen 10) ergeben sich nachher y_0 und z_0, überhaupt sind

14) $$x_0 = f - \frac{F}{D^2}, \quad y_0 = g - \frac{G}{D^2}, \quad z_0 = h - \frac{H}{D^2}$$

die Koordinaten des Fusspunktes der vom Punkte fgh auf die gegebene Gerade herabgelassenen Senkrechten.

Endlich möge noch die Entfernung p der Punkte fgh und $x_0 y_0 z_0$ aufgesucht werden; hierzu dient die Formel

$$p^2 = (x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2 + (z_0 - h)^2$$
$$+ 2(x_0 - f)(y_0 - g)\gamma + 2(x_0 - f)(z_0 - h)\beta + 2(y_0 - g)(z_0 - h)\alpha,$$

in welche nur die obigen Werte von x_0, y_0, z_0 einzuführen sind. Man findet auf diese Weise

15) $$p = \frac{\sqrt{F^2 + G^2 + H^2 + 2FG\gamma + 2FH\beta + 2GH\alpha}}{D^2}$$

für die Entfernung des Punktes von der Geraden.

Die für p entwickelten Formeln dienen auch zur Bestimmung des **Abstandes zweier parallelen Geraden**, deren Gleichungen

16) $$\begin{cases} y = Bx + b, & z = Cx + c, \\ y = Bx + b_1, & z = Cx + c_1 \end{cases}$$

sein mögen; setzt man nämlich fest, dass der Punkt fgh auf der zweiten Geraden liegt, dass also die Gleichungen

$$g = Bf + b_1, \quad h = Cf + c_1$$

stattfinden, so ist seine Entfernung von der ersten Geraden einerlei mit dem Abstande der Parallelen voneinander. Vermöge der angegebenen Werte von g und h wird zunächst

$$17)\begin{cases} F=(b-b_1)(B+C\alpha+\gamma)+(c-c_1)(C+B\alpha+\beta), \\ G=[(c-c_1)B-(b-b_1)C](C+B\alpha+\beta)-(b-b_1)(1+B\gamma+C\beta), \\ H=[(b-b_1)C-(c-c_1)B](B+C\alpha+\gamma)-(c-c_1)(1+B\gamma+C\beta), \end{cases}$$

und dann wie früher

$$18)\ p=\frac{\sqrt{F^2+G^2+H^2+2FG\gamma+2FH\beta+2GH\alpha}}{D^2}.$$

VII. Senkrechte zu zwei gegebenen Geraden.

Die Gleichungen zweier gegebenen Geraden mögen sein

$$1)\qquad y=B_1x+b_1,\qquad z=C_1x+c_1,$$

$$2)\qquad y=B_2x+b_2,\qquad z=C_2x+c_2,$$

und die Gleichungen einer dritten Geraden, welche die beiden vorigen senkrecht schneidet,

$$3)\qquad y=Mx+m,\qquad z=Nx+n;$$

zur Bestimmung der vier Unbekannten M, m, N, n haben wir dann folgende Bedingungen. Da die gesuchte Gerade mit jeder der gegebenen Geraden einen rechten Winkel bilden soll, so gelten die Gleichungen

$$4)\begin{cases} (B_1+C_1\alpha+\gamma)M+(C_1+B_1\alpha+\beta)N=-(1+B_1\gamma+C_1\beta) \\ (B_2+C_2\alpha+\gamma)M+(C_2+B_2\alpha+\beta)N=-(1+B_2\gamma+C_2\beta), \end{cases}$$

worin α, β, γ wie früher die Cosinus der Koordinatenwinkel (yz), (zx), (xy) bezeichnen. Damit ferner die verlangte Gerade jede der gegebenen Geraden schneide, sind noch die zwei Bedingungen

$$5)\qquad\begin{cases} (m-b_1)(N-C_1)=(n-c_1)(M-B_1), \\ (m-b_2)(N-C_2)=(n-c_2)(M-B_2) \end{cases}$$

erforderlich. Von den vier aufgestellten Gleichungen bestimmen die beiden ersten die Unbekannten M und N; setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}&=(B_1C_2-B_2C_1)(1-\alpha^2) \\ &\qquad+(B_1-B_2)(\beta-\gamma\alpha)-(C_1-C_2)(\gamma-\alpha\beta), \\ \mathfrak{B}&=(B_1-B_2)(1-\gamma^2) \\ &\qquad+(C_1-C_2)(\alpha-\beta\gamma)+(B_1C_2-B_2C_1)(\beta-\gamma\alpha), \\ \mathfrak{C}&=(C_1-C_2)(1-\beta^2) \\ &\qquad+(B_1-B_2)(\alpha-\beta\gamma)-(B_1C_2-B_2C_1)(\gamma-\alpha\beta), \end{aligned}$$

so erhalten wir aus den Gleichungen 4) die Werte

$$6)\qquad M=\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},\qquad N=-\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}.$$

Um zweitens m und n zu finden, substituieren wir die für M und N angegebenen Werte in die Gleichungen 5); letztere nehmen dadurch die folgende Form an:

$$7) \begin{cases} (\mathfrak{A} C_1 + \mathfrak{B}) m - (\mathfrak{A} B_1 - \mathfrak{C}) n = b_1 (\mathfrak{A} C_1 + \mathfrak{B}) - c_1 (\mathfrak{A} B_1 - \mathfrak{C}), \\ (\mathfrak{A} C_2 + \mathfrak{B}) m - (\mathfrak{A} B_2 - \mathfrak{C}) n = b_2 (\mathfrak{A} C_2 + \mathfrak{B}) - c_2 (\mathfrak{A} B_2 - \mathfrak{C}); \end{cases}$$

die Auflösung dieser beiden Gleichungen ersten Grades hat nicht die mindeste Schwierigkeit und mag unterbleiben, weil sich die ganze Aufgabe noch auf andere Weise behandeln lässt.

Die gemeinschaftliche Normale der beiden gegebenen Geraden ist bestimmt, sobald man die Koordinaten der beiden Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ kennt, in denen sie die gegebenen Geraden schneidet; durch Verbindung der Gleichung 3) mit den Gleichungen 1) und 2) ergeben sich für jene sechs Koordinaten die Werte:

$$8) \quad x_1 = -\frac{m - b_1}{M - B_1} \quad \text{und zugleich} \quad x_1 = -\frac{n - c_1}{N - C_1},$$

$$9) \quad y_1 = B_1 x_1 + b_1, \qquad z_1 = C_1 x_1 + c_1;$$

$$10) \quad x_2 = -\frac{m - b_2}{M - B_2} \quad \text{und zugleich} \quad x_2 = -\frac{n - c_2}{N - C_2},$$

$$11) \quad y_2 = B_2 x_2 + b_2, \qquad z_2 = C_2 x_2 + c_2.$$

Obschon M, N, m, n, dem Vorigen zufolge, als bekannt gelten können, so würde doch die Substitution ihrer Werte aus dem Grunde nicht unmittelbar rätlich sein, weil namentlich m und n, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausgedrückt, etwas komplizierter Form sind; diese Weitläufigkeiten umgehen wir durch vorherige Wegschaffung von m und n. Aus der ersten Formel in Nr. 8) und der ersten Formel in Nr. 10) erhalten wir nämlich durch Elimination von m

$$(M - B_1) x_1 - (M - B_2) x_2 = b_1 - b_2,$$

und ebenso aus den zweiten Formeln in 8) und 10) durch Elimination von n

$$(N - C_1) x_1 - (N - C_2) x_2 = c_1 - c_2;$$

da M und N bekannt sind, so kommen in diesen Gleichungen nur die Unbekannten x_1 und x_2 vor, wir finden als deren Werte

$$x_1 = \frac{(b_1 - b_2)(N - C_2) - (c_1 - c_2)(M - B_2)}{(M - B_1)(N - C_2) - (M - B_2)(N - C_1)},$$

$$x_2 = \frac{(b_1 - b_2)(N - C_1) - (c_1 - c_2)(M - B_1)}{(M - B_1)(N - C_2) - (M - B_2)(N - C_1)}.$$

Nach Entwickelung des gemeinschaftlichen Nenners und Substitution der Werte von M und N (Nr. 6) ergeben sich für x_1 und x_2, sowie für die übrigen Koordinaten folgende Ausdrücke:

$$12)\quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{(b_1-b_2)(\mathfrak{A}C_2+\mathfrak{B})-(c_1-c_2)(\mathfrak{A}B_2-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}, \\ y_1 = B_1x_1+b_1, \qquad z_1 = C_1x_1+c_1; \end{cases}$$

$$13)\quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{(b_1-b_2)(\mathfrak{A}C_1+\mathfrak{B})-(c_1-c_2)(\mathfrak{A}B_1-\mathfrak{C})}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}, \\ y_2 = B_2x_2+b_2, \qquad z_1 = C_2x_2+c_2. \end{cases}$$

Es hat nun auch keine Schwierigkeit, den Abstand der Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$, d. h. die Entfernung der beiden gegebenen Geraden, der Grösse und Lage nach zu bestimmen; es ist nämlich

$$e^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$
$$+2\alpha(y_1-y_2)(z_1-z_2)+2\beta(x_1-x_2)(z_1-z_2)+2\gamma(x_1-x_2)(y_1-y_2).$$

Da die Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ auf der gemeinschaftlichen Normalen beider Geraden liegen, so gelten die Gleichungen

$$y_1 = Mx_1+m, \qquad z_1 = Nx_1+n,$$
$$y_2 = Mx_2+m, \qquad z_2 = Nx_2+n,$$

woraus folgt

$$14)\quad y_1-y_2 = M(x_1-x_2), \qquad z_1-z_2 = N(x_1-x_2).$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke wird

$$e^2 = (x_1-x_2)^2\{1+M^2+N^2+2\alpha MN+2\beta N+2\gamma M\}.$$

Hier haben wir zunächst die Werte von M und N einzusetzen und nachher die Wurzel zu ziehen; zur Abkürzung sei

$$R^2 = \mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2-2\alpha\mathfrak{B}\mathfrak{C}-2\beta\mathfrak{C}\mathfrak{A}-2\gamma\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

wir erhalten dann

$$15)\quad e = \frac{x_1-x_2}{\mathfrak{A}}R.$$

Vermöge der eben angegebenen Werte von x_1 und x_2 ist

$$x_1-x_2 = \frac{(b_1-b_2)(C_1-C_2)-(c_1-c_2)(B_1-B_2)}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}\mathfrak{A},$$

mithin lautet die Formel für die Entfernung der beiden Geraden

$$16)\quad e = \frac{(b_1-b_2)(C_1-C_2)-(c_1-c_2)(B_1-B_2)}{\mathfrak{A}(B_1C_2-B_2C_1)+\mathfrak{B}(B_1-B_2)+\mathfrak{C}(C_1-C_2)}R.$$

Die Richtung von e bestimmt sich durch die Gleichungen

$$\cos(ex) = \frac{x_1-x_2+(y_1-y_2)\gamma+(z_1-z_2)\beta}{e},$$

$$\cos(ey) = \frac{y_1-y_2+(z_1-z_2)\alpha+(x_1-x_2)\gamma}{e},$$

$$\cos(ez) = \frac{z_1-z_2+(x_1-x_2)\beta+(y_1-y_2)\alpha}{e};$$

in diesen haben wir zunächst $y_1 - y_2$ und $z_1 - z_2$ durch M, N, $x_1 - x_2$ auszudrücken (Nr. 14) und gleichzeitig für M und N ihre Werte zu setzen; dies giebt

$$\cos(ex) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A}e}(\mathfrak{A} + \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{B}\beta),$$

$$\cos(ey) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A}e}(\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{A}\gamma),$$

$$\cos(ez) = \frac{x_1 - x_2}{\mathfrak{A}e}(-\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\beta + \mathfrak{C}\alpha),$$

oder endlich vermöge des aus Nr. 15) genommenen Wertes

$$17)\quad \begin{cases} \cos(ex) = \dfrac{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma}{R}, \\ \cos(ey) = \dfrac{\mathfrak{A}\gamma - \mathfrak{B}\alpha + \mathfrak{C}}{R}, \\ \cos(ez) = \dfrac{\mathfrak{A}\beta - \mathfrak{B} + \mathfrak{C}\alpha}{R}. \end{cases}$$

Für ein rechtwinkliges Koordinatensystem erhalten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die einfachen Werte

$$\mathfrak{A} = B_1C_2 - B_2C_1, \qquad \mathfrak{B} = B_1 - B_2, \qquad \mathfrak{C} = C_1 - C_2;$$

ferner ist

$$R^2 = (B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2,$$
$$= \mathfrak{A}(B_1C_2 - B_2C_1) + \mathfrak{B}(B_1 - B_2) + \mathfrak{C}(C_1 - C_2);$$

aus den Formeln 16) und 17) werden dann die folgenden:

$$18)\quad e = \frac{(b_1 - b_2)(C_1 - C_2) - (c_1 - c_2)(B_1 - B_2)}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}},$$

$$19)\quad \begin{cases} \cos(ex) = \dfrac{B_1C_2 - B_2C_1}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}, \\ \cos(ey) = \dfrac{C_1 - C_2}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}, \\ \cos(ez) = \dfrac{-(B_1 - B_2)}{\sqrt{(B_1C_2 - B_2C_1)^2 + (B_1 - B_2)^2 + (C_1 - C_2)^2}}. \end{cases}$$

Im Fall sich beide Geraden schneiden, ist

$$(b_1 - b_2)(C_1 - C_2) = (c_1 - c_2)(B_1 - B_2)$$

und mithin $e = 0$, wie es sein muss; die Formeln 17) oder 19) bestimmen dann die Richtung derjenigen Geraden, welche auf der Ebene der beiden sich schneidenden Geraden senkrecht steht.

Drittes Kapitel.

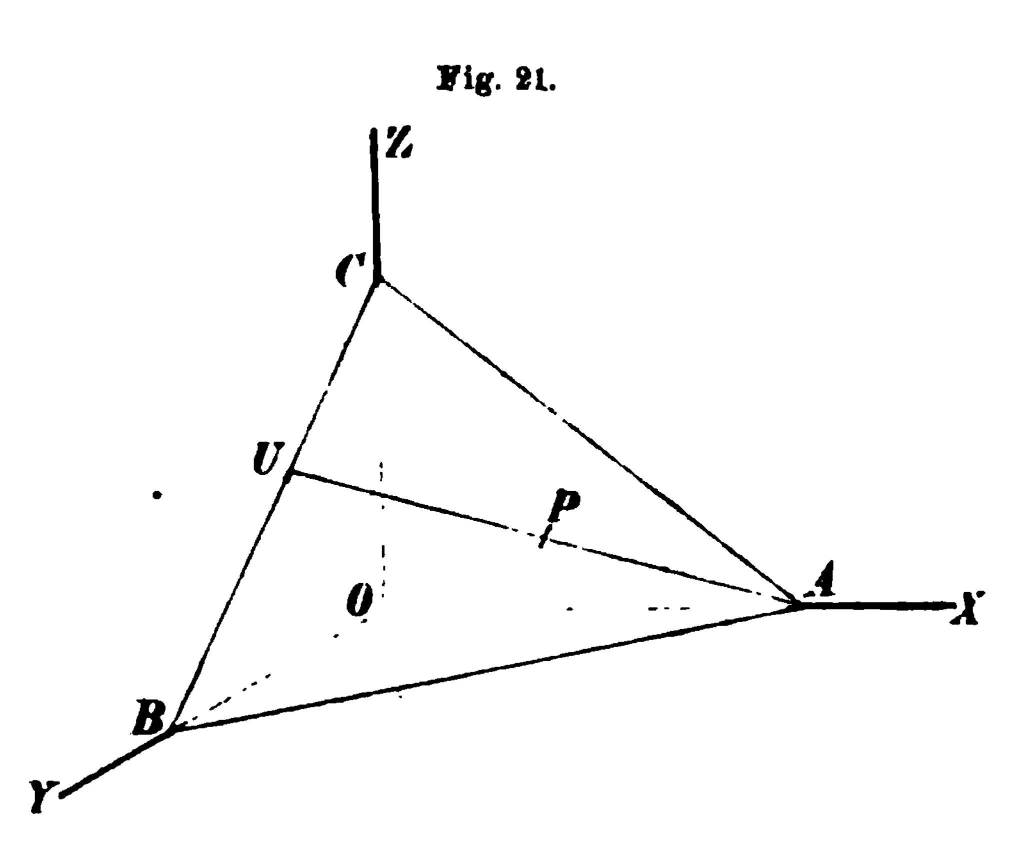
Die ebene Fläche.

§ 10.

Die Gleichung der Ebene.

Wenn zwischen den drei Koordinaten eines Punktes nur eine Gleichung besteht, so darf man zwei der Grössen x, y, z willkürlich wählen, und die vorhandene Gleichung liefert dann von selbst die dritte, d. h. geometrisch, der Punkt P im Raume ist bestimmt, sobald eine seiner Projektionen willkürlich angenommen wird. Erteilen wir nun z. B. den Koordinaten x und y alle möglichen Werte, so betritt die xy-Projektion P' alle möglichen Stellen der xy-Ebene; diesen entsprechen successive Lagen des Punktes P, die in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine gewisse Fläche bilden. Demnach wird eine Fläche im allgemeinen durch eine Gleichung charakterisiert, welche zwischen den drei Koordinaten jedes ihrer Punkte besteht und eben deshalb die Gleichung der Fläche heisst. Die einfachste Fläche ist die Ebene; zu ihrer Gleichung gelangt man auf folgendem Wege.

Fig. 21.



Eine beliebige Ebene schneidet im allgemeinen jede der drei Koordinatenachsen und ist ihrer Lage nach durch die Strecken OA,

OB, OC bestimmt, welche sie auf den Achsen abgrenzt; man kann sich nämlich, wenn die Punkte A, B, C gegeben sind, die Ebene dadurch entstanden denken, dass eine veränderliche Gerade AU sich um den Punkt A dreht und zugleich an der Geraden BC hingleitet. Sind nun x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes P der beweglichen Geraden, also auch der Ebene ABC, und setzen wir ferner $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, so sind

$$y = M(x - a) \quad \text{und} \quad z = N(x - a)$$

die Gleichung der Geraden AU. Für die Koordinaten v und w ihrer yz-Spur, d. h. des Punktes U, erhalten wir daraus

$$v = -Ma = \frac{y}{a - x}a, \qquad w = -Na = \frac{z}{a - x}a;$$

da U auf der Geraden BC liegen muss, so ist bekanntlich

$$\frac{v}{b} + \frac{w}{c} = 1,$$

mithin durch Substitution der Werte von v und w

$$1) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Dies ist die Gleichung einer Ebene, welche von den Koordinatenachsen die Strecken a, b, c abschneidet, wobei stillschweigend vorausgesetzt wird, dass keiner dieser Abschnitte der Null gleich ist, dass also die Ebene nicht durch den Koordinatenanfang geht.

Schafft man aus der obigen Gleichung die Brüche weg, so erhält man eine neue Gleichung von der Form

$$2) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

von welcher auch direkt gezeigt werden kann, dass sie eine Ebene charakterisiert. Es bedarf hierzu nur des Nachweises, dass eine Gerade, welche zwei Punkte mit der durch vorstehende Gleichung bestimmten Fläche gemein hat, ganz in sie hinein fällt. Für zwei auf der Fläche liegende Punkte $x_1y_1z_1$ und $x_2y_2z_2$ hat man zunächst

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = D,$$

aus welchen Gleichungen die nachstehenden folgen:

$$3) \qquad \begin{cases} A + B\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C\dfrac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = 0, \\[2ex] \dfrac{B(x_2y_1 - x_1y_2) + C(x_2z_1 - x_1z_2)}{x_2 - x_1} = D. \end{cases}$$

Verbindet man ferner die Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ durch eine Gerade, so gelten für irgend einen dritten Punkt $x_3 y_3 z_3$ derselben die Gleichungen (§ 7, Nr. 5)

$$y_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_3 + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1},$$

$$z_3 = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} x_3 + \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 - x_1};$$

diese führen zu der Relation

$$A x_3 + B y_3 + C z_3 = \left(A + B \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\right) x_3$$
$$+ \frac{B(x_2 y_1 - x_1 y_2) + C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{x_2 - x_1},$$

d. i unter Rücksicht auf die Gleichungen 3)

$$A x_3 + B y_3 + C z_3 = D.$$

Jeder beliebige Punkt $x_3 y_3 z_3$ der von $x_1 y_1 z_1$ nach $x_2 y_2 z_2$ gehenden Geraden liegt demnach auf derselben Fläche wie jene zwei Punkte, d. h. die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte der Fläche fällt ganz in die letztere, was bei der Ebene und nur bei dieser stattfindet.

Setzt man in Nr. 2) eine der Koordinaten x, y, z gleich Null, so wird daraus eine Gleichung zwischen den Koordinaten solcher Punkte, die gleichzeitig der Ebene und einer der Koordinatenebenen angehören; man erhält so die Gleichungen derjenigen Geraden, in welchen die Ebene die Koordinatenebenen schneidet, d. i. die Gleichungen der sogenannten S p u r e n der Ebene. Sie lauten der Reihe nach für die xy-, xz- und yz-Spur:

4) $\quad Ax + By = D, \quad Ax + Cz = D, \quad By + Cz = D;$

zwei von diesen drei Spuren bestimmen die Ebene gleichfalls, weil hierdurch die vier Grössen A, B, C, D bekannt werden.*

---

* Die deskriptive Geometrie, welche ihrer Natur nach Punkte im Raume nicht unmittelbar auffassen kann, benutzt die Spuren der Ebene zur graphischen Darstellung der letzteren; will man daher eine Konstruktion der deskriptiven Geometrie mittels der Rechnung verfolgen (z. B. um die Übereinstimmung zwischen der deskriptiven und analytischen Behandlung einer Aufgabe nachzuweisen), so hat man jede vorkommende Ebene nicht durch eine Gleichung von der Form

$$Ax + By + Cz = D,$$

sondern durch zwei Spurengleichungen, etwa

$$Ax + By = D \quad \text{und} \quad Ax + Cz = D$$

auszudrücken. Diese Modifikation des Kalküls ist übrigens so leicht, dass es dazu keiner Beispiele bedürfen wird.

Lässt man in der Gleichung der Ebene zwei Koordinaten zu Null werden, so erhält man ihren Durchschnitt mit einer der Koordinatenachsen; für $y = 0$ und $z = 0$ ergiebt sich z. B.

$$Ax = D \quad \text{oder} \quad x = \frac{D}{A},$$

und hier ist $\frac{D}{A}$ die Strecke, welche die Ebene von der x-Achse abschneidet. In ähnlicher Weise sind $\frac{D}{B}$ und $\frac{D}{C}$ die Abschnitte auf den Achsen der y und z, wie man auch durch Vergleichung mit Nr. 1) bestätigen kann.

Diese allgemeinen Ergebnisse erleiden unter Umständen einige Modifikationen. Ist keine der Grössen A, B, C, D gleich Null, so kann die Gleichung 2) durch D dividiert und unter der etwas einfacheren Form

$$5) \qquad A'x + B'y + C'z = 1$$

$$\left(A' = \frac{A}{D}, \quad B' = \frac{B}{D}, \quad C' = \frac{C}{D}\right)$$

dargestellt werden; die Gleichungen der Spuren lauten dann

$$6) \quad A'x + B'y = 1, \quad A'x + C'z = 1, \quad B'y + C'z = 1,$$

und die auf den Achsen gebildeten Abschnitte sind die reciproken Werte von A', B', C'. Verschwindet eine der Grössen A, B, C, D, und zunächst D, so geht die zur Gleichung

$$Ax + By + Cz = 0$$

gehörende Ebene durch den Anfangspunkt der Koordinaten, weil die Werte $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ der Gleichung genügen; nicht selten giebt man in diesem Falle der Gleichung die Form

$$7) \qquad z = A''x + B''y.$$

Ist $C = 0$, so wird aus der allgemeinen Gleichung die folgende

$$Ax + By = D, \quad (z \text{ beliebig})$$

oder

$$A'x + B'y = 1;$$

der auf der z-Achse gebildete Abschnitt hat die Grösse $\frac{D}{0} = \infty$, und mithin ist die Ebene parallel zur Achse der z; für $B = 0$ erhält man entsprechend eine Ebene parallel zur y-Achse, für $A = 0$ eine Parallelebene zur x-Achse. In dem Falle, wo die zwei Koeffizienten C und D verschwinden, wird die Gleichung

$$Ax + By = 0$$

durch $x = 0$, $y = 0$, sowie durch jedes beliebige z befriedigt, woraus folgt, dass die Ebene die z-Achse in sich enthält. Liegt dagegen die y-Achse in der Ebene, so lautet die Gleichung der letzteren ($B = 0$, $D = 0$)

$$Ax + Cz = 0,$$

enthält sie die x-Achse, so ist $A = 0$ und $D = 0$, mithin

$$By + Cz = 0.$$

Sind zwei der Koeffizienten A, B, C gleich Null, wie z. B. in

$$Ax = D,$$

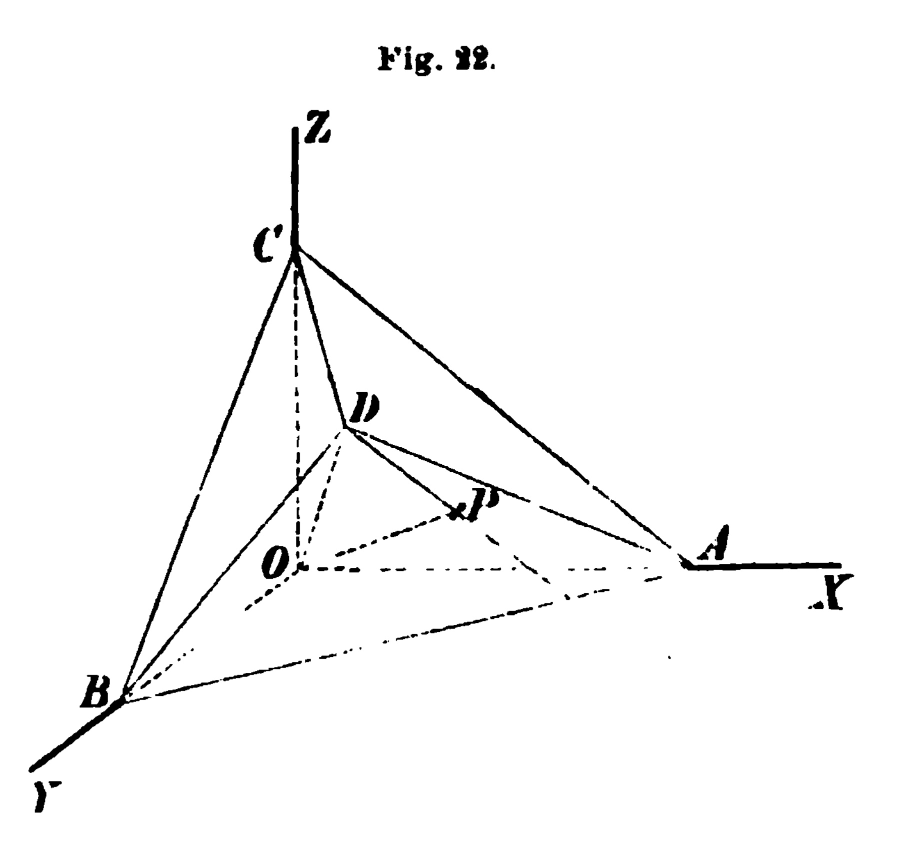
so bleiben y und z beliebig, mithin ist die Ebene parallel der yz-Ebene und von ihr entfernt um $\frac{D}{A}$; in gleicher Weise würden

$$By = D, \quad Cz = D$$

Parallelebenen zu den Ebenen xz, resp. xy bedeuten. Für $D = 0$ reduzieren sich die letzten drei Gleichungen auf $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und charakterisieren der Reihe nach die Koordinatenebenen yz, xz, xy.

Die Gleichung der Ebene kann man auch auf andere und zwar auf die Weise erhalten, dass man sich die Ebene nicht durch gleitende, sondern durch drehende Bewegung einer Geraden entstanden denkt. Ist nämlich OD eine der Grösse und Lage nach gegebene Gerade und DP eine darauf senkrechte Gerade von unbestimmter Länge (Fig. 22), so beschreibt letztere eine Ebene, wenn der rechte Winkel ODP um den festgehaltenen Schenkel OD herumgedreht wird. Um dies analytisch auszudrücken, bezeichnen wir die Länge OD mit d, die Winkel DOX, DOY, DOZ der Reihe nach mit α, β, γ und nennen x, y, z die Koordinaten, r den Radiusvektor eines auf der Ebene willkürlich gewählten Punktes P, und setzen endlich $\angle POX = \varphi$, $\angle POY = \psi$, $\angle POZ = \chi$, $\angle DOP = \omega$. Da nach dem Vorigen DP immer senkrecht auf OD steht, so ist

Fig. 22.



$$r \cos \omega = d,$$

oder, wenn ω aus den Winkeln α, β, γ, φ, ψ, χ berechnet wird,

$$r(\cos \alpha \cos \varphi + \cos \beta \cos \psi + \cos \gamma \cos \chi) = d.$$

Nach Substitution der Werte

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \cos \psi = \frac{y}{r}, \quad \cos \chi = \frac{z}{r}$$

wird hieraus

$$8) \qquad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = d.$$

Die Winkel α, β, γ, welche die Richtungswinkel einer auf der Ebene errichteten Normalen sind, nennen wir die Stellungswinkel der Ebene; die Gleichung 8) ist hiernach die Gleichung einer Ebene, welche nicht durch ihre Achsenabschnitte oder Spuren, sondern durch ihren Abstand vom Koordinatenanfange und durch ihre Stellungswinkel bestimmt ist.

Wenn die Ebene nicht durch den Koordinatenanfang geht, so hat d einen von Null verschiedenen Wert, und dann lässt sich die Gleichung 8) durch d dividieren; die so entstehende Gleichung

$$9) \qquad \frac{\cos \alpha}{d} x + \frac{\cos \beta}{d} y + \frac{\cos \gamma}{d} z = 1$$

stimmt in ihrer Form überein mit Nr. 5) oder der gleichgeltenden

$$10) \qquad \frac{A}{D} x + \frac{B}{D} y + \frac{C}{D} z = 1.$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten von x, y, z in 9) und 10) erhält man ferner

$$11) \qquad \frac{\cos \alpha}{d} = \frac{A}{D}, \quad \frac{\cos \beta}{d} = \frac{B}{D}, \quad \frac{\cos \gamma}{d} = \frac{C}{D},$$

oder, wenn man beachtet, dass $\frac{D}{A}$, $\frac{D}{B}$, $\frac{D}{C}$ die Achsenabschnitte a, b, c sind,

$$a \cos \alpha = b \cos \beta = c \cos \gamma = d.$$

Dieselben Gleichungen findet man auch unmittelbar durch Betrachtung der bei D rechtwinkligen Dreiecke ADO, BDO, CDO.

Quadriert und addiert man die Gleichungen 11) und beachtet dabei die Relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

so gelangt man zu der Formel

$$12)\qquad d = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

See p61, lines 7–8

und nachher geben die Gleichungen 11):

$$13)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\beta = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{cases}$$

Wenn die Ebene durch den Koordinatenanfang geht, so muss ihre Gleichung $Ax + By + Cz = D$ auch für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ richtig bleiben, mithin $D = 0$ sein; gleichzeitig ist dann auch $d = 0$. Für $D = 0$ giebt aber die Formel 12) $d = 0$, folglich behält die genannte Formel in diesem Falle ihre Giltigkeit. Denkt man sich ferner zu einer durch den Koordinatenanfang gehenden Ebene eine Parallelebene gelegt, so hat letztere zwar ein anderes d, mithin auch ein anderes D, aber die nämlichen Stellungswinkel α, β, γ; in der That bleiben die Formeln 13) für beide Ebenen dieselben, weil D nicht darin vorkommt. Mit anderen Worten, die Formeln 12) und 13) gelten für alle Ebenen.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass die Stellungswinkel einer Ebene zugleich deren Neigungswinkel gegen die Koordinatenebenen sind. Da nämlich zwei Gerade denselben Winkel miteinander einschliessen wie zwei auf jenen Geraden senkrechte Ebenen, so ist α gleich dem Neigungswinkel der Ebene ABC gegen die Ebene yz, aus demselben Grunde β gleich dem Winkel zwischen ABC und der xz-Ebene, und γ gleich dem Winkel zwischen ABC und der xy-Ebene.

§ 11.

Verschiedene Lagen eines Punktes gegen eine Ebene.

Die lineare Funktion der Koordinaten

$$1)\qquad Ax + By + Cz - D,$$

die wir abkürzend mit T bezeichnen wollen, erhält den Wert Null für die Koordinaten einer bestimmten Ebene. Bei jeder anderen Lage des Punktes kann die Gleichung $T = 0$ nicht bestehen und es muss daher für einen ausserhalb der Ebene gelegenen Punkt

xyz die Funktion T einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Wert besitzen. Um zu entscheiden, in welchen Fällen das positive und in welchen das negative Zeichen zum Vorschein kommt, stellen wir die folgende Betrachtung an.

Ausserhalb der durch die Gleichung 1) repräsentierten Ebene denken wir uns zwei beliebige Punkte P_1, P_2 und diese durch eine Gerade verbunden; nennen wir $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ die Koordinaten jener Punkte, so sind nach § 7, Nr. 5) die Gleichungen der Verbindungslinie

$$2)\quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}, \quad z = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\, x + \frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 - x_1}.$$

Diese Gerade schneidet die Ebene in einem Punkte P_0, dessen Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ durch die Bemerkung gefunden werden, dass der Punkt P_0 gleichzeitig der Ebene und der Geraden angehört, dass folglich seine Koordinaten jeder der drei Gleichungen 1) und 2) genügen müssen; schreiben wir also in den letzteren x_0, y_0, z_0 für x, y, z, so haben wir drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten x_0, y_0, z_0; für die erste, die zu unserem Zwecke allein nötig ist, erhalten wir

$$3)\quad x_0 = \frac{D(x_2 - x_1) - B(x_2 y_1 - x_1 y_2) - C(x_2 z_1 - x_1 z_2)}{A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)}.$$

Hinsichtlich der Lage von P_0 zu P_1 und P_2 sind nun zwei Fälle möglich; befinden sich nämlich P_1 und P_2 auf einer und derselben Seite der Ebene, so liegt P_0 ausserhalb der Strecke $P_1 P_2$, liegen aber P_1 und P_2 auf entgegengesetzten Seiten der Ebene, so fällt P_0 zwischen die Punkte P_1 und P_2. Ganz dasselbe gilt von den Projektionen der Punkte auf eine der Koordinatenachsen. Wählen wir zu letzterer die x-Achse, nennen der Reihe nach L_0, L_1, L_2 die Projektionen von P_0, P_1, P_2 auf OX, so ist $OL_0 = x_0$, $OL_1 = x_1$, $OL_2 = x_2$; bei der ersten (gleichstimmigen) Lage von P_1 und P_2, also auch von L_1 und L_2, haben die Strecken $L_0 L_1 = x_0 - x_1$ und $L_0 L_2 = x_0 - x_2$ gleiche Vorzeichen, bei der zweiten Lage entgegengesetzte Vorzeichen, so dass das Produkt

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

im ersten Falle positiv, im zweiten negativ ist. Ebenso leicht bewahrheitet sich der umgekehrte Satz, dass das positive Vorzeichen des vorstehenden Produktes die gleichstimmige, das negative die

entgegengesetzte Lage der Punkte P_1 und P_2 bedingt. Vermöge des vorhin angegebenen Wertes von x_0 findet man nun, wenn zur Abkürzung

$$A + B\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} = N$$

gesetzt wird,

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) = \frac{(Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 - D)}{N^2},$$

und daraus ergiebt sich, dass das im Zähler stehende Produkt positiv oder negativ ist, jenachdem die Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ auf gleichen oder verschiedenen Seiten der Ebene liegen. Demzufolge haben die beiden Ausdrücke

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D \quad \text{und} \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 - D$$

im ersten Falle gleiche, im zweiten entgegengesetzte Vorzeichen. Um auch über letzteres unzweideutig zu entscheiden, wollen wir die in der Gleichung der Ebene vorkommende Grösse D immer als positiv betrachten, was ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit jederzeit möglich ist, weil im Falle eines negativen D die Gleichung 1) mit (-1) multipliziert werden kann; für den Anfangspunkt der Koordinaten, als Punkt $x_1 y_1 z_1$ genommen, haben wir dann $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, mithin

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 - D = -D, \quad \text{mithin negativ;}$$

besitzt nun der dem zweiten Punkte $x_2 y_2 z_2$ entsprechende Ausdruck

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 - D$$

dasselbe, also negative Vorzeichen, so liegt der Punkt $x_2 y_2 z_2$ auf derselben Seite der Ebene wie der Koordinatenanfang, ist aber die obige Differenz positiv, so fällt der Punkt auf die entgegengesetzte Seite. Bei Weglassung der ferner nicht nötigen Indices können wir das Endresultat in dem Satze zusammenfassen: jenachdem der Ausdruck

$$T = Ax + By + Cz - D,$$

worin D positiv sein muss, negativ, gleich Null, oder positiv ist, liegt der Punkt xyz ausserhalb der Ebene

$$Ax + By + Cz - D = 0,$$

und zwar auf der Seite des Koordinatenanfangs, oder in der Ebene selbst, oder ausser ihr auf der dem Koordinatenanfange abgewandten Seite.

Der Wert, den die Funktion T für irgend einen nicht auf der Ebene enthaltenen Punkt annimmt, hat eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Um diese zu erkennen, wollen wir zunächst die Funktion T in der Form voraussetzen

$$T = \cos\alpha\,.\,x + \cos\beta\,.\,y + \cos\gamma\,.\,z - d,$$

so dass also $T = 0$ die Gleichung der Ebene ist, deren Stellungswinkel α, β, γ sind und die vom Koordinatenanfange den immer positiv zu rechnenden Abstand d hat.

Die Ebene $T' = 0$, welche durch einen beliebigen Punkt $x_1 y_1 z_1$ parallel zu $T = 0$ gelegt werden kann, hat Stellungswinkel $\alpha'\beta'\gamma'$, die der Reihe nach gleich $\alpha\beta\gamma$ oder um 180^0 davon verschieden sind, jenachdem der Anfangspunkt ausserhalb der von $T = 0$ und $T' = 0$ begrenzten Schicht liegt oder innerhalb derselben. Bezeichnet d' den Abstand des Anfangspunktes von $T' = 0$, so ist daher in den beiden Fällen

$$T' = \cos\alpha\,.\,x + \cos\beta\,.\,y + \cos\gamma\,.\,z - d',$$

bez.

$$T' = -\cos\alpha\,.\,x - \cos\beta\,.\,y - \cos\gamma\,.\,z - d'.$$

Da nun der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf $T' = 0$ liegen soll, so muss diese Gleichung von den Koordinaten $x_1 y_1 z_1$ erfüllt werden, daher ergiebt sich für d' die Bedingung

$$\cos\alpha\,.\,x_1 + \cos\beta\,.\,y_1 + \cos\gamma\,.\,z_1 - d' = 0,$$

bez.

$$-\cos\alpha\,.\,x_1 - \cos\beta\,.\,y_1 - \cos\gamma\,.\,z_1 - d' = 0,$$

woraus folgt

$$d' = \cos\alpha\,.\,x_1 + \cos\beta\,.\,y_1 + \cos\gamma\,.\,z_1,$$

bez.

$$d' = -\cos\alpha\,.\,x_1 - \cos\beta\,.\,y_1 - \cos\gamma\,.\,z_1.$$

Der Abstand q der Ebenen $T = 0$ und $T' = 0$ ist

$$q = d - d', \text{ bez. } q = d + d',$$

und ergiebt sich daher, wenn man den soeben bestimmten Wert von d' einsetzt, in beiden Fällen zu

$$4)\qquad q = -(\cos\alpha\,.\,x_1 + \cos\beta\,.\,y_1 + \cos\gamma\,.\,z_1 - d).$$

Derselbe ist positiv, wenn der Anfangspunkt ausserhalb der von $T = 0$ und $T' = 0$ begrenzten Schicht liegt und $d' < d$ ist, sowie dann, wenn der Ursprung im Innern dieser Schicht liegt, also, wenn man beide Bemerkungen zusammenfasst, stets dann, wenn der Anfangspunkt und der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf derselben Seite von $T = 0$ gelegen sind. Wir haben daher den Satz:

Die lineare Funktion

$$T \equiv \cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z - d$$

verschwindet für alle Punkte der Ebene, welche die Stellungswinkel $\alpha\beta\gamma$ hat und um d vom Anfangspunkte absteht; für jeden andern nicht auf $T = 0$ enthaltenen Punkt ist der Wert der Funktion T dem Abstande q des Punktes xyz von der Ebene $T = 0$ entgegengesetzt gleich, wobei ein positives oder negatives Zeichen von q anzeigt, ob der Punkt P mit dem Anfangspunkte auf derselben Seite von $T = 0$ liegt oder nicht. Wegen dieser Eigenschaft bezeichnet man

$$\cos\alpha \,.\, x + \cos\beta \,.\, y + \cos\gamma \,.\, z - d = 0$$

als die **Normalform der Ebenengleichung.**

Ist eine Ebenengleichung in der allgemeinen Form gegeben

$$Ax + By + Cz - D = 0,$$

worin wieder D als positiv vorausgesetzt werden soll, so kann man diese in die Normalform überführen, indem man von den Formeln § 10, Nr. 12) und 13) Gebrauch macht. Versteht man unter $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ den positiven Wert dieser Quadratwurzel, so ist die Normalform

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (Ax + By + Cz - D) = 0.$$

Der Abstand q eines Punktes xyz von dieser Ebene ist daher

$$5) \qquad q = -\frac{Ax + By + Cz - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Beispiele. I. Sind

$$T_1 \equiv \cos\alpha_1 \,.\, x + \cos\beta_1 \,.\, y + \cos\gamma_1 \,.\, z - d_1 = 0$$

und

$$T_2 \equiv \cos\alpha_2 \,.\, x + \cos\beta_2 \,.\, y + \cos\gamma_2 \,.\, z - d_2 = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen in Normalform, so hat ein Punkt xyz gleiche Abstände von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, wenn für seine Koordinaten

$$T_1 = T_2,$$

und entgegengesetzt gleiche, wenn

$$T_1 = -T_2$$

ist. Die Gleichungen

$$6) \qquad T_1 - T_2 = 0 \quad \text{bez.} \quad T_1 + T_2 = 0$$

stellen daher den geometrischen Ort der Punkte dar, deren Abstände von den Ebenen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ gleich, bez. entgegen-

gesetzt gleich sind, d. i. es sind die Gleichungen der Ebenen, welche die Winkel der Ebenen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ halbieren.

II. Haben die Abstände eines Punktes xyz von den Ebenen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ das gegebene Verhältnis $n_1 : n_2$, so gilt für die Koordinaten xyz die Proportion

$$T_1 : T_2 = n_1 : n_2,$$

daher besteht für den Punkt xyz die Gleichung

$$7) \qquad T \equiv n_2 T_1 - n_1 T_2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer bestimmten Ebene; sie wird von allen Punkten erfüllt, für welche T_1 und T_2 einzeln verschwinden, d. i. von allen Punkten der Schnittlinie der beiden gegebenen Ebenen. Die Punkte, deren Abstände von zwei gegebenen Ebenen ein bestimmtes Verhältnis haben, liegen daher auf einer bestimmten Ebene, welche die Schnittlinie der gegebenen Ebenen enthält.

Hat das Verhältnis $n_1 : n_2$ einen positiven Wert, so teilt $T = 0$ den Winkel von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, in welchem der Ursprung liegt, ist $n_1 : n_2$ negativ, so teilt $T = 0$ das den Ursprung nicht enthaltende Scheitelwinkelpaar.

§ 12.

Bestimmung der Ebene durch drei Punkte.

Wenn eine Ebene, deren Gleichung

$$1) \qquad A'x + B'y + C'z = 1$$

sein möge, durch drei gegebene Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$, $f_3 g_3 h_3$ gehen soll, so muss ihre Gleichung von den Koordinaten der genannten Punkte befriedigt werden; man hat daher zur Bestimmung von A', B', C' die drei Gleichungen

$$2) \qquad \begin{cases} A'f_1 + B'g_1 + C'h_1 = 1, \\ A'f_2 + B'g_2 + C'h_2 = 1, \\ A'f_3 + B'g_3 + C'h_3 = 1. \end{cases}$$

Durch Auflösung derselben erhält man für A', B', C' folgende Werte:

$$A' = \frac{(g_2 h_3 - g_3 h_2) + (g_3 h_1 - g_1 h_3) + (g_1 h_2 - g_2 h_1)}{f_1 (g_2 h_3 - g_3 h_2) + f_2 (g_3 h_1 - g_1 h_3) + f_3 (g_1 h_2 - g_2 h_1)},$$

$$B' = \frac{(h_2 f_3 - h_3 f_2) + (h_3 f_1 - h_1 f_3) + (h_1 f_2 - h_2 f_1)}{g_1 (h_2 f_3 - h_3 f_2) + g_2 (h_3 f_1 - h_1 f_3) + g_3 (h_1 f_2 - h_2 f_1)},$$

$$C' = \frac{(f_2 g_3 - f_3 g_2) + (f_3 g_1 - f_1 g_3) + (f_1 g_2 - f_2 g_1)}{h_1 (f_2 g_3 - f_3 g_2) + h_2 (f_3 g_1 - f_1 g_3) + h_3 (f_1 g_2 - f_2 g_1)};$$

die Nenner dieser drei Brüche sind gleich und hier nur in verschiedenen Formen angegeben worden, um die regelmässige Bildung der Ausdrücke hervortreten zu lassen. Durch Substitution der obigen Werte in die Gleichung 1) und bei Wegschaffung der Brüche ergiebt sich nun als Gleichung der verlangten Ebene:

$$3)\quad \begin{cases} [(g_2h_3 - g_3h_2) + (g_3h_1 - g_1h_3) + (g_1h_2 - g_2h_1)]\,x \\ + [(h_2f_3 - h_3f_2) + (h_3f_1 - h_1f_3) + (h_1f_2 - h_2f_1)]\,y \\ + [(f_2g_3 - f_3g_2) + (f_3g_1 - f_1g_3) + (f_1g_2 - f_2g_1)]\,z \\ = f_1(g_2h_3 - g_3h_2) + f_2(g_3h_1 - g_1h_3) + f_3(g_1h_2 - g_2h_1). \end{cases}$$

In speziellen Fällen vereinfacht sich diese Gleichung oft bedeutend; ist z. B. $f_3 = g_3 = h_3 = 0$, so bleibt

$$4)\quad (g_1h_2 - g_2h_1)\,x + (h_1f_2 - h_2f_1)\,y + (f_1g_2 - f_2g_1)\,z = 0$$

als Gleichung der Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Koordinaten und ausserdem durch die Punkte $f_1g_1h_1$, $f_2g_2h_2$ geht.

Für $g_1 = h_1 = f_2 = h_2 = f_3 = g_3 = 0$ ergiebt sich

$$g_2h_3x + h_3f_1y + f_1g_2z = f_1g_2h_3$$

oder

$$\frac{x}{f_1} + \frac{y}{g_2} + \frac{z}{h_3} = 1$$

als Gleichung einer Ebene, welche auf den Koordinatenachsen der Reihe nach die Strecken f_1, g_2, h_3 abschneidet; dieses Resultat stimmt in der Hauptsache mit der Gleichung 1) des vorigen Paragraphen überein.

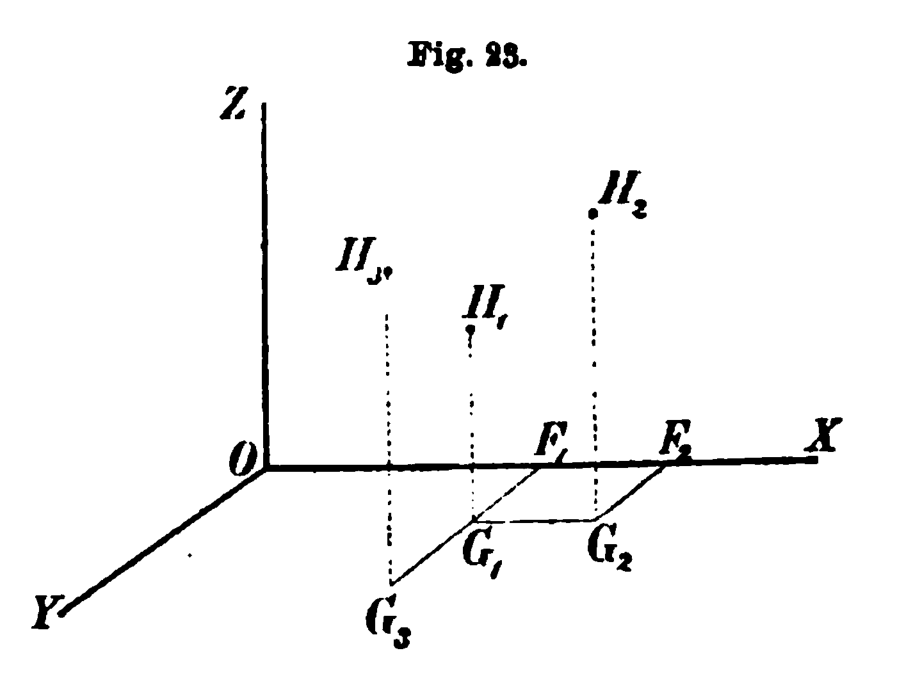


Fig. 23.

Bemerkenswert ist auch der spezielle Fall, wo die Punkte $f_1g_1h_1$ und $f_2g_2h_2$ in einer Ebene $//xz$, und zugleich $f_1g_1h_1$ und $f_3g_3h_3$ in einer Ebene $//yz$ liegen, wie dies Fig. 23 zeigt. Man hat unter dieser Voraussetzung $g_2 = F_2G_2 = F_1G_1 = g_1$, $f_3 = OF_1 = f_1$, mithin nach Formel 3):

$$-(g_3 - g_1)(h_2 - h_1)\,x - (f_2 - f_1)(h_3 - h_1)\,y + (f_2 - f_1)(g_3 - g_1)\,z$$
$$= -(g_3 - g_1)(h_2 - h_1)f_1 - (f_2 - f_1)(h_3 - h_1)g_1 + (f_2 - f_1)(g_3 - g_1)h_1$$

oder einfacher

$$5)\quad -\frac{h_2-h_1}{f_2-f_1}(x-f_1)-\frac{h_3-h_1}{g_3-g_1}(y-g_1)+z-h_1=0.$$

Wenn die Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und $f_3 g_3 h_3$ in einer Geraden liegen, so sind unendlich viel Ebenen durch dieselben möglich; dies zeigen auch die Gleichungen 2), sobald man ihnen die folgenden Formen erteilt:

$$A' f_1 + B' g_1 + C' h_1 = 1,$$
$$A' + B' \frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1} + C' \frac{h_3 - h_1}{f_3 - f_1} = 0,$$
$$A' + B' \frac{g_3 - g_2}{f_3 - f_2} + C' \frac{h_3 - h_2}{f_3 - f_2} = 0.$$

Unter der gemachten Voraussetzung ist nämlich nach § 7 Gleichung 7)

$$\frac{g_3 - g_1}{f_3 - f_1} = \frac{g_3 - g_2}{f_3 - f_2}, \quad \frac{h_3 - h_1}{f_3 - f_1} = \frac{h_3 - h_2}{f_3 - f_2},$$

die beiden letzten der obigen Gleichungen werden jetzt identisch und man hat nur noch zwei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten A', B', C'.

Die Gleichung 3) lehrt auch die Bedingung kennen, unter welcher vier gegebene Punkte $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$, $f_3 g_3 h_3$, $f_4 g_4 h_4$ in einer Ebene liegen. Dazu ist nämlich erforderlich, dass der vierte Punkt in der Ebene liegt, welche durch die ersten drei Punkte bestimmt wird; die gesuchte Bedingung lautet demnach:

$$6)\quad \begin{cases} [(g_2 h_3 - g_3 h_2) + (g_3 h_1 - g_1 h_3) + (g_1 h_2 - g_2 h_1)] f_4 \\ + [(h_2 f_3 - h_3 f_2) + (h_3 f_1 - h_1 f_3) + (h_1 f_2 - h_2 f_1)] g_4 \\ + [(f_2 g_3 - f_3 g_2) + (f_3 g_1 - f_1 g_3) + (f_1 g_2 - f_2 g_1)] h_4 \\ = f_1 (g_2 h_3 - g_3 h_2) + f_2 (g_3 h_1 - g_1 h_3) + f_3 (g_1 h_2 - g_2 h_1). \end{cases}$$

§ 13.

Die Gerade in der Ebene.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Gerade in einer gleichfalls gegebenen Ebene liegt oder nicht, bedarf es nur der Untersuchung, ob irgend zwei Punkte der Geraden in die Ebene fallen oder nicht. Bei der Willkürlichkeit dieser Punkte kann man sich jene Untersuchung dadurch erleichtern, dass man die Spuren der Geraden betrachtet; jenachdem dieselben in die gleichnamigen Spuren der Ebene fallen oder nicht, liegt die Gerade in der Ebene oder ausser ihr. Ist nun

1) $$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der Ebene, so sind der Reihe nach

$$Ax + By = D, \quad Ax + Cz = D,$$
$$By + Cz = D$$

die Gleichungen ihrer xy-, xz- und yz-Spur; bezeichnen wir ferner mit

2) $$y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so haben wir als Koordinaten ihrer in gleicher Ordnung genommenen Spuren

$$x' = -\frac{c_1}{C_1}, \quad y' = b_1 - \frac{B_1 c_1}{C_1}; \quad x'' = -\frac{b_1}{B_1}, \quad z'' = c_1 - \frac{C_1 b_1}{B_1};$$
$$y''' = b_1, \quad z''' = c_1.$$

Der Punkt $x'y'$ liegt nun in der xy-Spur der Ebene, wenn

3) $$-A\frac{c_1}{C_1} + B\left(b_1 - \frac{B_1 c_1}{C_1}\right) = D,$$

ferner liegt $x''z''$ in der xz-Spur der Ebene, wenn

4) $$-A\frac{b_1}{B_1} + C\left(c_1 - \frac{C_1 b_1}{B_1}\right) = D,$$

endlich $y'''z'''$ in der yz-Spur der Ebene, wenn

5) $$Bb_1 + Cz_1 = D.$$

Finden von diesen Gleichungen zwei statt, so ist die Gerade in der Ebene enthalten und die dritte Gleichung eine Folge der beiden anderen. Durch Subtraktion der Gleichung 4) von 5) ergiebt sich noch

6) $$A + BB_1 + CC_1 = 0$$

und diese Gleichung kann in Verbindung mit Nr. 5) zum Ersatz für die früheren Gleichungen dienen; durch Elimination von C aus 5) und 6) erhält man nämlich die Gleichung 3), durch Elimination von B die Gleichung 4). Die Gleichungen 5) und 6) enthalten demnach die Bedingungen, unter welchen die Gerade in der Ebene liegt.

Dasselbe Resultat kann man leicht auf rein analytischem Wege finden. Jeder Punkt der Geraden muss nämlich ein Punkt der Ebene sein, es ist folglich erlaubt, die Werte von y und z aus Nr. 2) in Nr. 1) zu substituieren; die letztere Gleichung erhält dadurch die Form

$$(A + BB_1 + CC_1)x + Bb_1 + Cc_1 = D$$

und sie muss nun für alle x gelten; dies ist aber nur möglich, wenn

7) $$A + BB_1 + CC_1 = 0 \quad \text{und} \quad Bb_1 + Cc_1 = D,$$

welche Bedingungen mit den früheren übereinstimmen.

Hieran knüpfen sich einige Aufgaben, betreffend die Bestimmung solcher Ebenen, die eine oder zwei gegebene Gerade enthalten sollen.

α. Ebene durch einen Punkt und eine gegebene Gerade. Sind f, g, h die Koordinaten des gegebenen Punktes,

8) $$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, endlich

9) $$A'x + B'y + C'z = 1$$

die Gleichung der verlangten Ebene, so hat man zur Bestimmung von A', B', C' die drei Gleichungen

$$A'f + B'g + C'h = 1,$$
$$A' + B'B_1 + C'C_1 = 0, \qquad B'b_1 + C'c_1 = 1,$$

aus denen jene Unbekannten leicht zu entwickeln sind. Etwas kürzer ist folgender Weg; man subtrahiert die erste der Bedingungsgleichungen von der Gleichung der Ebene (Nr. 9), dividiert überall mit A' und setzt zur Abkürzung

$$\frac{B'}{A'} = M, \qquad \frac{C'}{A'} = N,$$

die Gleichung der gesuchten Ebene ist dann

10) $$x - f + M(y - g) + N(z - h) = 0.$$

Durch Division mit A' ergiebt sich ferner aus der zweiten Bedingung die folgende

$$B_1 M + C_1 N = -1;$$

subtrahiert man endlich die erste Bedingungsgleichung von der letzten und dividiert wiederum durch A', so ist

$$(b_1 - g)M + (c_1 - h)N = f.$$

Die letzten zwei Gleichungen bestimmen M und N; nach Wegschaffung der Brüche erhält man aus Nr. 10):

11) $$\begin{cases} [B_1(c_1 - h) - C_1(b_1 - g)](x - f) \\ -(C_1 f + c_1 - h)(y - g) + (B_1 f + b_1 - g)(z - h) = 0 \end{cases}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene. Liegt der Punkt fgh in der gegebenen Geraden, ist also gleichzeitig

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

so werden die beiden für M und N angegebenen Gleichungen identisch und es bleibt daher eine dieser Grössen willkürlich, wie es die in diesem Falle vorhandene Unbestimmtheit der Aufgabe erfordert.

β. Ebene durch zwei Gerade. Wenn eine Ebene, deren Gleichung

$$12)\qquad A'x + B'y + C'z = 1$$

heissen möge, zwei durch die Gleichungen

$$13)\qquad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2 \end{cases}$$

gegebene Gerade in sich enthalten soll, so müssen die Koeffizienten A', B', C' den folgenden vier Gleichungen genügen:

$$A' + B_1 B' + C_1 C' = 0, \qquad b_1 B' + c_1 C' = 1,$$
$$A' + B_2 B' + C_2 C' = 0, \qquad b_2 B' + c_2 C' = 1.$$

Man kann hier zunächst B' und C' aus denjenigen zwei Gleichungen bestimmen, in denen A' nicht vorkommt, und findet:

$$B' = -\frac{c_1 - c_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1}, \qquad C' = +\frac{b_1 - b_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1};$$

die beiden übrigen Gleichungen liefern nachher zwei Werte von A', nämlich:

$$A' = \frac{B_1 (c_1 - c_2) - C_1 (b_1 - b_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1},$$
$$A' = \frac{B_2 (c_1 - c_2) - C_2 (b_1 - b_2)}{b_1 c_2 - b_2 c_1}.$$

Da A' nur einen Wert haben kann, so ist die Aufgabe unmöglich, wenn die beiden für A' gefundenen Ausdrücke verschieden sind, möglich dagegen, sobald jene Ausdrücke zusammenfallen. Das Letztere findet statt für

$$B_1 (c_1 - c_2) - C_1 (b_1 - b_2) = B_2 (c_1 - c_2) - C_2 (b_1 - b_2)$$

oder

$$14)\qquad (B_1 - B_2)(c_1 - c_2) = (C_1 - C_2)(b_1 - b_2),$$

d. h. wenn die Geraden sich entweder schneiden oder parallel laufen. Die vorstehende Bedingung ist identisch mit der schon früher (§ 8) erwähnten, nach welcher zwei Gerade in einer Ebene liegen oder nicht, jenachdem die obige Gleichung erfüllt oder nicht erfüllt ist. Das Bestehen der Gleichung 14) vorausgesetzt, haben wir als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$15)\quad [B_1(c_1 - c_2) - C_1(b_1 - b_2)]\,x - (c_1 - c_2)\,y + (b_1 - b_2)\,z = b_1 c_2 - b_2 c_1.$$

Ist $b_1 c_2 = b_2 c_1$, was geometrisch bedeutet, dass die Verbindungslinie der yz-Spuren $b_1 c_1$ und $b_2 c_2$ durch den Koordinatenanfang geht, so verschwindet die rechte Seite der obigen Gleichung und die Ebene beider Geraden geht dann gleichfalls durch den Anfangspunkt der Koordinaten.

§ 14.

Parallele Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Wenn eine Ebene und ausserhalb derselben eine Gerade gegeben sind, so kann man die Frage, ob die Gerade die Ebene schneidet oder ihr parallel ist, dadurch entscheiden, dass man durch irgend einen Punkt der Ebene eine Parallele zur Geraden legt; diese Parallele hat mit der Ebene entweder nur jenen einzigen Punkt oder alle Punkte gemein; im ersten Falle schneidet die Gerade die Ebene, im zweiten Falle ist sie ihr parallel, weil sie einer in der Ebene liegenden Geraden parallel läuft. Das genannte Kennzeichen drücken wir auf folgende Weise analytisch aus. Die Gleichung der Ebene sei

$$1)\quad Ax + By + Cz = D,$$

die Gleichungen der Geraden mögen heissen

$$2)\quad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1;$$

für irgend einen Punkt $x_0 y_0 z_0$ der gegebenen Ebene gilt die Gleichung

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D,$$

und wenn wir sie mit der Gleichung 1) durch Subtraktion verbinden, so ist

$$3)\quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

immer noch die Gleichung derselben Ebene, nur mit der Nebenbestimmung, dass letztere den Punkt $x_0 y_0 z_0$ enthält. Die Gleichungen einer durch diesen Punkt gehenden Parallelen zur gegebenen Geraden sind

$$4)\quad y - y_0 = B_1(x - x_0), \qquad z - z_0 = C_1(x - x_0)$$

und wenn die Parallele ganz in der Ebene liegen soll, so müssen die Koordinaten jedes ihrer Punkte sowohl den Gleichungen 4) als der Gleichung 3) genügen; dies giebt für jedes beliebige x

$$(A + BB_1 + CC_1)(x - x_0) = 0,$$

was nur möglich ist, wenn die Gleichung

$$5) \qquad A + BB_1 + CC_1 = 0$$

stattfindet; diese ist folglich die Bedingungsgleichung für die parallele Lage der Geraden gegen die Ebene.*

Hieran knüpfen sich einige Aufgaben über die Bestimmung einer Ebene, welche einer oder zwei gegebenen Geraden parallel sein soll.

α. Ebene durch zwei Punkte parallel einer Geraden. Die gegebenen Punkte mögen $f_1 g_1 h_1$, $f_2 g_2 h_2$ und die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$6) \qquad y = Bx + b, \qquad z = Cx + c$$

heissen; die Gleichung der gesuchten Ebene sei

$$7) \qquad Lx + My + Nz = 1.$$

Dass die Ebene durch jene zwei Punkte geht, wird ausgedrückt durch die beiden Gleichungen

$$Lf_1 + Mg_1 + Nh_1 = 1,$$
$$Lf_2 + Mg_2 + Nh_2 = 1;$$

die parallele Lage der Ebene und der Geraden liefert hierzu noch die Bedingung

$$L + MB + NC = 0,$$

und damit hat man drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten L, M und N. Man findet für sie die Werte:

$$L = \frac{B(h_1 - h_2) - C(g_1 - g_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)},$$

$$M = \frac{-(h_1 - h_2) + C(f_1 - f_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)},$$

$$N = \frac{+(g_1 - g_2) - B(f_1 - f_2)}{(g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1)};$$

---

* Die im vorigen Paragraphen unter Nr. 7) verzeichneten Bedingungen für den Fall, dass die Gerade in der Ebene liegt, erhalten durch das Obige eine sehr einfache Bedeutung. Von jenen zwei Bedingungsgleichungen sagt nämlich die erste, dass die Gerade parallel der Ebene ist, und die zweite, dass die yz-Spur der Geraden in der gleichnamigen Spur der Ebene liegt, dass also beide Gebilde einen Punkt gemein haben; diese Bedingungen sind zusammen nur von einer in der Ebene enthaltenen Geraden erfüllt.

durch Substitution in Nr. 7) und Wegschaffung der Brüche ergiebt sich:

$$8)\quad \begin{cases} [B(h_1 - h_2) - C(g_1 - g_2)]\,x \\ -\,[h_1 - h_2 - C(f_1 - f_2)]\,y + [g_2 - g_2 - B(f_1 - f_2)]\,z \\ = (g_1 - Bf_1)(h_2 - Cf_2) - (g_2 - Bf_2)(h_1 - Cf_1) \end{cases}$$

als Gleichung der gesuchten Ebene.

β. Ebene durch eine Gerade parallel einer zweiten Geraden. Die beiden gegebenen Geraden mögen durch die Gleichungen

$$9)\quad \begin{cases} y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1, \\ y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2, \end{cases}$$

bestimmt sein; die Gleichung der gesuchten Ebene heisse

$$10)\quad Lx + My + Nz = 1.$$

Soll diese Ebene die erste Gerade in sich enthalten, so müssen die Bedingungen

$$L + B_1 M + C_1 N = 0, \qquad b_1 M + c_1 N = 1$$

erfüllt sein, und wenn sie ausserdem der zweiten Geraden parallel liegen soll, so gehört dazu

$$L + B_2 M + C_2 N = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich für die Unbekannten L, M, N die Werte:

$$L = \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{b_1 (C_1 - C_2) - c_1 (B_1 - B_2)},$$

$$M = \frac{C_1 - C_2}{b_1 (C_1 - C_2) - c_1 (B_1 - B_2)},$$

$$N = \frac{-(B_1 - B_2)}{b_1 (C_1 - C_2) - c_1 (B_1 - B_2)};$$

durch Substitution dieser Ausdrücke erhält man aus Nr. 10)

$$11)\quad \begin{cases} (B_1 C_2 - B_2 C_1)\,x + (C_1 - C_2)\,y - (B_1 - B_2)\,z \\ = b_1 (C_1 - C_2) - c_1 (B_1 - B_2) \end{cases}$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

γ. Ebene durch einen Punkt parallel zwei Geraden. Bezeichnen wir die Koordinaten des gegebenen Punktes mit f, g, h, die Gleichungen der gegebenen Geraden und der gesuchten Ebene wie vorhin, so haben wir zur Bestimmung der Unbekannten L, M, N die Gleichungen:

$$Lf + Mg + Nh = 1,$$
$$L + B_1 M + C_1 N = 0,$$
$$L + B_2 M + C_2 N = 0.$$

Die Ermittelung von L, M, N bietet hiernach keine Schwierigkeit und mag unterbleiben, weil sich die Rechnung eleganter auf folgende Weise führen lässt. Wir ziehen die Bedingungsgleichung von der Gleichung der Ebene ab, dividieren mit L und setzen zur Abkürzung

$$\frac{M}{L} = P, \quad \frac{N}{L} = Q;$$

die Gleichung der Ebene lautet dann

12) $$x - f + P(y - g) + Q(z - h) = 0.$$

Die übrigen Bedingungsgleichungen dividieren wir gleichfalls durch L und haben dann zur Bestimmung von P und Q die Gleichungen

$$1 + B_1 P + C_1 Q = 0,$$
$$1 + B_2 P + C_2 Q = 0,$$

aus denen sich die Werte ergeben

$$P = \frac{C_1 - C_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}, \quad Q = -\frac{B_1 - B_2}{B_1 C_2 - B_2 C_1}.$$

Durch Substitution derselben in Nr. 12) erhalten wir nach Wegschaffung der Brüche

13) $$(B_1 C_2 - B_2 C_1)(x - f) + (C_1 - C_2)(y - g) - (B_1 - B_2)(z - h) = 0$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

§ 15.

Senkrechte Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Wenn eine Ebene, deren Gleichung

1) $$Ax + By + Cz = D$$

heissen möge, normal zu einer durch die Gleichungen

2) $$y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

bestimmten Geraden liegen soll, so müssen die Stellungswinkel der Ebene, d. h. die Winkel α, β, γ der Reihe nach dieselben sein, wie die Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1 der Geraden. Demgemäss gelten für die genannte Lage die Bedingungen

3) $$\cos\alpha = \cos\alpha_1, \quad \cos\beta = \cos\beta_1, \quad \cos\gamma = \cos\gamma_1$$

oder

$$4)\quad \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}, \\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}, \\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}}. \end{cases}$$

Da schon zwei Richtungswinkel hinreichen, um die Lage einer Geraden zu bestimmen, so ist jede der drei vorstehenden Gleichungen eine Folge der beiden übrigen, und eben deshalb braucht man nur zwei derselben beizubehalten. Dies geschieht am einfachsten, wenn man die zweite und dritte Gleichung durch die erste dividiert; es wird dann

$$5)\quad \frac{B}{A} = B_1, \quad \frac{C}{A} = C_1,$$

und in der That zeigt sich, dass die Gleichungen 4) erfüllt sind, wenn $B_1 = \frac{B}{A}$ und $C_1 = \frac{C}{A}$ gesetzt wird.

Die erste der Gleichungen 5) ist, wie man leicht findet, die Bedingung dafür, dass die beiden in der xy-Ebene liegenden Geraden

$$Ax + By = D \quad \text{und} \quad y = B_1 x + b_1$$

aufeinander senkrecht stehen; ebenso bedingt die zweite Gleichung in Nr. 5) die gegenseitige senkrechte Lage der Geraden

$$Ax + Cz = D \quad \text{und} \quad z = C_1 x + c_1;$$

man kommt also auf den bekannten Satz der deskriptiven Geometrie zurück, dass eine Gerade normal zu einer Ebene ist, sobald zwei ihrer Projektionen senkrecht sind zu den gleichnamigen Spuren der Ebene.

Hieran knüpfen sich folgende zwei Aufgaben.

α. Durch einen gegebenen Punkt eine Normalebene zu einer gegebenen Geraden zu legen. Die Koordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h, die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$6)\quad y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

sein, und die Gleichung der gesuchten Ebene heisse

$$Ax + By + Cz = D.$$

Da letztere durch den Punkt fgh gehen soll, so hat man erstlich

$$Af + Bg + Ch = D,$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen ergiebt sich nach Division mit A

$$7)\qquad x - f + \frac{B}{A}(y - g) + \frac{C}{A}(z - h) = 0.$$

Dies ist immer noch die Gleichung der gesuchten Ebene, nur mit Einrechnung der ersten angegebenen Bedingung. Zufolge der Gleichungen 5) hat man nun

$$8)\qquad x - f + B_1(y - g) + C_1(z - h) = 0$$

als Gleichung der gesuchten Normalebene.

Die hiermit bestimmte Ebene schneidet die gegebene Gerade in einem Punkte, dessen Koordinaten x_0, y_0, z_0 sich mittels der Bemerkung finden lassen, dass sie den Gleichungen 6) und 8) gleichzeitig genügen müssen, weil der Punkt $x_0 y_0 z_0$ sowohl der Geraden als der Ebene angehört. Aus den drei Gleichungen

$$y_0 = B_1 x_0 + b_1, \qquad z_0 = C_1 x_0 + c_1,$$
$$x_0 - f + B_1(y_0 - g) + C_1(z_0 - h) = 0$$

erhält man ohne Mühe:

$$9)\qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{f + B_1(g - b_1) + C_1(h - c_1)}{1 + B_1^2 + C_1^2}, \\[2ex] y_0 = B_1 \dfrac{f + B_1(g - b_1) + C_1(h - c_1)}{1 + B_1^2 + C_1^2} + b_1, \\[2ex] z_0 = C_1 \dfrac{f + B_1(g - b_1) + C_1(h - c_1)}{1 + B_1^2 + C_1^2} + c_1, \end{cases}$$

oder auch, wenn die Zeichen

$$10)\qquad \begin{cases} F = B_1(B_1 f + b_1 - g) + C_1(C_1 f + c_1 - g), \\ G = C[B_1(c_1 - h) - C_1(b_1 - g)] - (B_1 f + b_1 - g), \\ H = B[C_1(b_1 - g) - B_1(c_1 - h)] - (C_1 f + c_1 - h) \end{cases}$$

zur Abkürzung eingeführt werden:

$$11)\qquad \begin{cases} x_0 = f - \dfrac{F}{1 + B_1^2 + C_1^2}, \\[2ex] y_0 = g - \dfrac{G}{1 + B_1^2 + C_1^2}, \\[2ex] z_0 = h - \dfrac{H}{1 + B_1^2 + C_1^2}. \end{cases}$$

Die Formeln 10) und 11) stimmen überein mit Nr. 8) und 12) des § 9; in der That ist auch der Punkt $x_0 y_0 z_0$ nichts anderes als der

Fusspunkt des Perpendikels vom Punkte fgh auf die gegebene Gerade. Ebenso würde die Entfernung der Punkte $x_0 y_0 z_0$ und fgh den bereits in § 9 berechneten Abstand des Punktes von der Geraden darstellen.

β. Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene. Die gegebene Ebene sei durch die Gleichung

12) $$Ax + By + Cz = D,$$

der gegebene Punkt durch die Koordinaten f, g, h bestimmt und durch ihn werde senkrecht zu jener Ebene eine Gerade gelegt, deren Gleichungen wir mit

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

bezeichnen. Die Bedingung, dass diese Gerade durch den Punkt fgh gehen soll, liefert die Gleichungen

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

durch deren Einführung die vorigen Gleichungen übergehen in

$$y - g = B_1 (x - f), \qquad z - h = C_1 (x - f).$$

Die noch übrigen Unbekannten B_1 und C_1 bestimmen sich aus Nr. 5; und daher sind die gesuchten Gleichungen

13) $$y - g = \frac{B}{A}(x - f), \qquad z - h = \frac{C}{A}(x - f)$$

oder symmetrischer

14) $$\frac{x - f}{A} = \frac{y - g}{B} = \frac{z - h}{C}.$$

Die hiermit bestimmte Gerade schneidet die gegebene Ebene in einem Punkte, dem Fusspunkte des von fgh auf die Ebene herabgelassenen Perpendikels, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 heissen mögen. Zufolge der Bemerkung, dass x_1, y_1, z_1 den Gleichungen 12) und 13) gleichzeitig genügen müssen, hat man

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D,$$
$$y_1 - g = \frac{B}{A}(x_1 - f), \qquad z_1 - h = \frac{C}{A}(x_1 - f)$$

und findet hieraus:

15) $$\begin{cases} x_1 = f + A\,\dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y_1 = g + B\,\dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z_1 = h + C\,\dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{cases}$$

Um endlich die Entfernung der Punkte fgh und $x_1 y_1 z_1$, d. h. den Abstand des Punktes fgh von der Ebene zu bestimmen, haben wir, wenn q die gesuchte Grösse bezeichnet:

$$q = \sqrt{(x_1 - f)^2 + (y_1 - g)^2 + (z_1 - h)^2}$$

und nach Substitution der Werte von x_1, y_1, z_1:

$$16) \qquad q = -\frac{Af + Bg + Ch - D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

in Übereinstimmung mit § 11, Nr. 5.

γ. Die Formel für q bestimmt auch den gegenseitigen Abstand einer Ebene und einer ihr parallelen Geraden. Sind nämlich die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$17) \qquad y = B'x + b', \qquad z = C'x + c',$$

worin B' und C' der Bedingung

$$18) \qquad A + BB' + CC' = 0$$

genügen müssen, so hat man nur festzusetzen, dass der Punkt fgh auf der gegebenen Geraden liegt, dass also die Gleichungen

$$19) \qquad g = B'f + b', \qquad h = C'f + c'$$

stattfinden. Die Entfernung q des Punktes fgh von der Ebene ist dann einerlei mit dem Abstande der Geraden von der Ebene, mithin nach Nr. 16) und 19)

$$q = \frac{D - [(A + BB' + CC')f + Bb' + Cc']}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

und mit Rücksicht auf Nr. 18)

$$20) \qquad q = \frac{D - (Bb' + Cc')}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Die Vorzeichen von q befolgen selbstverständlich dieselbe Regel wie in Nr. 16).

§ 16.

Beliebige Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Eine Ebene, deren Gleichung

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D$$

sein möge, hat mit einer durch die Gleichungen

$$2) \qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

bestimmten Geraden im allgemeinen einen Punkt gemein, nämlich den Durchschnitt beider Gebilde. Die Koordinaten x_0, y_0, z_0 desselben ergeben sich aus der Bemerkung, dass sie den Gleichungen 1) und 2) zusammen genügen müssen, dass also gleichzeitig

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D,$$
$$y_0 = B_1 x_0 + b_1, \qquad z_0 = C_1 x_0 + c_1$$

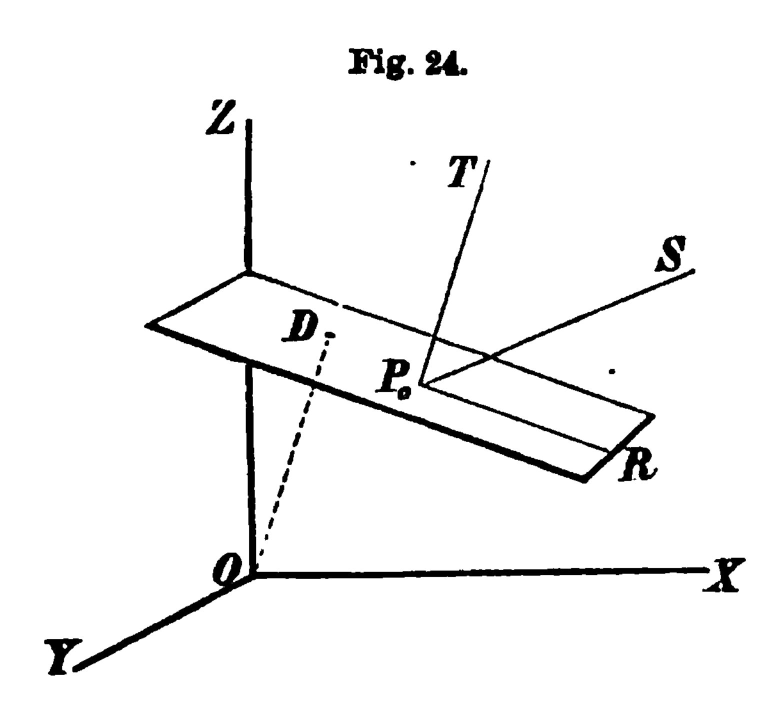
sein muss; hiernach findet man ohne Mühe

$$3) \quad \begin{cases} x_0 = -\dfrac{Bb_1 + Cc_1 - D}{A + BB_1 + CC_1}, \\ y_0 = \dfrac{Ab_1 + C(C_1 b_1 - B_1 c_1) + DB_1}{A + BB_1 + CC_1}, \\ z_0 = \dfrac{Ac_1 + B(B_1 c_1 - C_1 b_1) + DC_1}{A + BB_1 + CC_1}. \end{cases}$$

Im allgemeinen sind diese Ausdrücke endliche Grössen, sie können aber unter Umständen unendlich oder unbestimmt werden. Ist erstens der gemeinschaftliche Nenner der Brüche gleich Null, ohne dass einer der Zähler verschwindet, so wird jede der Koordinaten x_0, y_0, z_0 unendlich gross; die Gerade hat dann mit der Ebene einen unendlich entfernten Punkt gemein, d. h. sie ist ihr parallel (vgl. § 14). Verschwinden der Nenner und alle Zähler der vorigen Brüche gleichzeitig, so erhalten x_0, y_0, z_0 die unbestimmten Werte $\frac{0}{0}$, d. h. jeder Punkt der Geraden ist ein Punkt der Ebene (vgl. § 13).

Um ferner den Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene zu bestimmen, denken wir uns im Durchschnittspunkte P_0 beider Gebilde eine Normale P_0T auf der Ebene errichtet (Fig. 24); der Neigungswinkel RP_0S, welcher ω heissen möge, ist dann das Komplement des Winkels SP_0T zwischen der Geraden und der Normalen, also $\sin\omega = \cos SP_0T$. Wegen $P_0T /\!/ OD$ kann $\angle SP_0T$ als der Winkel zwischen OD und P_0S betrachtet werden und dieser lässt sich aus den Stellungswinkeln α, β, γ der Ebene und den Richtungswinkeln α_1, β_1, γ_1 der Geraden herleiten. Es ist nämlich

Fig. 24.



$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}},$$
$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta_1 = \frac{B_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{C_1}{\sqrt{1+B_1^2+C_1^2}},$$
$$\sin\omega = \cos SP_0T = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1,$$

mithin durch Substitution der vorigen Cosinuswerte

$$4)\qquad \sin\omega = \frac{A + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(1+B_1^2+C_1^2)}}.$$

Für den speziellen Fall $A + BB_1 + CC_1 = 0$ wird $\omega = 0$, und dann liegt die Gerade entweder parallel zur Ebene oder ganz in letzterer. Ist $B_1 = \frac{B}{A}$, $C_1 = \frac{C}{A}$, so findet sich $\omega = 90^0$, mithin steht dann die Gerade senkrecht auf der Ebene. Damit bestätigen sich die früher auf anderem Wege entwickelten Resultate.

Noch wollen wir bemerken, dass die Formeln 3) und 4) symmetrischer werden, sobald man sich vorstellt, dass die Gerade durch einen gegebenen Punkt $a'b'c'$ geht und dass ihre Richtung durch drei Konstanten A', B', C' bestimmt wird, die sich wie die Cosinus der Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1 verhalten. Nach § 6 sind dann die Gleichungen der Geraden

$$5)\qquad \frac{x-a'}{A'} = \frac{y-b'}{B'} = \frac{z-c'}{C'},$$

mithin ist durch Vergleich mit Nr. 2)

$$B_1 = \frac{B'}{A'}, \qquad C_1 = \frac{C'}{A'},$$
$$b_1 = \frac{A'b' - B'a'}{A'}, \qquad c_1 = \frac{A'c' - C'a'}{A'},$$

und zufolge dieser Werte erhält man:

$$6)\qquad \begin{cases} x_0 = a' + \dfrac{D - (Aa' + Bb' + Cc')}{AA' + BB' + CC'}\, A', \\ y_0 = b' + \dfrac{D - (Aa' + Bb' + Cc')}{AA' + BB' + CC'}\, B', \\ z_0 = c' + \dfrac{D - (Aa' + Bb' + Cc')}{AA' + BB' + CC'}\, C'; \end{cases}$$

$$7)\qquad \sin\omega = \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

Ist gleichzeitig

$$AA' + BB' + CC' = 0 \text{ und } Aa' + Bb' + Cc' = D,$$

so liegt die Gerade in der Ebene; ist dagegen

$$AA' + BB' + CC' = 0 \text{ und } Aa' + Bb' + Cc' \gtrless D,$$

so liegt die Gerade parallel zur Ebene. Wenn endlich

$$\frac{B'}{A'} = \frac{B}{A} \text{ und } \frac{C'}{A'} = \frac{C}{A}$$

oder besser

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$$

ist, so steht die Gerade senkrecht auf der Ebene.

§ 17.

Zwei Parallelebenen.

Bereits in § 11 haben wir von der Bemerkung Gebrauch gemacht, dass parallele Ebenen gleiche oder um 180° voneinander verschiedene Stellungswinkel haben. Sind nun

$$1)\qquad Ax + By + Cz = D,$$
$$2)\qquad A_1x + B_1y + C_1z = D_1$$

die Gleichungen zweier Ebenen, α, β, γ die Stellungswinkel der ersten, α_1, β_1, γ_1 die der zweiten Ebene, so hat man als Bedingung für die parallele Lage beider Ebenen

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1,$$

oder zufolge der bekannten Werte dieser Cosinus:

$$3)\qquad A : B : C = A_1 : B_1 : C_1.$$

Auch ohne Rücksicht auf die Stellungswinkel kann man zu diesen Gleichungen gelangen, wenn man sich an den Satz erinnert, dass zwei Ebenen parallel liegen, sobald ihre gleichnamigen Spuren parallel sind. Zur parallelen Lage der xy-Spuren

$$Ax + By = D, \qquad A_1x + B_1y = D_1$$

gehört nun die Bedingung

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} \text{ oder } \frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1};$$

der Parallelismus der xz-Spuren

$$Ax + Cz = D, \qquad A_1 x + C_1 z = D_1$$

verlangt die weitere Bedingung

$$\frac{A}{C} = \frac{A_1}{C_1} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{A_1} = \frac{C}{C_1},$$

und diese führt mit der vorigen zusammen auf die in Nr. 3) verzeichneten Gleichungen.

Der Abstand e der beiden Parallelebenen ist leicht aus den Entfernungen d und d_1 herzuleiten, in welchen sich die Ebenen, vom Koordinatenanfange aus gerechnet, befinden.

Werden D und D_1 wieder positiv vorausgesetzt, so ergiebt sich e aus

$$d = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad d_1 = \frac{D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

zu

$$e = d - d_1, \quad \text{oder} \quad e = d + d_1,$$

jenachdem der Koordinatenursprung ausserhalb der von den beiden Ebenen begrenzten Schicht liegt oder innerhalb; dabei fällt e positiv oder negativ aus, jenachdem die zweite Ebene und der Ursprung auf derselben Seite der ersten liegen oder nicht.

Wir knüpfen hieran die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene parallel einer gegebenen Ebene zu legen. Bedeuten f, g, h die Koordinaten des gegebenen Punktes, und ist ferner

$$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der gegebenen, dagegen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so muss erstens

$$A_1 f + B_1 g + C_1 h = D_1$$

sein. Indem man diese Gleichung von der vorigen subtrahiert und nachher mit A_1 dividiert, erhält man

$$x - f + \frac{B_1}{A_1}(y - g) + \frac{C_1}{A_1}(z - h) = 0,$$

und dies ist immer noch die Gleichung der gesuchten Ebene mit Einschluss der Bedingung, dass die Ebene den Punkt fgh enthalten soll. Zur parallelen Lage beider Ebenen gehört weiter die Bedingung 3) oder

$$\frac{B_1}{A_1} = \frac{B}{A}, \quad \frac{C_1}{A_1} = \frac{C}{A};$$

nach Substitution dieser Werte und Multiplikation mit A gelangt man zu der gesuchten Gleichung, nämlich

$$4) \qquad A(x-f) + B(y-g) + C(z-h) = 0.$$

Der Abstand dieser Ebene von der gegebenen Ebene ist einerlei mit der Entfernung des Punktes fgh von der gegebenen Ebene.

§ 18.

Zwei aufeinander senkrechte Ebenen.

Lässt man von irgend einem Punkte P_1 einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ ein Perpendikel p auf eine andere Ebene $\mathfrak{E}$ herab, so liegt p entweder ganz in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ oder schneidet $\mathfrak{E}_1$; im ersten Falle sind beide Ebenen zueinander senkrecht, im zweiten nicht. Um dieses geometrische Kennzeichen analytisch auszudrücken, bezeichnen wir die Gleichungen der Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ mit

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D,$$

$$2) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1,$$

und nennen x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines in der letzteren Ebene liegenden Punktes P_1, für welchen also die Gleichung

$$3) \qquad A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 = D_1$$

besteht. Nach § 15 Formel 13) sind die Gleichungen der von P_1 auf $\mathfrak{E}$ herabgelassenen Senkrechten

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1), \qquad z - z_1 = \frac{C}{A}(x - x_1),$$

und wenn dieses Perpendikel ganz in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ liegen soll, so müssen nach § 13 die Bedingungen

$$4) \qquad A_1 + B_1 \frac{B}{A} + C_1 \frac{C}{A} = 0,$$

$$5) \qquad B_1\left(y_1 - \frac{B}{A} x_1\right) + C_1\left(z_1 - \frac{C}{A} x_1\right) = D_1$$

erfüllt sein. Von diesen Bedingungen ist die zweite überflüssig, weil sie aus Nr. 3) und 4) folgt, wenn man die letztere Gleichung mit x_1 multipliziert und von der vorigen abzieht. Zu dem nämlichen Resultate führt auch die geometrische Bemerkung, dass p mit $\mathfrak{E}_1$ bereits den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gemein hat, also nur noch parallel

mit $\mathfrak{E}_1$ zu sein braucht, um ganz in diese Ebene zu fallen. Als Bedingung für die senkrechte Lage zweier Ebenen bleibt daher nur die eine Gleichung 5) oder

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \tag{6}$$

Hieran knüpfen sich folgende Aufgaben:

α. **Durch zwei gegebene Punkte eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen.** Nennen wir $f_1, g_1, h_1, f_2, g_2, h_2$ die Koordinaten der gegebenen Punkte,

$$Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der gegebenen, und

$$Lx + My + Nz = 1 \tag{7}$$

die der gesuchten Ebene, so haben wir erstens, weil die Punkte $f_1 g_1 h_1$ und $f_2 g_2 h_2$ in dieser Ebene liegen sollen,

$$Lf_1 + Mg_1 + Nh_1 = 1,$$
$$Lf_2 + Mg_2 + Nh_2 = 1,$$

und wegen der senkrechten Lage beider Ebenen

$$AL + BM + CN = 0.$$

Die letzten drei Gleichungen bestimmen die drei Unbekannten L, M, N und zwar finden sich, wenn zur Abkürzung

$$\left\{\begin{array}{l} F = B(h_1 - h_2) - C(g_1 - g_2), \\ G = C(f_1 - f_2) - A(h_1 - h_2), \\ H = A(g_1 - g_2) - B(f_1 - f_2), \\ K = A(g_1 h_2 - g_2 h_1) + B(h_1 f_2 - h_2 f_1) + C(f_1 g_2 - f_2 g_1) \end{array}\right. \tag{8}$$

gesetzt wird, die Werte

$$L = \frac{F}{K}, \quad M = \frac{G}{K}, \quad N = \frac{H}{K}.$$

Nach Substitution derselben erhält man aus Nr. 7) als Gleichung der gesuchten Ebene

$$Fx + Gy + Hz = K. \tag{9}$$

Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden, von welcher xyz irgend ein Punkt sein möge. Weil nun dieser Punkt beiden Ebenen gleichzeitig angehört, so müssen seine Koordinaten die Gleichungen beider Ebenen befriedigen, und daher kann man sagen, dass die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} Ax + By + Cz = D, \\ Fx + Gy + Hz = K \end{array}\right. \tag{10}$$

zusammengenommen die Gleichungen der Durchschnittslinie beider Ebenen sind. Die Gleichungen der Horizontal- und Vertikalprojektion des Durchschnittes finden sich, wenn man aus den Gleichungen 10) einmal z, das andere Mal y eliminiert; sie lauten:

$$11)\quad \begin{cases} (CF-AH)x+(CG-BH)y=CK-DH, \\ (BF-AG)x+(BH-CG)z\ =BK-DG. \end{cases}$$

Auch die Richtungswinkel dieser Geraden sind nach den Formeln 7) in § 6 leicht zu bestimmen, sobald man den Gleichungen 11) die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Geraden erteilt.

β. Durch eine gegebene Gerade eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Die Gleichungen der gegebenen Ebene, der Geraden und der gesuchten Ebene mögen der Reihe nach sein

$$Ax+By+Cz=D,$$
$$y=B_1x+b_1, \qquad z=C_1x+c_1,$$
$$12)\qquad Lx+My+Nz=1.$$

Da letztere Ebene die Gerade enthalten soll, so müssen zunächst die Gleichungen

$$L+B_1M+C_1N=0, \qquad b_1M+c_1N=1$$

stattfinden; hierzu kommt als Bedingungsgleichung für die senkrechte Lage beider Ebenen

$$AL+BM+CN=0.$$

Die letzten drei Gleichungen bestimmen die Werte von L, M, N, und nach Substitution derselben in Nr. 12) ergiebt sich:

$$13)\quad \begin{cases} (BC_1-B_1C)x-(AC_1-C)y+(AB_1-B)z \\ \qquad =(AB_1-B)c_1-(AC_1-C)b_1. \end{cases}$$

Den Durchschnitt dieser und der gegebenen Ebene kann man auf gleiche Weise wie vorhin ermitteln; man erhält dann die Gleichungen der rechtwinkligen Projektion einer Geraden auf eine Ebene im Raume.

γ. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, die einer bestimmten Geraden parallel und senkrecht zu einer vorgeschriebenen Ebene ist. Die Koordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen, die Gleichungen der Geraden und der Ebene seien

$$y=B_1x+b_1, \qquad z=C_1x+c_1,$$
$$Ax+By+Cz=D,$$

endlich bezeichne

14) $$Lx + My + Nz = 1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene. Dass letztere den Punkt fgh enthalten soll, wird ausgedrückt durch die Bedingungsgleichung

$$Lf + Mg + Nh = 1;$$

wir ziehen dieselbe von Nr. 14) ab, dividieren mit L, setzen zur Abkürzung

$$\frac{M}{L} = P, \quad \frac{N}{L} = Q$$

und haben dann

15) $$x - f + P(y - g) = Q(z - h) = 0.$$

Die Bedingungen, dass die gesuchte Ebene senkrecht zur gegebenen Ebene und parallel zur gegebenen Geraden sein soll, liefern noch die Gleichungen

$$AL + BM + CN = 0, \quad L + B_1 M + C_1 N = 0,$$

die wir gleichfalls durch L dividieren. Wir haben jetzt

$$BP + CQ = -A, \quad B_1 P + C_1 Q = -1;$$

hieraus finden sich die Werte von P und Q, nach deren Substitution in Nr. 15) die Gleichung der gesuchten Ebene zum Vorschein kommt, nämlich

16) $$(BC_1 - B_1 C)(x - f) - (AC_1 - C)(y - g) + (AB_1 - B)(z - h) = 0.$$

Der Durchschnitt der neuen und der gegebenen Ebene kann wie bei den vorigen Aufgaben bestimmt werden.

§ 19.

Ebenen in beliebigen Lagen.

Irgend zwei, durch die Gleichungen

1) $$Ax + By + Cz = D,$$

2) $$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

repräsentierte Ebenen haben im allgemeinen einen geradlinigen Durchschnitt, für dessen Punkte jede der obigen Gleichungen gilt; versteht man demnach unter x, y, z in beiden Gleichungen die Koordinaten eines und desselben Punktes, so sind jene Gleichungen die Gleichungen der Durchschnittslinie selber. Die Gleichungen ihrer Projektionen auf die Ebenen xy und xz finden sich hieraus, indem man einmal z, das andere Mal y eliminiert; sie lauten

3) $$\begin{cases} (AC_1 - A_1 C)x + (BC_1 - B_1 C)y = DC_1 - D_1 C, \\ (AB_1 - A_1 B)x + (CB_1 - C_1 B)z = DB_1 - D_1 B. \end{cases}$$

Dasselbe Resultat kann man auch aus der geometrischen Bemerkung herleiten, dass die Spuren der Durchschnittslinie die Durchschnitte von den gleichnamigen Spuren beider Ebenen sein müssen.

Die Richtungswinkel der Geraden 3) findet man nach den Formeln des § 6, wenn man den Gleichungen 3) die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Geraden erteilt.

Was endlich den Neigungswinkel Θ der Ebenen gegeneinander anbelangt, so ist derselbe identisch mit dem Winkel zwischen den beiden Senkrechten d und d_1, welche vom Koordinatenanfange auf die Ebenen herabgelassen werden können. Nach den Formeln 13) in § 10 kennt man die Richtungswinkel α, β, γ von d (die Stellungswinkel der ersten Ebene), auf gleiche Weise erhält man die Richtungswinkel α_1, β_1, γ_1 von d_1, und daher ist

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1$$

oder nach Substitution der bekannten Werte von $\cos\alpha$, $\cos\alpha_1$ u. s. w.

$$4)\qquad \cos\Theta = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A_1^2+B_1^2+C_1^2)}}.$$

Im speziellen Falle $AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0$ wird $\Theta = 90^0$. und dann stehen die Ebenen aufeinander senkrecht; ist dagegen $A:A_1 = B:B_1 = C:C_1$, so wird $\Theta = 0$, und dann liegen die Ebenen parallel. Damit kommt man auf frühere Resultate zurück.

Noch wollen wir kurz die verschiedenen gegenseitigen Lagen von drei Ebenen erörtern; letztere mögen kurz $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$ heissen und durch die Gleichungen

$$5)\qquad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = D_3, \end{cases}$$

gegeben sein. Im allgemeinen schneidet jede dieser Ebenen die beiden anderen und es bezeichne g_1 den Durchschnitt von $\mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_3$, g_2 den von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_3$, endlich g_3 den von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$; die Gleichungen dieser drei Geraden sind:

$$6)\qquad \left\{\begin{array}{l} (A_2C_3 - A_3C_2)x + (B_2C_3 - B_3C_2)y = D_2C_3 - D_3C_2 \\ (A_2B_3 - A_3B_2)x + (C_2B_3 - C_3B_2)z = D_2B_3 - D_3B_2 \end{array}\right\} (g_1),$$

$$7)\qquad \left\{\begin{array}{l} (A_3C_1 - A_1C_3)x + (B_3C_1 - B_1C_3)y = D_3C_1 - D_1C_3 \\ (A_3B_1 - A_1B_3)x + (C_3B_1 - C_1B_3)z = D_3B_1 - D_1B_3 \end{array}\right\} (g_2),$$

$$8)\qquad \left\{\begin{array}{l} (A_1C_2 - A_2C_1)x + (B_1C_2 - B_2C_1)y = D_1C_2 - D_2C_1 \\ (A_1B_2 - A_2B_1)x + (C_1B_2 - C_2B_1)z = D_1B_2 - D_2B_1 \end{array}\right\} (g_3).$$

Ferner schneiden sich diese drei Geraden, wie die Ebenen selbst, in einem Punkte $x_0 y_0 z_0$, dessen Koordinaten allen vorhandenen Gleichungen genügen; man findet hieraus:

$$9)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{D_1(B_2C_3-B_3C_2)+D_2(B_3C_1-B_1C_3)+D_3(B_1C_2-B_2C_1)}{A_1(B_2C_3-B_3C_2)+A_2(B_3C_1-B_1C_3)+A_3(B_1C_2-B_2C_1)}, \\ y_0 = \dfrac{D_1(C_2A_3-C_3A_2)+D_2(C_3A_1-C_1A_3)+D_3(C_1A_2-C_2A_1)}{B_1(C_2A_3-C_3A_2)+B_2(C_3A_1-C_1A_3)+B_3(C_1A_2-C_2A_1)}, \\ z_0 = \dfrac{D_1(A_2B_3-A_3B_2)+D_2(A_3B_1-A_1B_3)+D_3(A_1B_2-A_2B_1)}{C_1(A_2B_3-A_3B_2)+C_2(A_3B_1-A_1B_3)+C_3(A_1B_2-A_2B_1)}. \end{cases}$$

Die Nenner dieser Brüche sind identisch und nur in drei verschiedenen Formen dargestellt worden, um den symmetrischen Bau der Gleichungen hervortreten zu lassen; zur Abkürzung stellen wir die letzteren Formeln in folgender Weise dar:

$$10)\qquad x_0 = \frac{A_0}{N}, \quad y_0 = \frac{B_0}{N}, \quad z_0 = \frac{C_0}{N}.$$

Ausser dem besprochenen allgemeinen Falle können nun folgende vier spezielle Fälle vorkommen.

Sind alle drei Ebenen parallel, so hat man

$$A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2 = A_3 : B_3 : C_3,$$

folglich

$$\frac{B_2}{B_3} = \frac{C_2}{C_3}, \quad \frac{B_3}{B_1} = \frac{C_3}{C_1}, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

oder

$$11)\quad B_2C_3 - B_3C_2 = B_3C_1 - B_1C_3 = B_1C_2 - B_2C_1 = 0;$$

in diesem Falle verschwindet der gemeinschaftliche Nenner N und es wird $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Sind nur zwei Ebenen parallel, etwa $\mathfrak{E}_1 \parallel \mathfrak{E}_2$, so erhalten die Quotienten

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{B_2}{B_1}, \quad \frac{C_2}{C_1}$$

einen gemeinschaftlichen Wert, den wir $\varkappa$ nennen wollen. Die Substitution $A_2 = \varkappa A_1$, $B_2 = \varkappa B_1$, $C_2 = \varkappa C_1$ verwandelt die Gleichungen für g_1 in die folgenden:

$$(A_1C_3 - A_3C_1)x + (B_1C_3 - B_3C_1)y = \frac{1}{\varkappa} D_2C_3 - D_3C_1,$$

$$(A_1B_3 - A_3B_1)x + (C_1B_3 - C_3B_1)z = \frac{1}{\varkappa} D_2B_3 - D_3B_1;$$

ihr Vergleich mit den für g_2 geltenden Gleichungen zeigt, dass $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{E}_3$ in den parallelen Geraden g_1 und g_2 geschnitten

werden. Mittels derselben Substitution ergiebt sich gleichzeitig $N = 0$, also $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Ist nur $N = 0$, ohne dass irgend zwei der drei Ebenen parallel liegen, so finden gleichzeitig die folgenden Beziehungen statt:

$$12)\quad \frac{A_2 C_3 - A_3 C_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{A_3 C_1 - A_1 C_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1},$$

$$13)\quad \frac{A_2 B_3 - A_3 B_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{A_3 B_1 - A_1 B_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1};$$

man erkennt hieraus, dass sich die Ebenen in drei parallelen Geraden schneiden; zugleich ist $x_0 = \infty$, $y_0 = \infty$, $z_0 = \infty$.

Wenn kein Paar der Ebenen parallel liegt, wenn ferner $N = 0$ ist und einer der Zähler A_0, B_0, C_0, etwa A_0 verschwindet, so gelten erstens wieder die Gleichungen 12) und 13); aus der Gleichung $A_0 = 0$ folgt weiter

$$14)\quad \frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{B_2 C_3 - B_3 C_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{B_3 C_1 - B_1 C_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{B_1 C_2 - B_2 C_1},$$

und wenn man diese Beziehungen durch die Gleichungen 12) und 13) dividiert:

$$\frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{A_2 C_3 - A_3 C_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{A_3 C_1 - A_1 C_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{A_1 C_2 - A_2 C_1},$$

$$\frac{D_2 C_3 - D_3 C_2}{A_2 B_3 - A_3 B_2} = \frac{D_3 C_1 - D_1 C_3}{A_3 B_1 - A_1 B_3} = \frac{D_1 C_2 - D_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1},$$

d. h. nach gehöriger Reduktion $B_0 = 0$ und $C_0 = 0$. Schreibt man endlich statt der ersten Gleichung $A_0 = 0$:

$$15)\quad \frac{D_2 B_3 - D_3 B_2}{C_2 B_3 - C_3 B_2} = \frac{D_3 B_1 - D_1 B_3}{C_3 B_1 - C_1 B_3} = \frac{D_1 B_2 - D_2 B_1}{C_1 B_2 - C_2 B_1},$$

so erkennt man aus Nr. 12) und Nr 14) die Identität der xy-Projektionen von g_1, g_2, g_3, sowie aus Nr. 13) und Nr. 15) die Identität der xz-Projektionen dieser Geraden. Hieraus zusammen folgt, dass sich für $N = 0$ und $A_0 = 0$ die drei Ebenen in einer und derselben Geraden schneiden; zugleich erhalten x_0, y_0, z_0 den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$, welcher sich im vorliegenden Falle durch die Bemerkung erklärt, dass jeder beliebige Punkt der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der Ebenen als ein Durchschnittspunkt der letzteren gelten kann.

Das Kennzeichen dafür, dass drei Ebenen eine gemeinsame Gerade enthalten, kann auch noch in anderer, für Anwendungen besonders geeigneter Weise erhalten werden. Sind

$$T_1 \equiv A_1 x + B_1 y + C_1 z - D_1 = 0,$$
$$T_2 \equiv A_2 x + B_2 y + C_2 z - D_2 = 0$$

die Gleichungen zweier gegebenen Ebenen, so ist

16) $$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0$$

die Gleichung einer neuen Ebene; setzt man in derselben die Koordinaten eines Punktes ein, der auf beiden gegebenen Ebenen liegt, so verschwinden T_1 und T_2 einzeln, folglich auch T. Daher folgt, dass die Ebene $T = 0$ die Gerade der Ebenen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ enthält (vergl. § 16, Nr. 7). Das Verhältnis $\lambda_1 : \lambda_2$ kann man so wählen, dass die Ebene $T = 0$ durch irgend einen gegebenen Punkt P' geht. Denn soll P' auf $T = 0$ liegen, so muss

17) $$\lambda_1 T'_1 + \lambda_2 T'_2 = 0$$

sein, wenn man mit T'_1 und T'_2 die Werte bezeichnet, welche die Funktionen T_1 und T_2 für die Koordinaten x', y', z' des Punktes P' annehmen. Aus Nr. 17) folgt:

$$\lambda_1 : \lambda_2 = T'_2 : - T'_1,$$

und daher

18) $$T'_2 . T_1 - T'_1 . T_2 = 0$$

als Gleichung der gesuchten Ebene. Unter der Form

$$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 = 0$$

ist somit die Gleichung jeder Ebene begriffen, welche die Schnittlinie von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ enthält.

Haben die Ebenen

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0$$

eine gemeinsame Gerade, so besteht also für gewisse Zahlen λ_1 und λ_2 die Identität

$$T_0 \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2;$$

multipliziert man mit einer willkürlichen Zahl $\varkappa_0$ und ersetzt $\varkappa_0 \lambda_1$ und $\varkappa_0 \lambda_2$ durch $-\varkappa_1$ und $-\varkappa_2$, so erhält man die Identität in der zweckmässigeren Form

19) $$\varkappa_0 T_0 + \varkappa_1 T_1 + \varkappa_2 T_2 \equiv 0.$$

Umgekehrt: Wenn sich drei Zahlen $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ finden lassen, mit deren Hilfe sich die Identität 19) ergiebt, so haben die Ebenen

$T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ eine gemeinsame Gerade. Denn aus Nr. 19) folgt:

$$T_0 \equiv -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_0} T_1 - \frac{\varkappa_2}{\varkappa_0} T_2,$$

und dies stimmt mit Nr. 16) überein, wenn man dort T, λ_1, λ_2 durch T_0, $-\varkappa_1 : \varkappa_0$, $-\varkappa_2 : \varkappa_0$ ersetzt.

Durch ganz ähnliche Schlüsse beweist man folgende Sätze: Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ die Gleichungen dreier Ebenen, die einen gemeinsamen Punkt haben, so ist

$$20)\qquad T_0 \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \lambda_3 T_3 = 0$$

die Gleichung einer denselben Punkt enthaltenden Ebene. Und umgekehrt: Wenn sich vier nicht sämtlich verschwindende Zahlen $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ angeben lassen, für welche die Identität

$$21)\qquad \varkappa_0 T_0 + \varkappa_1 T_1 + \varkappa_2 T_2 + \varkappa_3 T_3 \equiv 0$$

besteht, so haben die Ebenen einen Punkt gemein. Denn für die Koordinaten des Punktes, den $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ gemein haben, verschwinden T_1, T_2 und T_3 einzeln, folglich verschwindet auch T_0.

Beispiele. I. Sind $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ die Normalgleichungen der Seiten einer dreiseitigen Ecke, innerhalb deren der Anfangspunkt liegt, so sind die Gleichungen der Halbierungsebenen der Flächenwinkel der Ecke

$$\mathfrak{T}_0 \equiv T_1 - T_2 = 0, \quad \mathfrak{T}_1 \equiv T_2 - T_0 = 0,$$
$$\mathfrak{T}_2 \equiv T_0 - T_1 = 0.$$

Da nun die Summe

$$\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 \equiv (T_1 - T_2) + (T_2 - T_0) + (T_0 - T_1)$$

identisch verschwindet, so folgt: Die Ebenen, welche die Winkel einer dreiseitigen Ecke halbieren, haben eine gemeinsame Gerade.

Sind ferner

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen eines Tetraeders in Normalform, und wird der Anfangspunkt im Innern des Tetraeders vorausgesetzt, so sind

$$\mathfrak{T}_{01} \equiv T_0 - T_1 = 0, \quad \mathfrak{T}_{12} \equiv T_1 - T_2 = 0,$$
$$\mathfrak{T}_{23} \equiv T_2 - T_3 = 0, \quad \mathfrak{T}_{30} \equiv T_3 - T_0 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen, welche die an zwei Paar Gegenkanten (den Seiten eines unebenen Vierecks) liegenden Flächenwinkel halbieren. Da nun die Summe

$$\mathfrak{T}_{01} + \mathfrak{T}_{12} + \mathfrak{T}_{23} + \mathfrak{T}_{30}$$

identisch verschwindet, so folgt, dass diese vier Halbierungsebenen einen gemeinsamen Punkt haben. Durch denselben gehen auch die Halbierungsebenen

$$\mathfrak{T}_{20} \equiv T_2 - T_0 = 0, \qquad \mathfrak{T}_{31} \equiv T_3 - T_1 = 0,$$

da dieselben die Schnittlinien von $\mathfrak{T}_{01} = 0$, $\mathfrak{T}_{12} = 0$, bez. von $\mathfrak{T}_{12} = 0$, $\mathfrak{T}_{23} = 0$ enthalten. Daher folgt: Die Ebenen, welche die Flächenwinkel eines Tetraeders halbieren, haben einen gemeinsamen Punkt.

II. Die Strecke d_{12}, welche die Punkte $x_1 y_1 z_1$ und $x_2 y_2 z_2$ verbindet, hat die Richtungscosinus

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d_{12}}, \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d_{12}}, \qquad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d_{12}};$$

eine zu d_{12} normale Ebene hat daher eine Gleichung von der Form

$$22) \qquad (x_2 - x_1)\,x + (y_2 - y_1)\,y + (z_2 - z_1)\,z - D = 0.$$

Soll diese Ebene die Mitte von d_{12} enthalten, so muss sie von den Koordinaten der Mitte

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}, \qquad y = \frac{y_2 + y_1}{2}, \qquad z = \frac{z_2 + z_1}{2}$$

erfüllt werden; setzt man diese in 22) ein, so erhält man eine Gleichung, durch welche D bestimmt wird. Indem man den so gefundenen Wert von D in 22) einführt, ergiebt sich die Gleichung der Ebene, welche die Strecke $P_1 P_2$ normal halbiert, zu

$$23) \qquad T_{12} \equiv (x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (z_2 - z_1)z - \tfrac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) = 0,$$

wobei r_2 und r_1 die Abstände des Anfangspunktes von P_2 und P_1 bezeichnen.

Die Gleichung 23) kann man schreiben:

$$24) \qquad T_{12} \equiv T_2 - T_1 = 0,$$

wobei

$$25) \qquad \begin{cases} T_1 \equiv x_1 x + y_1 y + z_1 z - \frac{1}{2} r_1^2 = 0, \\ T_2 \equiv x_2 x + y_2 y + z_2 z - \frac{1}{2} r_2^2 = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen der Ebenen sind, welche die Strecken vom Anfangspunkte nach P_1 und P_2 normal halbieren. Aus 24) und 25) folgt: Die Ebenen, welche die Seiten eines Dreiecks normal halbieren, haben eine gemeinsame Gerade.

Sind $T_0 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ die Gleichungen der Ebenen, welche die von dem Anfangspunkte nach den Ecken eines

unebenen Vierecks gezogenen Strecken normal halbieren, so ergeben sich nach Nr. 23) die Gleichungen der Ebenen, welche die Seiten des Vierecks normal halbieren, zu

$$T_{01} \equiv T_1 - T_0 = 0, \quad T_{12} \equiv T_2 - T_1 = 0,$$
$$T_{23} \equiv T_3 - T_2 = 0, \quad T_{30} \equiv T_0 - T_3 = 0.$$

Hieraus ergiebt sich die Identität

$$T_{01} + T_{12} + T_{23} + T_{30} \equiv 0;$$

daher folgt: Die Ebenen, welche die Seiten eines unebenen Vierecks normal halbieren, haben einen gemeinsamen Punkt.

III. In einem Tetraeder kann im allgemeinen durch eine Kante keine Ebene gelegt werden, die normal zur Gegenkante ist. Die Bedingung dafür, dass dies möglich ist, dass also zwei Gegenkanten sich rechtwinklig kreuzen, kann in einfacher Weise folgendermassen erhalten werden. Es seien

$$T_0 = 0, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0$$

die Gleichungen der Ebenen des Tetraeders in Normalform; die Ecken mögen mit P_0, P_1, P_2, P_3 bezeichnet werden, und zwar mit P_i die Ecke, welche $T_i = 0$ gegenüberliegt. Irgend eine Ebene, welche die Kante $P_2 P_3$ enthält, hat die Gleichung

$$m_0 T_0 - m_1 T_1 = 0.$$

Diese Ebene ist normal zur Gegenkante, sobald sie zu $T_2 = 0$ und $T_3 = 0$ normal ist, und dies findet unter den beiden Bedingungen statt:

$$26) \quad \begin{cases} (m_0 \cos\alpha_0 - m_1 \cos\alpha_1)\cos\alpha_2 + (m_0 \cos\beta_0 - m_1 \cos\beta_1)\cos\beta_2 \\ \qquad + (m_0 \cos\gamma_0 - m_1 \cos\gamma_1)\cos\gamma_2 = 0, \\ (m_0 \cos\alpha_0 - m_1 \cos\alpha_1)\cos\alpha_3 + (m_0 \cos\beta_0 - m_1 \cos\beta_1)\cos\beta_3 \\ \qquad + (m_0 \cos\gamma_0 - m_1 \cos\gamma_1)\cos\gamma_3 = 0. \end{cases}$$

Wird der zwischen den Seiten $T_i = 0$ und $T_k = 0$ enthaltene Flächenwinkel mit ε_{ik} bezeichnet, so ist

$$\cos\varepsilon_{ik} = \cos\alpha_i \cos\alpha_k + \cos\beta_i \cos\beta_k + \cos\gamma_i \cos\gamma_k,$$

daher vereinfachen sich die Bedingungen 26) zu

$$m_0 \cos\varepsilon_{02} - m_1 \cos\varepsilon_{12} = 0,$$
$$m_0 \cos\varepsilon_{03} - m_1 \cos\varepsilon_{13} = 0,$$

und diese sind gleichbedeutend mit der Proportion

$$27) \quad \cos\varepsilon_{02} : \cos\varepsilon_{12} = \cos\varepsilon_{03} : \cos\varepsilon_{13}.$$

Wird nun ferner vorausgesetzt, dass sich noch zwei Gegenkanten etwa $P_1 P_2$ und $P_0 P_3$ rechtwinklig kreuzen, so besteht die Proportion

28) $$\cos\varepsilon_{10} : \cos\varepsilon_{02} = \cos\varepsilon_{13} : \cos\varepsilon_{23}.$$

Aus 27) und 28) folgt durch Multiplikation

29) $$\cos\varepsilon_{10} : \cos\varepsilon_{12} = \cos\varepsilon_{03} : \cos\varepsilon_{23}.$$

Da nun die zu 26) führenden Schlüsse auch in umgekehrter Reihe gelten, so ergiebt sich aus 29) der Satz: Wenn zwei Paare Gegenkanten eines Tetraeders einander rechtwinklig kreuzen, so gilt dies auch von dem dritten Paare.

Anhang zum dritten Kapitel.

I. Die Ebene, bezogen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem.

Die Betrachtungen, welche in § 10 an Fig. 21 geknüpft wurden, bleiben wörtlich dieselben, wenn man sich das rechtwinklige Koordinatensystem durch ein schiefwinkliges ersetzt denkt; daher ist wie früher, so auch jetzt

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

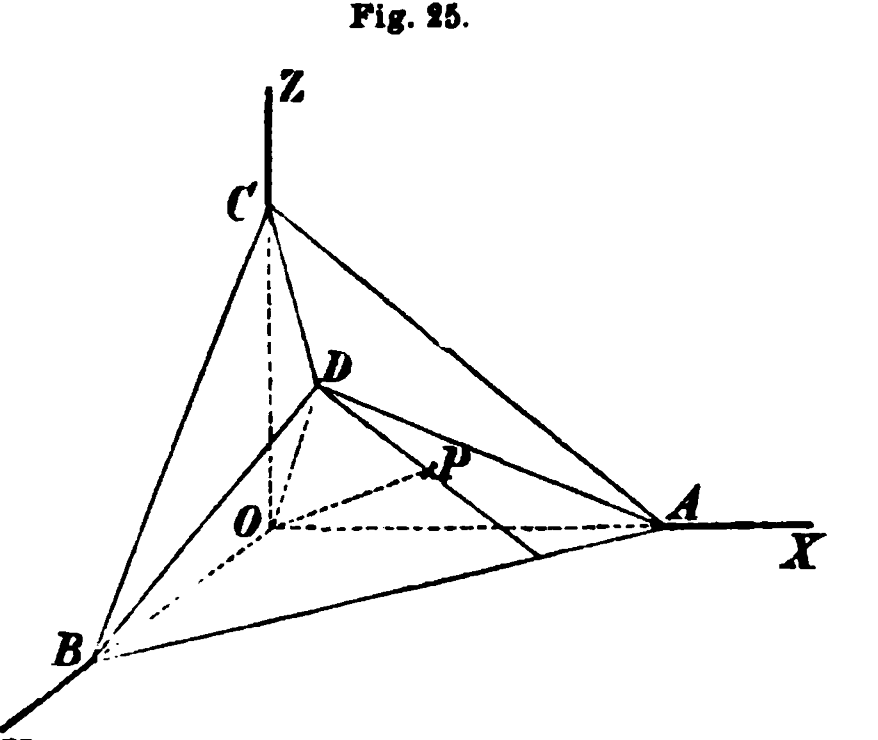
die Gleichung einer Ebene, welche von den Koordinatenachsen die Strecken a, b, c abschneidet. Ebenso kann die Gleichung einer auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bezogenen Ebene unter der allgemeinen Form

1) $$Ax + By + Cz = D$$

dargestellt werden und es ist dann

2) $$a = \frac{D}{A}, \quad b = \frac{D}{B}, \quad c = \frac{D}{C}.$$

Fig. 25.



Anders wird die Sache bei den Stellungswinkeln der Ebene. Denken wir uns in Fig. 25 das Koordinatensystem als schiefwinkliges, $OD = p$ als Senkrechte vom Koordinatenanfange auf die Ebene ABC, ferner P als einen beliebigen

Punkt der Ebene, dessen Koordinaten x, y, z und dessen Radiusvektor r sein möge, so haben wir, weil das Dreieck ODP rechtwinklig bei D ist,

$$p = r \cos(pr).$$

Hier erscheint p als die rechtwinklige Projektion von r auf OD; es bleibt aber die Projektion dieselbe, wenn statt r die aus x, y, z bestehende gebrochene Linie auf OD projiziert wird, mithin ist auch

$$p = x \cos(px) + y \cos(py) + z \cos(pz),$$

oder bei umgekehrter Anordnung und Division mit p:

$$\frac{\cos(px)}{p} x + \frac{\cos(py)}{p} y + \frac{\cos(pz)}{p} z = 1.$$

Der Vergleich zwischen dieser Gleichung und Nr. 1) oder

$$\frac{A}{D} x + \frac{B}{D} y + \frac{C}{D} z = 1$$

liefert die Relationen

$$3)\qquad \frac{\cos(px)}{p} = \frac{A}{D}, \quad \frac{\cos(py)}{p} = \frac{B}{D}, \quad \frac{\cos(pz)}{p} = \frac{C}{D},$$

die man auch unmittelbar durch Betrachtung der rechtwinkligen Dreiecke ADO, BDO, CDO erhalten kann. Die vorstehenden drei Gleichungen enthalten die vier Unbekannten p, $\cos(px)$, $\cos(py)$, $\cos(pz)$, von denen die drei letzten für den Augenblick kurz ξ, η, ζ heissen mögen; dazu gesellt sich als vierte Gleichung die zwischen drei Richtungswinkeln jederzeit bestehende Relation [Formel 7) im Anhang zum ersten Kapitel]:

$$4)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-\alpha^2)\xi^2 + (1-\beta^2)\eta^2 + (1-\gamma^2)\zeta^2 \\ &- 2(\alpha - \beta\gamma)\eta\zeta - 2(\beta - \gamma\alpha)\zeta\xi - 2(\gamma - \alpha\beta)\xi\eta \\ &= 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \end{aligned}\right.$$

worin α, β, γ die Cosinus der Koordinatenwinkel yz, zx, xy bedeuten. Mittels der Gleichungen 3) kann man ξ, η, ζ durch p ausdrücken, diese Werte in Nr. 4) substituieren, daraus p und nachher ξ, η, ζ bestimmen; setzt man zur Abkürzung

$$5)\qquad \delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} E^2 = &(1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 \\ &- 2(\alpha - \beta\gamma)BC - 2(\beta - \gamma\alpha)CA - 2(\gamma - \alpha\beta)AB, \end{aligned}\right.$$

so sind die Ergebnisse der angedeuteten leichten Rechnung

$$7)\quad \begin{cases} p = \dfrac{D\delta}{E}, \\ \cos(px) = \dfrac{A\delta}{E}, \quad \cos(py) = \dfrac{B\delta}{E}, \quad \cos(pz) = \dfrac{C\delta}{E}. \end{cases}$$

Nicht überflüssig ist es, die speziellen Formeln für die Fälle anzumerken, wo die beliebige Ebene einer der Koordinatenebenen parallel liegt. Ist erstens die Ebene parallel der yz-Ebene, also

$$x = a$$

ihre Gleichung, so haben wir $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = a$, folglich, wenn wir die Senkrechte p in diesem Falle mit p_x bezeichnen,

$$8)\quad p_x = \frac{a\delta}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \cos(p_x x) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \cos(p_x y) = 0, \quad \cos(p_x z) = 0.$$

Auf ähnliche Weise finden wir, wenn die Ebenen parallel zur zx-Ebene, also ihre Gleichung

$$y = b$$

ist und p_y ihren Abstand vom Koordinatenanfang bezeichnet,

$$9)\quad p_y = \frac{b\delta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \cos(p_y x) = 0, \quad \cos(p_y y) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \cos(p_y z) = 0;$$

endlich für den dritten Fall, wo die Ebene parallel zur xy-Ebene liegt, ihre Gleichung

$$z = c$$

und p_z ihre Enfernung vom Koordinatenanfange ist,

$$10)\quad p_z = \frac{c\delta}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \quad \cos(p_z x) = 0, \quad \cos(p_z y) = 0, \quad \cos(p_z z) = \frac{\delta}{\sqrt{1-\gamma^2}}.$$

In Verbindung mit Nr. 7) führen die Gleichungen 8), 9) und 10) zur Kenntnis der Neigungswinkel einer beliebigen Ebene gegen die Koordinatenebenen. Bezeichnen wir die Neigungswinkel der Ebene 1) gegen die Ebenen yz, zx und xy der Reihe nach mit Θ_x, Θ_y, Θ_z, so ist Θ_x einerlei mit dem Winkel zwischen den auf jenen Ebenen senkrechten Geraden p und p_x, überhaupt

$$\Theta_x = \angle(pp_x), \qquad \Theta_y = \angle(pp_y), \qquad \Theta_z = \angle(pp_z);$$

man findet nun $\cos\Theta_x = \cos(pp_x)$ nach Formel 5) im Anhang zum ersten Kapitel mittels der Substitutionen $r = p$, $r = p_x$,

$$\xi = \cos(px), \qquad \eta = \cos(py), \qquad \zeta = \cos(pz),$$
$$\xi_1 = \cos(p_x x), \qquad \eta_1 = \cos(p_x y), \qquad \zeta_1 = \cos(p_x z),$$

wobei gleichzeitig die Werte der rechter Hand stehenden Cosinus den Gleichungen 7) und 8) zu entnehmen sind. Auf analoge Weise bestimmen sich $\cos\Theta_y$ und $\cos\Theta_z$, überhaupt gelangt man durch die angedeutete leichte Rechnung zu den folgenden Formeln:

$$11)\quad \begin{cases} \cos\Theta_x = \dfrac{A(1-\alpha^2) - B(\gamma - \alpha\beta) - C(\beta - \gamma\alpha)}{E\sqrt{1-\alpha^2}}, \\ \cos\Theta_y = \dfrac{B(1-\beta^2) - C(\alpha - \beta\gamma) - A(\gamma - \alpha\beta)}{E\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \cos\Theta_z = \dfrac{C(1-\gamma^2) - A(\beta - \gamma\alpha) - B(\alpha - \beta\gamma)}{E\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{cases}$$

Nach den vorigen Erörterungen ist leicht einzusehen, dass alle diejenigen auf die Ebene bezüglichen Formeln, in denen die Stellungswinkel nicht vorkommen, ebenso für das rechtwinklige als für ein schiefwinkliges Koordinatensystem gelten. Daher bleibt auch der gesamte Inhalt der §§ 11, 12, 13 und 14 für jedes Koordinatensystem wörtlich derselbe, und es sind im folgenden nur diejenigen Untersuchungen von neuem aufzunehmen, bei denen wegen des Auftretens der Koordinatenwinkel eine Änderung notwendig ist.

II. Senkrechte Lage einer Geraden gegen eine Ebene.

Wenn eine Ebene, deren Gleichung

$$1)\qquad Ax + By + Cz = D$$

heissen möge, normal zu einer durch die Gleichungen

$$2)\qquad y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

bestimmten Geraden liegen soll, so müssen die Stellungswinkel der Ebene der Reihe nach dieselben sein, wie die Richtungswinkel der Geraden; es gelten daher, wenn die vom Koordinatenanfange auf die Ebene herabgelassene Senkrechte mit p und die Gerade mit s_1 bezeichnet wird, die Gleichungen

$$3)\quad \cos(px) = \cos(s_1 x), \quad \cos(py) = \cos(s_1 y), \quad \cos(pz) = \cos(s_1 z).$$

Unter Benutzung der schon früher gebrauchten Abkürzungen

$$\cos(xy) = \gamma, \quad \cos(zx) = \beta, \quad \cos(yz) = \alpha,$$

$$\delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

$$E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 - 2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\gamma\alpha)CA - 2(\gamma-\alpha\beta)AB,$$

$$D_1^2 = 1 + B_1^2 + C_1^2 + 2\alpha B_1 C_1 + 2\beta C_1 + 2\gamma B_1$$

sind die Stellungswinkel der Ebene durch die Formeln

$$\cos(px) = \frac{A\delta}{E}, \quad \cos(py) = \frac{B\delta}{E}, \quad \cos(pz) = \frac{C\delta}{E},$$

und die Richtungswinkel der Geraden durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\cos(s_1 x) = \frac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{D_1},$$

$$\cos(s_1 y) = \frac{B_1 + \gamma + C_1\alpha}{D_1},$$

$$\cos(s_1 z) = \frac{C_1 + \beta + B_1\alpha}{D_1}.$$

Bildet man aus diesen Werten die in Nr. 3) erwähnten Gleichungen, so kann man letztere leicht auf folgende Form bringen:

$$4) \quad \begin{cases} \dfrac{D_1\delta}{E} = \dfrac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{A} \\ \qquad = \dfrac{B_1 + \gamma + C_1\alpha}{B} = \dfrac{C_1 + \beta + B_1\alpha}{C}, \end{cases}$$

und sie sind die analytischen Bedingungen für die gegenseitige senkrechte Lage der Ebene und der Geraden. Zu bemerken ist übrigens, dass von den Gleichungen 3) oder den damit identischen drei Gleichungen in Nr. 4) bereits zwei ausreichen, um die erwähnte Lage festzustellen; da nämlich die Richtung einer Geraden (p oder s_1) schon durch zwei Richtungswinkel bestimmt wird, so ist jede der Gleichungen 3) eine Folge der beiden übrigen, und eben deswegen braucht man auch von den Gleichungen 4) nur zwei beizubehalten. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass man den ersten Quotienten rechter Hand mit den beiden übrigen Quotienten vergleicht; man hat so

$$5) \quad \frac{B}{A} = \frac{B_1 + C_1\alpha + \gamma}{1 + B_1\gamma + C_1\beta}, \quad \frac{C}{A} = \frac{C_1 + B_1\alpha + \beta}{1 + B_1\gamma + C_1\beta}$$

oder auch, wenn man die Brüche wegschafft und die gleichartigen Grössen vereinigt:

$$6) \quad \begin{cases} (A - B\gamma)B_1 + (A\alpha + B\beta)C_1 = B - A\gamma, \\ (A\alpha - C\gamma)B_1 + (A - C\beta)C_1 = C - A\beta. \end{cases}$$

Hieran knüpfen sich die folgenden zwei Aufgaben.

α. Durch einen gegebenen Punkt eine Normalebene zu einer gegebenen Geraden zu legen. Die Koordinaten des

gegebenen Punktes mögen f, g, h, die Gleichungen der gegebenen Geraden

$$7) \qquad y = B_1 x + b_1, \quad z = C_1 x + c_1$$

sein, und die Gleichung der gesuchten Ebene heisse

$$Ax + By + Cz = D.$$

Da letztere durch den Punkt fgh gehen soll, so hat man erstlich

$$Af + Bg + Ch = D$$

und durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorigen ergiebt sich nach Division mit A

$$8) \qquad x - f + \frac{B}{A}(y - g) + \frac{C}{A}(z - h) = 0;$$

dies ist immer noch die Gleichung der gesuchten Ebene, nur unter Einrechnung der ersten angegebenen Bedingung. Die senkrechte Lage der Geraden gegen die Ebene verlangt ferner das Stattfinden der Gleichungen 5); setzt man die hierdurch bestimmten Werte von $\frac{B}{A}$ und $\frac{C}{A}$ in die Gleichung 8) ein, so erhält man nach Wegschaffung der Brüche

$$9) \quad \begin{cases} (1 + B_1\gamma + C_1\beta)(x - f) \\ + (B_1 + C_1\alpha + \gamma)(y - g) + (C_1 + B_1\alpha + \beta)(z - h) = 0 \end{cases}$$

als Gleichung der verlangten Ebene.

Die hiermit bestimmte Ebene schneidet die gegebene Gerade in einem Punkte, dessen Koordinaten x_0, y_0, z_0 sich mittels der Bemerkung finden lassen, dass sie den Gleichungen 7) und 9) gleichzeitig genügen müssen, weil der Punkt $x_0 y_0 z_0$ sowohl der Ebene als der Geraden angehört; schreiben wir also in 7) und 9) x_0, y_0, z_0 für x, y, z, so haben wir drei Gleichungen ersten Grades zur Bestimmung der gesuchten Koordinaten. Diese Andeutung möge genügen, da die Rechnung keine Schwierigkeiten darbietet. Endlich bestimmt sich noch die Entfernung der Punkte $x_0 y_0 z_0$ und fgh mittels der bekannten Formel

$$\begin{aligned} e^2 = {} & (x_0 - f)^2 + (y_0 - g)^2 + (z_0 - h)^2 \\ & + 2(x_0 - f)(y_0 - g)\gamma + 2(z_0 - h)(x_0 - f)\beta + 2(y_0 - g)(z_0 - h)\alpha, \end{aligned}$$

in welche man die auf die erwähnte Weise gefundenen Werte von x_0, y_0 und z_0 substituieren kann.

β. **Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene.** Die gegebene Ebene habe zur Gleichung

$$10)\qquad Ax + By + Cz = D,$$

die Koordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen und durch ihn werde senkrecht zur Ebene eine Gerade gelegt, deren Gleichungen wir mit

$$11)\qquad y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1$$

bezeichnen. Die Bedingung, dass diese Gerade durch den Punkt fgh gehen soll, liefert die Gleichungen

$$g = B_1 f + b_1, \qquad h = C_1 f + c_1,$$

welche, mit den vorigen verbunden,

$$12)\qquad y - g = B_1 (x - f), \qquad z - h = C_1 (x - f)$$

als Gleichungen der gesuchten Normalen geben. Um die noch übrigen Unbekannten B_1 und C_1 zu bestimmen, erinnern wir an die Gleichungen 6), welche die senkrechte Lage der Geraden gegen die Ebene ausdrücken; setzen wir zur Abkürzung

$$13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = (1 - \alpha^2) A - (\gamma - \alpha\beta) B - (\beta - \gamma\alpha) C, \\ \mathfrak{B} = (1 - \beta^2) B - (\alpha - \beta\gamma) C - (\gamma - \alpha\beta) A, \\ \mathfrak{C} = (1 - \gamma^2) C - (\beta - \gamma\alpha) A - (\alpha - \beta\gamma) B, \end{cases}$$

so erhalten wir durch Auflösung der Gleichungen 6) die Werte

$$B_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}, \qquad C_1 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}},$$

mithin sind die Gleichungen der verlangten Normalen

$$14)\qquad \frac{x - f}{\mathfrak{A}} = \frac{y - g}{\mathfrak{B}} = \frac{z - h}{\mathfrak{C}}.$$

Um den Durchschnitt dieser Geraden mit der Ebene, d. h. den Fusspunkt des vom Punkte fgh auf die Ebene herabgelassenen Perpendikels zu finden, bemerken wir, dass die Koordinaten jenes Punktes, welche x_1, y_1, z_1 heissen mögen, den Gleichungen 10) und 14) zusammen genügen müssen; durch Auflösung derselben ergeben sich die Werte:

$$15)\qquad \begin{cases} x_1 = f + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C}}\, \mathfrak{A}, \\[2ex] y_1 = g + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C}}\, \mathfrak{B}, \\[2ex] z_1 = h + \dfrac{D - (Af + Bg + Ch)}{A\mathfrak{A} + B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C}}\, \mathfrak{C}. \end{cases}$$

Der in den Quotienten vorkommende gemeinschaftliche Nenner $A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}$ ist übrigens einerlei mit der anfangs dieses Abschnittes erwähnten Grösse E^2.

Endlich können wir noch die Entfernung der Punkte fgh und $x_1y_1z_1$, d. h. den Abstand des Punktes fgh von der gegebenen Ebene bestimmen; bezeichnen wir ihn mit q, so ist

$$q^2=(x_1-f)^2+(y_1-g)^2+(z_1-h)^2$$
$$+2(x_1-f)(y_1-g)\gamma+2(z_1-h)(x_1-f)\beta+2(y_1-g)(z_1-h)\alpha,$$

wo noch die Werte von x_1, y_1, z_1 aus Nr. 15) einzusetzen sind. Um diese Substitution bequem ausführen zu können, setzen wir zuerst, wie schon erwähnt,

$$A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}=E^2,$$

und

$$D-(Af+Bg+Ch)=\varDelta;$$

dies giebt bei Absonderung der gemeinschaftlichen Faktoren

$$q^2=\frac{\varDelta^2}{E^4}(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2+2\mathfrak{A}\mathfrak{B}\gamma+2\mathfrak{C}\mathfrak{A}\beta+2\mathfrak{B}\mathfrak{C}\alpha),$$

wobei für den Augenblick der Parentheseninhalt Σ, mithin die Formel

$$16)\qquad q^2=\frac{\varDelta^2}{E^4}\Sigma$$

heissen möge. Wollte man nun, wie es als das Nächstliegende erscheint, den Ausdruck Σ dadurch auf seine einfachste Form bringen, dass man die Werte von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ substituierte und die gleichartigen Grössen vereinigte, so würde man auf eine äusserst weitläufige Rechnung eingehen müssen, bei welcher sich das einfache Endresultat nicht leicht absehen liesse. Dagegen führt kurz die Bemerkung zum Ziele, dass die Grössen E und Σ zwar von A, B, C, α, β, γ, aber nicht von f, g, h abhängig sind, dass sie folglich für eine bestimmte Ebene dieselben bleiben, wo auch der Punkt fgh liegen möge. Nehmen wir speziell $f=g=h=0$, so wird $\varDelta=D$, $q=p$, und die aus Nr. 16) entspringende Gleichung

$$p^2=\frac{D^2}{E^4}\Sigma$$

muss jetzt mit der früheren Gleichung [S. 99, Formel 7)]

$$p^2=\frac{D^2\delta^2}{E^2}$$

übereinstimmen. Die Vergleichung liefert den Wert $\Sigma = \delta^2 E^2$ und aus der Formel 16) ergiebt sich nun

$$17) \qquad q = \frac{D - (Af + Bg + Ch)}{E}\,\delta.$$

Nehmen wir, wie früher, die Grössen δ und E, welche durch Wurzelziehung bestimmt werden, im absoluten Sinne, so ist q positiv oder negativ, jenachdem $D - (Af + Bg + Ch)$ positiv oder negativ ausfällt; das Perpendikel q erhält demnach das positive Vorzeichen, wenn sich der Punkt fgh auf derselben Seite der Ebene befindet, wie der Koordinatenanfang, das negative Zeichen, wenn fgh und der Koordinatenanfang zu entgegengesetzten Seiten der Ebene liegen.

γ. Abstand einer Ebene von einer ihr parallelen Geraden. Wenn die Gerade, deren Gleichungen

$$y = B'x + b', \qquad z = C'x + c'$$

sein mögen, parallel zu der Ebene 1) liegt, so hat man erstens

$$A + BB' + CC' = 0,$$

und für irgend einen Punkt fgh derselben Geraden gelten die Gleichungen

$$g = B'f + b', \qquad h = C'f + c'.$$

Die Entfernung des Punktes fgh von der gegebenen Ebene ist einerlei mit dem Abstande der Geraden von jener Ebene; man hat daher nach Formel 17) zufolge der Werte von g und h

$$q = \frac{[D - (A + BB' + CC')f + Bb' + Cc']}{E}\,\delta,$$

und bei Rücksicht auf die parallele Lage der Geraden gegen die Ebene

$$18) \qquad q = \frac{D - (Bb' + Cc')}{E}\,\delta.$$

Die Vorzeichen von q befolgen selbstverständlich die nämliche Regel wie vorhin.

III. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene.

Die Gleichungen der Ebene und der Geraden mögen wie bisher sein

$$1) \qquad Ax + By + Cz = D,$$
$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1;$$

ferner bedeute p das vom Koordinatenanfang auf die Ebene gefällte Perpendikel, s_1 eine durch den Koordinatenanfang gelegte Parallele zur Geraden, endlich ω den Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene. Es ist nun ω das Komplement des Winkels zwischen p und s_1, mithin

$$sin\,\omega = cos\,(p s_1)$$

und nach Formel 5) im Anhange zum ersten Kapitel

$$2)\quad sin\,\omega = \frac{1}{\delta^2}[(1-\alpha^2)\xi\xi_1 + (1-\beta^2)\eta\eta_1 + (1-\gamma^2)\zeta\zeta_1 \\ - (\alpha-\beta\gamma)(\eta\zeta_1+\eta_1\zeta) - (\beta-\gamma\alpha)(\zeta\xi_1+\zeta_1\xi) \\ - (\gamma-\alpha\beta)(\xi\eta_1+\xi_1\eta)],$$

worin δ, ξ, η, ζ etc. folgende Bedeutungen haben:

$$3)\quad \begin{cases} \delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \\ \xi = cos\,(px), \quad \eta = cos\,(py), \quad \zeta = cos\,(pz), \\ \xi_1 = cos\,(s_1 x), \quad \eta_1 = cos\,(s_1 y), \quad \zeta_1 = cos\,(s_1 z). \end{cases}$$

Die Werte der hier vorkommenden Cosinus sind unmittelbar bekannt; nach Nr. 7) im Abschnitt I ist nämlich

$$\xi = \frac{A\delta}{E}, \quad \eta = \frac{B\delta}{E}, \quad \zeta = \frac{C\delta}{E},$$

$$4)\quad \begin{cases} E^2 = (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 \\ \quad - 2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\gamma\alpha)CA - 2(\gamma-\alpha\beta)AB; \end{cases}$$

ferner hat man nach Formel 4) im Anhang zum zweiten Kapitel

$$\xi_1 = \frac{1 + B_1\gamma + C_1\beta}{D_1},$$

$$\eta_1 = \frac{B_1 + C_1\alpha + \gamma}{D_1},$$

$$\zeta_1 = \frac{C_1 + B_1\alpha + \beta}{D_1},$$

und darin

$$5)\quad D_1^2 = 1 + B_1^2 + C_1^2 + 2\alpha B_1 C_1 + 2\gamma B_1 + 2\beta C_1.$$

Substituiert man die für ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 angegebenen Werte in die Formel 1) und fasst die gleichartigen Glieder zusammen, so findet man, dass die Koeffizienten von

$$AB_1, \quad AC_1, \quad BC_1, \quad CB_1, \quad B, \quad C$$

verschwinden und dass folgender Ausdruck übrig bleibt:

$$\sin\omega = \frac{A}{\delta E D_1}\{1-\alpha^2-\beta(\beta-\gamma\alpha)-\gamma(\gamma-\alpha\beta)\}$$
$$+\frac{BB_1}{\delta E D_1}\{1-\beta^2-\alpha(\alpha-\beta\gamma)-\gamma(\gamma-\alpha\beta)\}$$
$$+\frac{CC_1}{\delta E D_1}\{1-\gamma^2-\alpha(\alpha-\beta\gamma)-\beta(\beta-\gamma\alpha)\}.$$

Der Inhalt jeder der drei Parenthesen ist derselbe, nämlich

$$1+2\alpha\beta\gamma-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=\delta^2,$$

die obige Formel wird daher zur folgenden:

6) $$\sin\omega = \frac{A+BB_1+CC_1}{ED_1}\,\delta.$$

Als spezielle Fälle hiervon ergeben sich die Neigungswinkel der Geraden gegen die Koordinatenebenen. Sind nämlich ω_x, ω_y, ω_z die Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebenen yz, zx, xy, so ist im ersten Falle $A=1$, $B=0$, $C=0$, im zweiten $A=0$, $B=1$, $C=0$ und im dritten $A=0$, $B=0$, $C=1$; man erhält mittels dieser Spezialisierungen

7) $$\begin{cases} \sin\omega_x = \dfrac{\delta}{D_1\sqrt{1-\alpha^2}}, \quad \sin\omega_y = \dfrac{B_1\delta}{D_1\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \sin\omega_z = \dfrac{C_1\delta}{D_1\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{cases}$$

IV. Senkrechte Lage zweier Ebenen.

Lässt man von irgend einem Punkte P_1 einer Ebene $\mathfrak{E}_1$ eine Senkrechte p auf eine andere Ebene $\mathfrak{E}$ herab, so liegt p entweder in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ selbst oder schneidet $\mathfrak{E}$; im ersten Falle sind die beiden Ebenen senkrecht zueinander, im zweiten nicht. Um dieses geometrische Kennzeichen analytisch auszudrücken, bezeichnen wir mit

1) $$Ax+By+Cz=D$$

die Gleichung der Ebene $\mathfrak{E}$, mit

2) $$A_1x+B_1y+C_1z=D_1$$

die der Ebene $\mathfrak{E}_1$, und mit x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines der letzteren Ebene angehörigen Punktes, für welchen also die Gleichung

3) $$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1=D_1$$

besteht. Nach Formel 14) in Abschnitt II sind die Gleichungen einer vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ auf die Ebene $\mathfrak{E}$ herabgelassenen Senkrechten

$$y - y_1 = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}(x - x_1), \qquad z - z_1 = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}(x - x_1),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt war

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &= (1 - \alpha^2) A - (\gamma - \alpha\beta) B - (\beta - \gamma\alpha) C,\\ \mathfrak{B} &= (1 - \beta^2) B - (\alpha - \beta\gamma) C - (\gamma - \alpha\beta) A,\\ \mathfrak{C} &= (1 - \gamma^2) C - (\beta - \gamma\alpha) A - (\alpha - \beta\gamma) B;\end{aligned}$$

soll nun das erwähnte Perpendikel in der Ebene $\mathfrak{E}_1$ enthalten sein, so gehören dazu die Bedingungen

$$4)\quad \begin{cases} A_1 + B_1 \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} + C_1 \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = 0, \\ B_1 \left(y_1 - \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} x_1\right) + C_1 \left(z_1 - \dfrac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} x_1\right) = D_1. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen ist die zweite überflüssig, weil sie sich ergiebt, wenn man die erste Gleichung in Nr. 4) mit x_1 multipliziert und von Nr. 3) abzieht; zu dem nämlichen Resultate führt auch die geometrische Bemerkung, dass p mit $\mathfrak{E}_1$ bereits den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gemein hat, also nur noch parallel mit $\mathfrak{E}_1$ zu sein braucht, um ganz in diese Ebene zu fallen. Als Bedingung für die senkrechte Lage der beiden Ebenen bleibt demnach die eine Gleichung 4) oder

$$5)\qquad \mathfrak{A} A_1 + \mathfrak{B} B_1 + \mathfrak{C} C_1 = 0.$$

Will man die abgekürzten Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ vermeiden, so ist zu schreiben

$$6)\quad \begin{cases} (1 - \alpha^2) A A_1 + (1 - \beta^2) B B_1 + (1 - \gamma^2) C C_1 \\ - (\alpha - \beta\gamma)(B C_1 + B_1 C) - (\beta - \gamma\alpha)(C A_1 + C_1 A) \\ - (\gamma - \alpha\beta)(A B_1 + A_1 B) \\ = 0. \end{cases}$$

Hieran knüpfen sich folgende Aufgaben.

α. Durch zwei gegebene Punkte eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Nennen wir f_1, g_1, h_1; f_2, g_2, h_2 die Koordinaten der gegebenen Punkte,

$$7)\qquad Ax + By + Cz = D$$

die Gleichung der gegebenen und

$$8)\qquad Lx + My + Nz = 1$$

die der gesuchten Ebene, so haben wir erstens, weil die Punkte $f_1 g_1 h_1$ und $f_2 g_2 h_2$ in dieser Ebene liegen sollen,

$$9) \quad \begin{cases} Lf_1 + Mg_1 + Nh_1 = 1, \\ Lf_2 + Mg_2 + Nh_2 = 1, \end{cases}$$

und wegen der senkrechten Lage der beiden Ebenen

$$10) \quad \mathfrak{A}L + \mathfrak{B}M + \mathfrak{C}N = 0.$$

Die Bestimmung der Unbekannten L, M, N erfordert nun die Auflösung der drei Gleichungen 9) und 10), was weiter keine Schwierigkeit hat. Nach Substitution der für L, M und N gefundenen Werte kann man die Gleichung 8) auf folgende Form bringen:

$$11) \quad \begin{cases} [\mathfrak{B}(h_1 - h_2) - \mathfrak{C}(g_1 - g_2)]x + [(\mathfrak{C}(f_1 - f_2) - \mathfrak{A}(h_1 - h_2)]y \\ \qquad + [\mathfrak{A}(g_1 - g_2) - \mathfrak{B}(f_1 - f_2)]z \\ = \mathfrak{A}(g_1 h_2 - g_2 h_1) + \mathfrak{B}(h_1 f_2 - h_2 f_1) + \mathfrak{C}(f_1 g_2 - f_2 g_1). \end{cases}$$

Die beiden Ebenen schneiden sich in einer Geraden, von welcher alle Punkte beiden Ebenen gleichzeitig angehören; sind also x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes der Durchschnittslinie, so müssen diese den Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D,$$
$$Fx + Gy + Hz = K$$

zusammen genügen, wobei die zweite Gleichung nur eine abgekürzte Schreibweise der Gleichung 11) sein soll. Die Gleichungen der Projektionen der Durchschnittslinie finden sich, wenn man aus den vorstehenden Gleichungen einmal z und das andere Mal y eliminiert; sie lauten

$$12) \quad \begin{cases} (CF - AH)x + (CG - BH)y = CK - DH, \\ (BF - AG)x + (BH - CG)z = BK - DG. \end{cases}$$

Auch die Richtungswinkel dieser Geraden können leicht ermittelt werden, sobald man den Gleichungen 12) die gewöhnliche Form der Gleichungen einer Geraden erteilt.

β. Durch eine gegebene Gerade eine Normalebene zu einer gegebenen Ebene zu legen. Die Gleichungen der gegebenen Ebene, der Geraden und der gesuchten Ebene mögen der Reihe nach sein:

$$Ax + By + Cz = D,$$
$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$
$$Lx + My + Nz = 1;$$

da die letztere Ebene die Gerade in sich enthalten soll, so müssen zunächst die Bedingungen

$$13)\qquad L + B_1 M + C_1 N = 0, \qquad b_1 M + c_1 N = 1$$

erfüllt sein; hierzu kommt als Bedingungsgleichung für die senkrechte Lage beider Ebenen gegeneinander:

$$14)\qquad \mathfrak{A} L + \mathfrak{B} M + \mathfrak{C} N = 0.$$

Die Gleichungen 13) und 14) bestimmen die Werte von L, M und N, nach Substitution derselben ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$15)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{B} C_1 - \mathfrak{C} B_1) x - (\mathfrak{A} C_1 - \mathfrak{C}) y + (\mathfrak{A} B_1 - \mathfrak{B}) z \\ \qquad = (\mathfrak{A} B_1 - \mathfrak{B}) c_1 - (\mathfrak{A} C_1 - \mathfrak{C}) b_1. \end{cases}$$

Den Durchschnitt der neuen Ebene mit der gegebenen Ebene kann man auf gleiche Weise wie bei der vorigen Aufgabe ermitteln; man erhält dann die Gleichungen der rechtwinkligen Projektion einer gegebenen Geraden auf eine bestimmte Ebene.

γ. Durch einen gegebenen Punkt eine Ebene zu legen, welche einer bestimmten Geraden parallel und senkrecht zu einer vorgeschriebenen Ebene ist. Die Koordinaten des gegebenen Punktes mögen f, g, h heissen, die Gleichungen der Geraden und der Ebene seien

$$y = B_1 x + b_1, \qquad z = C_1 x + c_1,$$
$$Ax + By + Cz = D,$$

endlich bezeichne

$$16)\qquad Lx + My + Nz = 1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene. Die Bedingung, dass letztere den Punkt fgh enthalten soll, wird ausgedrückt durch die Gleichung

$$Lf + Mg + Nh = 1;$$

wir ziehen dieselbe von Nr. 16) ab, dividieren mit L und setzen $\frac{M}{L} = P$, $\frac{N}{L} = Q$; es bleibt

$$17)\qquad x - f + P(y - g) + Q(z - h) = 0$$

und dies ist immer noch die Gleichung der verlangten Ebene. Die senkrechte Lage derselben gegen die gegebene Ebene und ihr Parallelismus zur gegebenen Geraden geben die weiteren Gleichungen

$$\mathfrak{A} L + \mathfrak{B} M + \mathfrak{C} N = 0, \qquad L + B_1 M + C_1 N = 0,$$

die wir gleichfalls durch L dividieren. Wir haben jetzt

$$\mathfrak{B}P + \mathfrak{C}Q = -\mathfrak{A}, \quad B_1 P + C_1 Q = -1,$$

hieraus finden sich P und Q, durch deren Substitution in Nr. 17) die Gleichung der verlangten Ebene zum Vorschein kommt, nämlich

18) $$(\mathfrak{B}C_1 - \mathfrak{C}B_1)(x-f) - (\mathfrak{A}C_1 - \mathfrak{C})(y-g) + (\mathfrak{A}B_1 - \mathfrak{B})(z-h) = 0.$$

Der Durchschnitt der neuen mit der gegebenen Ebene kann wie bei den vorigen Aufgaben bestimmt werden.

V. Der Winkel zwischen zwei Ebenen.

Wie bisher mögen die Gleichungen der beiden Ebenen sein

1) $$\begin{cases} Ax + By + Cz = D, \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1, \end{cases}$$

und es bezeichne Θ den von diesen Ebenen eingeschlossenen Winkel; bekanntlich ist derselbe einerlei mit dem Winkel zwischen den Senkrechten p und p_1, welche vom Anfangspunkte der Koordinaten auf die Ebenen herabgelassen werden können. Bezeichnen wir, wie früher, die Cosinus der Koordinatenwinkel yz, zx, xy mit α, β, γ und die Cosinus der Winkel (px), (py), (pz), $(p_1 x)$, $(p_1 y)$, $(p_1 z)$ der Reihe nach mit ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1, so erhalten wir $\cos\Theta = \cos(pp_1)$ mittels der Formel 5) in Anhang I, nämlich

2) $$\begin{aligned} \delta^2 \cos\Theta = {} & (1-\alpha^2)\xi\xi_1 + (1-\beta^2)\eta\eta_1 + (1-\gamma^2)\zeta\zeta_1 \\ & - (\alpha - \beta\gamma)(\eta\zeta_1 + \eta_1\zeta) - (\beta - \gamma\alpha)(\zeta\xi_1 + \zeta_1\xi) \\ & - (\gamma - \alpha\beta)(\xi\eta_1 + \xi_1\eta), \end{aligned}$$

worin δ^2 seine gewöhnliche durch die Formel

$$\delta^2 = 1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

angegebene Bedeutung hat In die obige Gleichung haben wir noch die Werte der sechs Cosinus ξ, $\eta \ldots \zeta_1$ zu substituieren; diese sind nach Nr. 7) in Abschnitt I dieses Anhanges

$$\xi = \frac{A\delta}{E}, \quad \eta = \frac{B\delta}{E}, \quad \zeta = \frac{C\delta}{E},$$

$$\xi_1 = \frac{A_1\delta}{E_1}, \quad \eta_1 = \frac{B_1\delta}{E_1}, \quad \zeta_1 = \frac{C_1\delta}{E_1},$$

worin

3) $$\begin{aligned} E^2 = {} & (1-\alpha^2)A^2 + (1-\beta^2)B^2 + (1-\gamma^2)C^2 \\ & - 2(\alpha-\beta\gamma)BC - 2(\beta-\gamma\alpha)CA - 2(\gamma-\alpha\beta)AB, \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} E_1^2 = {} & (1-\alpha^2)A_1^2 + (1-\beta^2)B_1^2 + (1-\gamma^2)C_1^2 \\ & - 2(\alpha-\beta\gamma)B_1C_1 - 2(\beta-\gamma\alpha)C_1A_1 - 2(\gamma-\alpha\beta)A_1B_1. \end{aligned}$$

Setzen wir zur Abkürzung

5) $$F^2 = (1-\alpha^2) AA_1 + (1-\beta^2) BB_1 + (1-\gamma^2) CC_1 - (\alpha - \beta\gamma)(BC_1 + B_1 C) - (\beta - \gamma\alpha)(CA_1 + C_1 A) - (\gamma - \alpha\beta)(AB_1 + A_1 B),$$

so erhalten wir aus Nr. 2):

6) $$\cos\Theta = \frac{F^2}{EE_1}.$$

Die früher angegebenen Kriterien für die parallele sowie für die senkrechte Lage zweier Ebenen können hiernach verifiziert werden.

Viertes Kapitel.

Transformation der Koordinaten.

§ 20.

Die allgemeinen Fundamentalformeln.

Wenn drei in einem Punkte zusammentreffende Ebenen auf ein beliebiges Koordinatensystem bezogen, also ihrer Lage nach gegeben sind, so können dieselben auch als neue Koordinatenebenen genommen werden, und es entsteht dann die Frage nach den neuen Koordinaten, welche irgend ein Punkt im Raume bei seiner Beziehung auf das zweite Koordinatensystem erhält. Die primitiven Koordinaten des Punktes P mögen x, y, z, die sekundären Koordinaten desselben x', y', z' heissen, ferner nennen wir a, b, c die auf das ursprüngliche System bezogenen Koordinaten des neuen Koordinatenanfanges, endlich p_x, p_y, p_z die auf den Ebenen yz, zx, xy errichteten Normalen, durch deren Richtungen sich die Stellungen der entsprechenden Ebenen bestimmen.

I. Am einfachsten gestaltet sich die Koordinatenverwandlung in dem Falle, wo die neuen Ebenen parallel zu den ursprünglichen liegen, also auch die gleichnamigen Achsen beider Systeme parallel sind; wir nehmen dann die positiven x' in demselben Sinne (d. h. nach derselben Gegend des Raumes hin) wie die positiven x, ebenso $+y'$ im Sinne von $+y$ und $+z'$ im Sinne von $+z$. Hieraus folgt unmittelbar, dass beide Koordinatensysteme zur Kongruenz gebracht werden können, wenn man die yz-Ebene in der Richtung der positiven x parallel mit sich selbst um a verschiebt und wenn man gleichzeitig mit der zx-Ebene eine ähnliche Verschiebung um b, sowie mit der xy-Ebene eine Verschiebung um c vornimmt Demgemäss hat man die Gleichungen

$$1) \qquad x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z',$$

welche ganz allgemein giltig sind, wenn man immer die möglichen verschiedenen Zeichen der darin vorkommenden Koordinaten berücksichtigt.

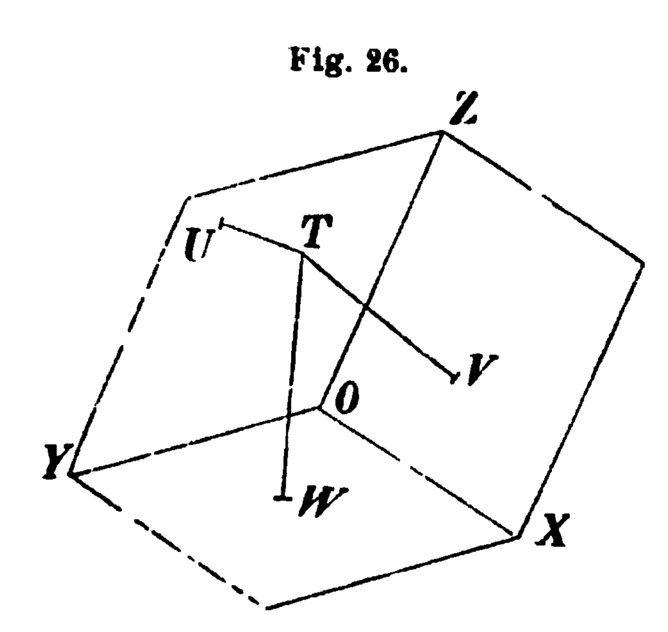
II. Wir betrachten zweitens den Fall, wo beide Koordinatensysteme einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt besitzen, ohne dass aber irgend eine der neuen Achsen mit einer Achse des primitiven Systemes zusammenfällt. Wo nun auch der Punkt xyz oder $x'y'z'$ liegen möge, so ist doch sein Radiusvektor r immer derselbe, gleichgiltig, ob man ihn auf das eine oder andere Koordinatensystem bezieht; eben deswegen ist auch die rechtwinklige Projektion von r auf irgend eine Gerade s in beiden Fällen die nämliche, was wir durch die (wegen $r = r'$) identische Gleichung $r \cos(rs) = r' \cos(r's)$ ausdrücken können. Projizieren wir statt r die aus x, y, z bestehende gebrochene Linie, ebenso statt r' die aus x', y', z' zusammengesetzte gebrochene Linie, so verwandelt sich die vorige Gleichung in die nachstehende:

$$2) \qquad \begin{cases} x \cos(xs) + y \cos(ys) + z \cos(zs) \\ = x' \cos(x's) + y' \cos(y's) + z' \cos(z's), \end{cases}$$

welche als die Quelle aller folgenden Formeln zu betrachten ist.

Zunächst wollen wir die beliebige Gerade s der Reihe nach mit den auf den Ebenen yz, zx, xy errichteten Senkrechten p_x, p_y, p_z zusammenfallen lassen. Dabei unterscheiden wir an diesen Normalen eine positive und negative Seite; die positive Seite von p_x soll nämlich diejenige sein, welche nach der positiven Seite der x gerichtet ist, in gleicher Weise nehmen wir die positiven Seiten von p_y und p_z im Sinne der positiven y resp. z. Dies lässt sich auch so ausdrücken: wenn man von einem Punkte T, dessen drei primitive Koordinaten positiv sind, welcher also

Fig. 26.



innerhalb des von den positiven Teilen der Koordinatenebenen gebildeten Körperwinkels liegt, Senkrechte TU, TV, TW auf die Koordinatenebenen herablässt, so ist $p_x = UT$ positiv in der Richtung von U nach T, und dem entsprechend $p_y = VT$, $p_z = WT$.

Ferner soll im folgenden der Winkel zwischen zwei Geraden immer als Winkel zwischen deren positiven Teilen verstanden und von 0^0 bis 180^0 gezählt werden. Hiernach ist

$$\begin{aligned}
&\text{für } s = p_x, && \angle(ys) = \angle(zs) = 90^0,\\
&\text{„} \quad s = p_y, && \angle(zs) = \angle(xs) = 90^0,\\
&\text{„} \quad s = p_z, && \angle(xs) = \angle(ys) = 90^0,
\end{aligned}$$

und aus der Gleichung 2) fliessen jetzt die folgenden Relationen

$$3)\quad \begin{cases}
x\cos(xp_x) = x'\cos(x'p_x) + y'\cos(y'p_x) + z'\cos(z'p_x),\\
y\cos(yp_y) = x'\cos(x'p_y) + y'\cos(y'p_y) + z'\cos(z'p_y),\\
z\cos(zp_z) = x'\cos(x'p_z) + y'\cos(y'p_z) + z'\cos(z'p_z).
\end{cases}$$

Für den Gebrauch dieser Transformationsformeln ist zu merken, dass erstens die linker Hand vorkommenden Winkel (xp_x), (yp_y), $zp_z)$ als bekannt anzusehen sind, weil sie aus den bekannten Koordinatenwinkeln (xy), (zx), (yz) abgeleitet werden können, und dass zweitens die rechter Hand vorkommenden neun Winkel gegeben sein müssen, weil durch sie die Lage der neuen Koordinatenachsen gegen die Normalen p_x, p_y, p_z festgestellt wird. Übrigens bestehen zwischen den genannten neun Winkeln noch drei Gleichungen, nämlich die Relationen, welche überhaupt für je drei Richtungswinkel gelten.

Will man die Anwendung der Normalen p_x, p_y, p_z vermeiden und unmittelbar die Winkel zwischen den sekundären und primitiven Achsen in Rechnung bringen, so braucht man die willkürliche Gerade s nur der Reihe nach mit den ursprünglichen Achsen der x, y und z zusammenfallen zu lassen. Die Gleichung 2) liefert dann die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
&x + y\cos(yx) + z\cos(zx)\\
&\qquad = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x),\\
&x\cos(xy) + y + z\cos(zy)\\
&\qquad = x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y),\\
&x\cos(xz) + y\cos(yz) + z\\
&\qquad = x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z).
\end{aligned}$$

Bezeichnen wir, wie früher, die Cosinus der Koordinatenwinkel (yz), (zx), (xy) mit α, β, γ, den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit δ^2, und setzen wir ferner abkürzend

$$x' \cos(x'x) + y' \cos(y'x) + z' \cos(z'x) = X,$$
$$x' \cos(x'y) + y' \cos(y'y) + z' \cos(z'y) = Y,$$
$$x' \cos(x'z) + y' \cos(y'z) + z' \cos(z'z) = Z,$$

so führt die Auflösung der vorigen drei Gleichungen zu den folgenden Transformationsformeln:

$$4)\quad \begin{cases} x = \dfrac{(1-\alpha^2)X - (\gamma - \alpha\beta)Y - (\beta - \gamma\alpha)Z}{\delta^2}, \\ y = \dfrac{(1-\beta^2)Y - (\alpha - \beta\gamma)Z - (\gamma - \alpha\beta)X}{\delta^2}, \\ z = \dfrac{(1-\gamma^2)Z - (\beta - \gamma\alpha)X - (\alpha - \beta\gamma)Y}{\delta^2}. \end{cases}$$

Von den hierin vorkommenden zwölf Winkeln sind zunächst (xy), (zx) und (yz) unmittelbar bekannt; jede der drei Gruppen

$$\begin{array}{lll} (x'x), & (x'y), & (x'z), \\ (y'x), & (y'y), & (y'z), \\ (z'x), & (z'y), & (z'z) \end{array}$$

enthält die Richtungswinkel einer sekundären Achse gegen die primitiven Achsen; zwischen den Winkeln einer Gruppe besteht also jedesmal die überhaupt für drei Richtungswinkel geltende Gleichung, und demnach dürfen aus jeder Gruppe nur zwei Winkel gegeben werden.

III. Wenn das neue Koordinatensystem dem ursprünglichen weder parallel liegt, noch denselben Anfangspunkt besitzt, so kann man sich durch den Koordinatenanfang O' des sekundären Systems ein drittes System gelegt denken, dessen Achsen den primitiven Koordinatenachsen in gleichem Sinne parallel sind. Die Koordinaten des Punktes xyz in Beziehung auf dieses intermediäre System mögen $x_0 y_0 z_0$ heissen; es ist dann

$$5)\qquad x = a + x_0, \quad y = b + y_0, \quad z = c + z_0.$$

Das intermediäre System der $x_0 y_0 z_0$ hat ferner mit dem System der $x' y' z'$ den Koordinatenanfang gemein und daher sind auf dieses die Formeln 3) oder 4) anwendbar, indem man x_0, y_0, z_0 für x, y, z schreibt. Weil ferner $x_0 // x$, $y_0 // y$, $z_0 // z$, so stimmen die Winkel $(x'x_0)$, $(x'y_0)$ etc. mit den Winkeln $(x'x)$, $(x'y)$ etc. überein und es bedarf daher überall, wo Winkel vorkommen, nicht mehr der Indices. Nach Ermittelung von x_0, y_0, z_0 geben nun die Formeln 5) x, y, z ausgedrückt durch x', y', z'; also erstens, wenn man die

Richtungen der neuen Achsen durch die Winkel zwischen ihnen und den Normalen der ursprünglichen Koordinatenebenen fixiert:

$$6)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{x' \cos(x'p_x) + y' \cos(y'p_x) + z' \cos(z'p_x)}{\cos(xp_x)}, \\ y = b + \dfrac{x' \cos(x'p_y) + y' \cos(y'p_y) + z' \cos(z'p_y)}{\cos(yp_y)}, \\ z = c + \dfrac{x' \cos(x'p_z) + y' \cos(y'p_z) + z' \cos(z'p_z)}{\cos(zp_z)}; \end{cases}$$

zweitens, wenn man die Winkel zwischen den sekundären und primären Achsen in Rechnung bringt und die bereits in II erwähnten Abkürzungen benutzt:

$$7)\quad \begin{cases} x = a + \dfrac{(1-\alpha^2)X - (\gamma - \alpha\beta)Y - (\beta - \gamma\alpha)Z}{\delta^2}, \\ y = b + \dfrac{(1-\beta^2)Y - (\alpha - \beta\gamma)Z - (\gamma - \alpha\beta)X}{\delta^2}, \\ z = c + \dfrac{(1-\gamma^2)Z - (\beta - \gamma\alpha)X - (\alpha - \beta\gamma)Y}{\delta^2}. \end{cases}$$

Diese ganz allgemeinen Formeln können auf ähnliche Weise angewendet werden, wie die entsprechenden spezielleren Formeln der analytischen Geometrie der Ebene. Hat man nämlich zwischen den drei Koordinaten x, y, z eines Punktes eine oder zwei Gleichungen, wodurch entweder eine Fläche oder eine Linie charakterisiert wird, so führt die Substitution der für x, y, z angegebenen Werte zu eben so viel neuen Gleichungen zwischen x', y', z', d. h. zu den Gleichungen der nämlichen Gebilde, bezogen auf das neue Koordinatensystem. Nicht überflüssig ist hierbei die Bemerkung, dass die Werte von x, y, z nur die ersten Potenzen von x', y', z' und keine Produkte von zweien oder dreien dieser Grössen enthalten; infolge dieses Umstandes ist jede resultierende Gleichung zwischen x', y', z' immer von demselben Grade, wie die ursprüngliche Gleichung zwischen x, y und z.

§ 21.

Transformation rechtwinkliger Systeme.

Die überaus häufige und meistens bequeme Anwendung des rechtwinkligen Koordinatensystems erheischt noch eine nähere Untersuchung des speziellen Falles, wo die Systeme xyz und $x'y'z'$ rechtwinklig sind und einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt be-

sitzen. Es ist dann $a=b=c=0$, $\angle(xy)=\angle(zx)=\angle(yz)=90^0$, und überhaupt für jede beliebige Gerade s

$$\angle(sp_x)=\angle(sx),\quad \angle(sp_y)=\angle(sy),\quad \angle(sp_z)=\angle(sz);$$

die Formeln 6) und 7) des vorigen Paragraphen geben jetzt übereinstimmend

$$1)\quad \begin{cases} x = x'\cos(x'x) + y'\cos(y'x) + z'\cos(z'x), \\ y = x'\cos(x'y) + y'\cos(y'y) + z'\cos(z'y), \\ z = x'\cos(x'z) + y'\cos(y'z) + z'\cos(z'z). \end{cases}$$

Zwischen den Cosinus der neun vorkommenden Winkel finden folgende Beziehungen statt: erstens hat man für die drei Richtungswinkel von jeder der neuen Achsen:

$$2)\quad \begin{cases} \cos^2(x'x) + \cos^2(x'y) + \cos^2(x'z) = 1, \\ \cos^2(y'x) + \cos^2(y'y) + \cos^2(y'z) = 1, \\ \cos^2(z'x) + \cos^2(z'y) + \cos^2(z'z) = 1; \end{cases}$$

weil ferner die neuen Koordinatenwinkel $(y'z')$, $(z'x')$ und $(x'y')$ rechte Winkel sein sollen, so ist

$$3)\quad \begin{cases} \cos(y'x)\cos(z'x) + \cos(y'y)\cos(z'y) + \cos(y'z)\cos(z'z) = 0, \\ \cos(z'x)\cos(x'x) + \cos(z'y)\cos(x'y) + \cos(z'z)\cos(x'z) = 0, \\ \cos(x'x)\cos(y'x) + \cos(x'y)\cos(y'y) + \cos(x'z)\cos(y'z) = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt kann man auch von dem Systeme $x'y'z'$ zum Systeme xyz übergehen, indem man jenes als das primitive und dieses als das sekundäre betrachtet; hierzu bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern nur einer gegenseitigen Vertauschung von x mit x', y mit y' und z mit z'; die resultierenden Formeln sind:

$$4)\quad \begin{cases} x' = x\cos(xx') + y\cos(yx') + z\cos(zx'), \\ y' = x\cos(xy') + y\cos(yy') + z\cos(zy'), \\ z' = x\cos(xz') + y\cos(yz') + z\cos(zz'); \end{cases}$$

und zwar gelten für die Richtungswinkel der Achsen von x, y, z gegen die Achsen x', y', z' die Gleichungen

$$5)\quad \begin{cases} \cos^2(xx') + \cos^2(xy') + \cos^2(xz') = 1, \\ \cos^2(yx') + \cos^2(yy') + \cos^2(yz') = 1, \\ \cos^2(zx') + \cos^2(zy') + \cos^2(zz') = 1, \end{cases}$$

endlich, weil die Winkel (yz), (zx) und (xy) rechte Winkel sind,

$$6)\quad \begin{cases} \cos(yx')\cos(zx') + \cos(yy')\cos(zy') + \cos(yz')\cos(zz') = 0, \\ \cos(zx')\cos(xx') + \cos(zy')\cos(xy') + \cos(zz')\cos(xz') = 0, \\ \cos(xx')\cos(yx') + \cos(xy')\cos(yy') + \cos(xz')\cos(yz') = 0. \end{cases}$$

Um kurz zu sein, bezeichnen wir die Cosinus der Richtungswinkel von x' gegen die Achsen der x, y, z der Reihe nach mit α, α', α'', und dementsprechend die Cosinus der Richtungswinkel von y' und z' mit β, β', β'' und γ, γ', γ''; die bisherigen Gleichungen lauten dann:

$$7)\qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'; \end{cases}$$

$$8)\ \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{rcases} \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0; \end{rcases}\ 9)$$

und umgekehrt:

$$10)\qquad \begin{cases} x' = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \\ y' = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \\ z' = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z, \end{cases}$$

$$11)\ \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{rcases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0. \end{rcases}\ 12)$$

An dieses Formelsystem knüpfen sich drei wesentliche Bemerkungen.

a. Durch die Gleichungen 8) und 9) ist ausgesprochen, dass die beiden Koordinatensysteme rechtwinklig sind; das Nämliche liegt in den Gleichungen 11) und 12) ausgedrückt, mithin müssen diese sich aus jenen herleiten lassen. Es ist nichts weniger als überflüssig, dies direkt nachzuweisen, weil man dabei noch einige andere brauchbare Relationen gewinnt.

Aus den beiden letzten Gleichungen in Nr. 9) findet man durch Entwickelung von α' und α''

$$\alpha' = \frac{\beta''\gamma - \beta\gamma''}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}\,\alpha, \qquad \alpha'' = \frac{\beta\gamma' - \beta'\gamma}{\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'}\,\alpha$$

und durch Substitution in die erste der Gleichungen 8)

$$\{(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 + (\beta''\gamma - \beta\gamma'')^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2\}\,\alpha^2 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2.$$

Nun ist der Koeffizient von α^2 identisch mit der Differenz

$$(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2)(\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2) - (\beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'')^2,$$

deren Betrag, zufolge der übrigen Gleichungen in Nr. 8), die Einheit ausmacht; die vorige Gleichung vereinfacht sich demnach zu

$$\alpha^2 = (\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2,$$

und daraus folgen nach dem Obigen die analogen Gleichungen

$$\alpha'^2 = (\beta''\gamma - \beta\gamma'')^2, \qquad \alpha''^2 = (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2.$$

Ähnliche Beziehungen sind leicht für β, β', β'' und γ, γ', γ'' zu erhalten, überhaupt ergiebt sich folgendes System von neuen Gleichungen:

$$13)\quad \begin{cases} \alpha = \pm(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'), & \beta = \pm(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha'), & \gamma = \pm(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'), \\ \alpha' = \pm(\beta''\gamma - \beta\gamma''), & \beta' = \pm(\gamma''\alpha - \gamma\alpha''), & \gamma' = \pm(\alpha''\beta - \alpha\beta''), \\ \alpha'' = \pm(\beta\gamma' - \beta'\gamma), & \beta'' = \pm(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha), & \gamma'' = \pm(\alpha\beta' - \alpha'\beta). \end{cases}$$

Aus der ersten und zweiten der Gleichungen 8) ziehen wir ferner

$$(\alpha'^2 + \alpha''^2)(\beta'^2 - \beta''^2) = (1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)$$

oder

$$\alpha'^2\beta'^2 + \alpha'^2\beta''^2 + \alpha''^2\beta'^2 + \alpha''^2\beta''^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2\beta^2 = 1;$$

substituiert man für $\alpha^2\beta^2$ seinen der letzten Gleichung in Nr. 9) entnommenen Wert, nämlich

$$\alpha'^2\beta'^2 + 2\alpha'\alpha''\beta'\beta'' + \alpha''^2 + \beta''^2,$$

so wird aus der vorigen Gleichung

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 = 1,$$

d. i. unter Rücksicht auf die dritte Gleichung in Nr. 13)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Auf ähnliche Weise, wie hier die erste Gleichung in Nr. 11) abgeleitet wurde, lassen sich die übrigen Gleichungen derselben Gruppe beweisen.

Setzen wir in der soeben entwickelten Formel für α, β, γ ihre nach Nr. 13) bestimmten Werte, so erhalten wir

$$(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma')^2 + (\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha')^2 + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')^2 = 1;$$

die linke Seite ist identisch mit

$$(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2$$

oder vermöge der schon bewiesenen zweiten und dritten Gleichung in Nr. 11) einerlei mit

$$1 - (\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2,$$

und nach Substitution dieses Ausdruckes geht die letzte Gleichung in die dritte Gleichung der Gruppe 12) über. Auf analoge Weise ergeben sich die übrigen Gleichungen derselben Gruppe.

b. Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Frage, ob die Achsen in beiden rechtwinkligen Koordinatensystemen in derselben Ordnung aufeinander folgen oder nicht. Denken wir uns nämlich das sekundäre System so weit herumgewendet, dass die positive

Seite der x-Achse mit der positiven Seite der x'-Achse zusammenfällt, so können wir durch Drehung des sekundären Systems um die x'-Achse auch den positiven Teil der y'-Achse mit dem positiven Teile der y-Achse zur Koïncidenz bringen, und gleichzeitig muss nun die z'-Achse in die z-Achse zu liegen kommen. Dabei sind aber zwei Fälle zu unterscheiden; nämlich entweder fällt die positive Seite der z'-Achse mit der positiven Seite der z-Achse zusammen, oder umgekehrt ist es die negative Seite der z'-Achse, welche auf die positive Seite der z-Achse zu liegen kommt. Im ersten Falle lassen sich beide Systeme zur Kongruenz bringen und mögen homologe Koordinatensysteme heissen, im zweiten Falle können sie nur als symmetrisch-gleiche betrachtet werden, was durch die Bezeichnung symmetrische Koordinatensysteme ausgedrückt werden soll.

Die Formeln 7), 8), 9) beziehen sich, wie aus ihrer Herleitung unmittelbar erhellt, auf beide Arten von Koordinatensystemen; dasselbe gilt von den abgeleiteten Gleichungen 3), letztere enthalten aber das Mittel zur analytischen Sonderung der genannten Fälle, und zwar sind es die doppelten Vorzeichen, wodurch die Unterscheidung herbeigeführt wird. Setzen wir

$$\alpha = \cos 0^0 = 1, \qquad \alpha' = \alpha'' = \cos 90^0 = 0,$$

so fällt x' mit x zusammen, d. h. es wird

$$x' = x;$$

nehmen wir gleichzeitig

$$\beta = 0, \qquad \beta' = 1, \qquad \beta'' = 0,$$

so wird

$$y' = y;$$

bei zwei homologen Systemen muss nun z' mit z zusammenfallen, also

$$\gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = +1,$$
$$z' = z$$

werden, bei zwei symmetrischen Systemen dagegen würde sich

$$\gamma = 0, \qquad \gamma' = 0, \qquad \gamma'' = -1,$$
$$z' = -z$$

ergeben müssen. In der That liefert die letzte Gleichung in Nr. 13) vermöge der für α, α', β, β' angenommenen Spezialwerte $\gamma'' = \pm 1$, und der Vergleich mit dem vorigen lehrt nun, dass das obere Zeichen für homologe, das untere für symmetrische Koordinatensysteme gilt. Durch die nämlichen Substitutionen überzeugt man sich leicht,

dass in den Gleichungen 13) überhaupt immer die positiven Vorzeichen den homologen und die negativen den symmetrischen Koordinatensystemen entsprechen.

c. Da zwischen den neun Cosinus α, α', ... γ'' sechs Gleichungen bestehen, so dürfen nicht mehr als drei derselben willkürlich angenommen werden, und zwar nur solche, die nicht gleichzeitig in einer der sechs Gleichungen 8) oder 11) vorkommen. Drei derartige Grössen sind z. B. α, β', γ''; die Bestimmung der übrigen sechs Grössen geschieht dann auf folgende Weise.

Von der Summe der ersten und zweiten Gleichung in Nr. 8) subtrahieren wir die dritte Gleichung in Nr. 11), ebenso von der Summe der ersten und dritten Gleichung in Nr. 8) die zweite Gleichung in 10), endlich von der Summe der zweiten und dritten Gleichung in 8) die erste Gleichung in 10); wir erhalten so die Relationen

$$14)\qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha'^2 + \beta'^2 = 1 + \gamma''^2, \\ \alpha^2 + \gamma^2 + \alpha''^2 + \gamma''^2 = 1 + \beta'^2, \\ \beta'^2 + \gamma'^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 + \alpha^2, \end{cases}$$

in denen rechter Hand nur bekannte Grössen vorkommen. Nach Nr. 13) haben wir ferner für homologe Systeme:

$$15)\qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = \gamma'', \qquad \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = \beta', \qquad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \alpha,$$

dagegen für symmetrische Systeme:

$$\alpha\beta' - \alpha'\beta = -\gamma'', \quad \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = -\beta', \quad \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = -\alpha,$$

so dass es nur einer Änderung der Vorzeichen von α, β', γ'' bedarf, um zwei homologe durch zwei symmetrische Systeme zu ersetzen. Subtrahieren und addieren wir das Doppelte der Gleichung 15) zu den Gleichungen 14), so finden wir

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta')^2 + (\beta + \alpha')^2 &= (1 - \gamma'')^2, \\ (\alpha + \beta')^2 + (\beta - \alpha')^2 &= (1 + \gamma'')^2; \\ (\alpha - \gamma'')^2 + (\alpha'' + \gamma)^2 &= (1 - \beta')^2, \\ (\alpha + \gamma'')^2 + (\alpha'' - \gamma)^2 &= (1 + \beta')^2; \\ (\beta' - \gamma'')^2 + (\gamma' + \beta'')^2 &= (1 - \alpha)^2, \\ (\beta' + \gamma'')^2 + (\gamma' - \beta'')^2 &= (1 + \alpha)^2; \end{aligned}$$

die linker Hand zuerst stehenden Ausdrücke sind bekannt, die vorigen Gleichungen führen daher zu den folgenden:

$$\begin{aligned} \beta + \alpha' &= \sqrt{(1 - \gamma'')^2 - (\alpha - \beta')^2}, \\ \beta - \alpha' &= \sqrt{(1 + \gamma'')^2 - (\alpha + \beta')^2}; \end{aligned}$$

$$\alpha'' + \gamma = \sqrt{(1-\beta')^2 - (\alpha - \gamma'')^2},$$
$$\alpha'' - \gamma = \sqrt{(1+\beta')^2 - (\alpha + \gamma'')^2};$$
$$\gamma' + \beta'' = \sqrt{(1-\alpha)^2 - (\beta' - \gamma'')^2},$$
$$\gamma' - \beta'' = \sqrt{(1+\alpha)^2 - (\beta' + \gamma'')^2}.$$

Man übersieht auf der Stelle, wie sich hieraus die sechs Unbekannten β, α', α'', γ, γ', β'' durch Addition und Subtraktion ableiten lassen; vorher wollen wir aber bemerken, dass die unter den Wurzelzeichen stehenden Quadratdifferenzen in Produkte zerlegbar sind; setzen wir nämlich zur Abkürzung

$$16)\quad \begin{cases} 1+\alpha-\beta'-\gamma'' = A, \\ 1-\alpha+\beta'-\gamma'' = B, \\ 1-\alpha-\beta'+\gamma'' = C, \\ 1+\alpha+\beta'+\gamma'' = D, \end{cases}$$

so lauten die obigen Gleichungen

$$\beta+\alpha' = \sqrt{AB}, \quad \alpha''+\gamma = \sqrt{AC}, \quad \gamma'+\beta'' = \sqrt{BC},$$
$$\beta-\alpha' = \sqrt{CD}, \quad \alpha''-\gamma = \sqrt{BD}, \quad \gamma'-\beta'' = \sqrt{AD}.$$

Die Werte der Unbekannten sind hiernach für homologe Systeme:

$$17)\quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{AB}+\sqrt{CD}), & \gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{AC}-\sqrt{BD}), \\ \alpha' = \frac{1}{2}(\sqrt{BA}-\sqrt{CD}), & \gamma' = \frac{1}{2}(\sqrt{BC}+\sqrt{AD}), \\ \alpha'' = \frac{1}{2}(\sqrt{CA}+\sqrt{BD}), & \beta'' = \frac{1}{2}(\sqrt{CB}-\sqrt{AD}). \end{cases}$$

Nach der früheren Bemerkung führt die Änderung der Vorzeichen von α, β', γ'' zu den entsprechenden Formeln für symmetrische Systeme. Setzen wir demgemäss zur Abkürzung:

$$18)\quad \begin{cases} 1-\alpha+\beta'+\gamma'' = A_1, \\ 1+\alpha-\beta'+\gamma'' = B_1, \\ 1+\alpha+\beta'-\gamma'' = C_1, \\ 1-\alpha-\beta'-\gamma'' = D_1, \end{cases}$$

so haben wir die für symmetrische Koordinatensysteme:

$$19)\quad \begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(\sqrt{A_1B_1}+\sqrt{C_1D_1}), & \gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{A_1C_1}-\sqrt{B_1D_1}), \\ \alpha' = \frac{1}{2}(\sqrt{B_1A_1}-\sqrt{C_1D_1}), & \gamma' = \frac{1}{2}(\sqrt{B_1C_1}+\sqrt{A_1D_1}), \\ \alpha'' = \frac{1}{2}(\sqrt{C_1A_1}+\sqrt{B_1D_1}), & \beta'' = \frac{1}{2}(\sqrt{C_1B_1}-\sqrt{A_1D_1}). \end{cases}$$

Hinsichtlich der Realität der sechs Grössen β, γ, α', γ', α'', β'' bemerken wir noch folgendes. In den Gleichungen 18) kommen alle Kombinationen zu je zweien aus A, B, C, D vor; besitzen nun irgend zwei dieser Grössen entgegengesetzte Vorzeichen, so wird

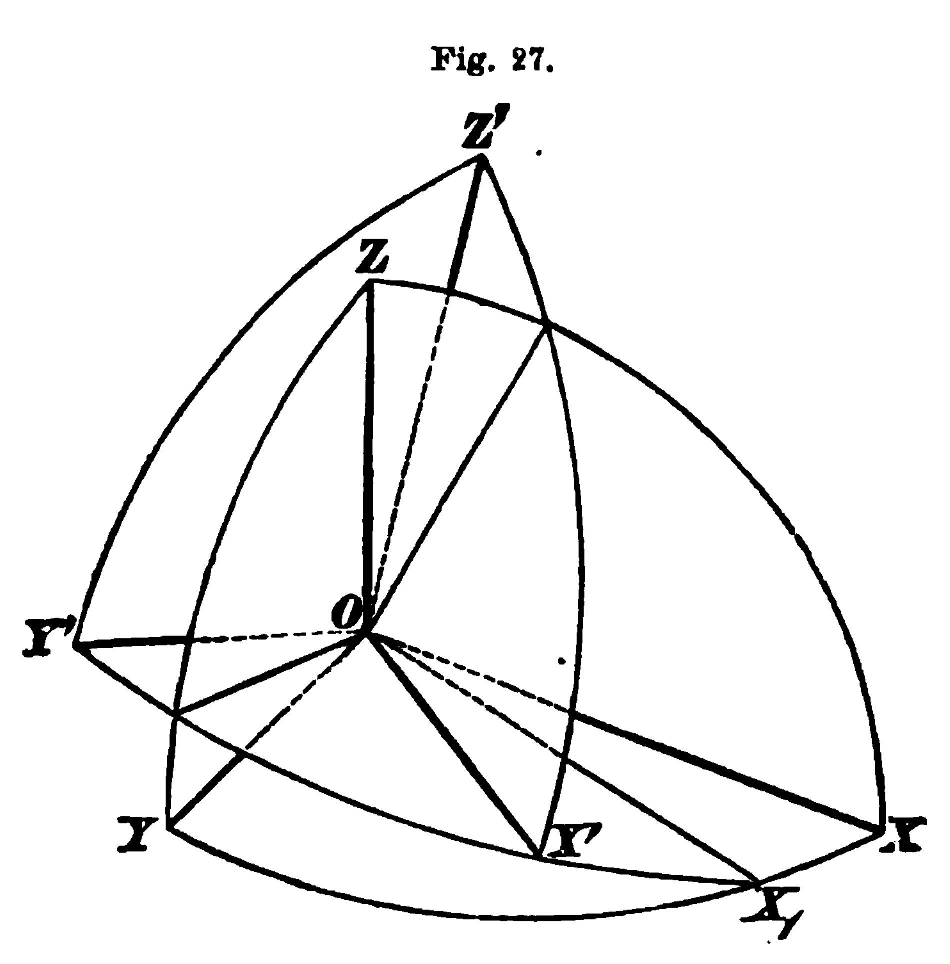
eine der Unbekannten β, γ, α', γ', α'', β'' imaginär, mithin das betreffende Koordinatensystem unmöglich. Zur Realität der verlangten Transformation gehört also, dass die Grössen A, B, C, D dasselbe Vorzeichen haben, und zwar kann dieses nur das positive Zeichen sein, weil $A + B + C + D = +4$ ist; dabei bleibt aber die Möglichkeit, dass die eine oder andere der genannten Grössen verschwindet. Die Bedingung der Realität der ersten Transformation besteht also darin, dass keine der Grössen A, B, C, D negativ ist. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die zweite Transformation mittels der in 18) und 19) angegebenen Werte.

§ 22.

Anderes Verfahren zur Transformation rechtwinkliger Systeme.

Die Koordinatenverwandlung nach den im vorigen Paragraphen entwickelten Formeln hat in manchen Fällen, bei denen es nicht auf eine sehr symmetrische Rechnung ankommt, die Unbequemlichkeit, dass ausser den gegebenen drei Grössen (α, β', γ'') noch zehn andere (A, B, C, D, β, γ, α', γ', α'', β'') im Auge behalten werden müssen, und es ist daher nicht überflüssig, ein anderes Formelsystem kennen zu lernen, worin ausser den primitiven und sekundären Koordinaten nur noch drei Winkel vorkommen, welche die Lage des neuen Koordinatensystems gegen das ursprüngliche feststellen.

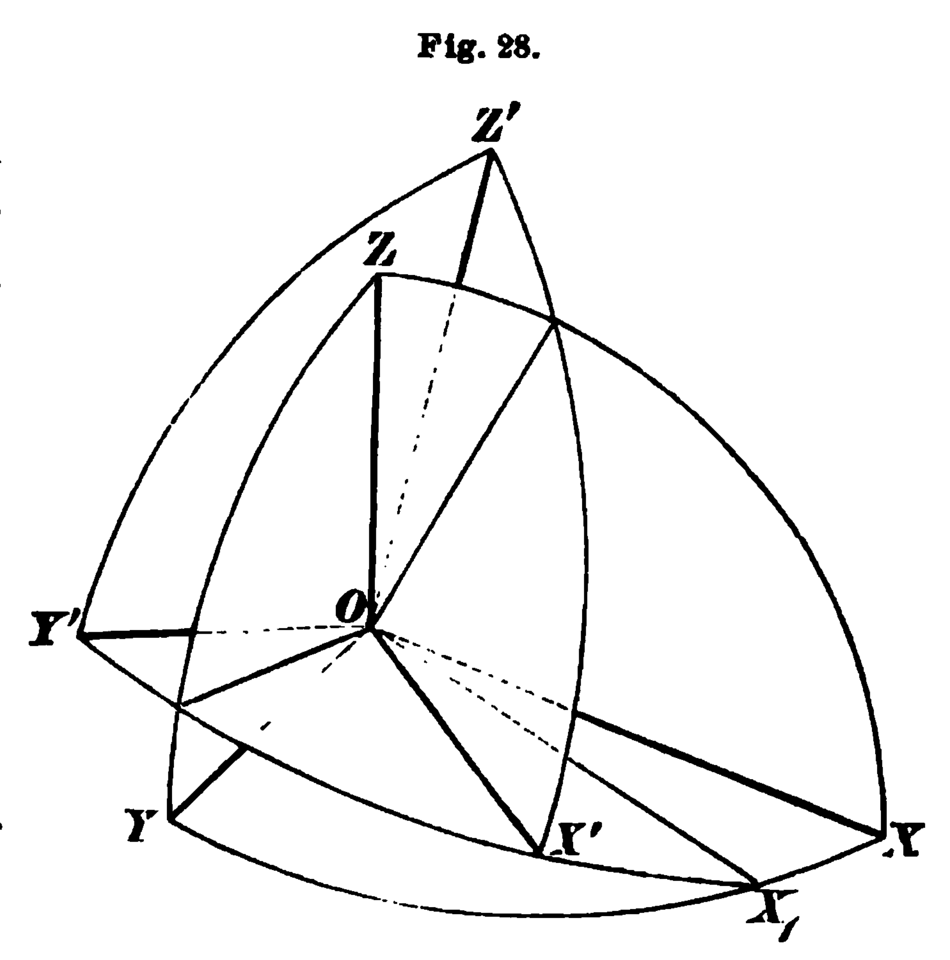
Fig. 27.



Die Ebene $x'y'$ schneide die Ebene xy in einer Geraden, die wir OX_1 nennen wollen und deren Lage durch den Winkel XOX_1 bestimmt wird, den sie mit der positiven Seite der x-Achse einschliesst. Wir bezeichnen diesen Winkel mit ψ und zählen denselben, von OX ausgehend, im Sinne derjenigen direkten Drehung, mittels welcher die positive Seite

der x-Achse durch 90^0 hindurch in die positive Seite der y-Achse übergeführt werden kann. Ferner sei ϑ der Neigungswinkel der $x'y'$-Ebene gegen die xy-Ebene; er möge in demselben Sinne genommen werden, wie eine Drehung von der positiven Seite der y-Achse nach der positiven Seite der z-Achse, so dass also in dem Falle, wo OX_1 mit OX identisch wäre, die Drehung um ϑ bis zur Koïncidenz der Ebene xy mit der Ebene $x'y'$ in gleicher Richtung mit der Drehung geschehen würde, welche OY in OZ überführt.

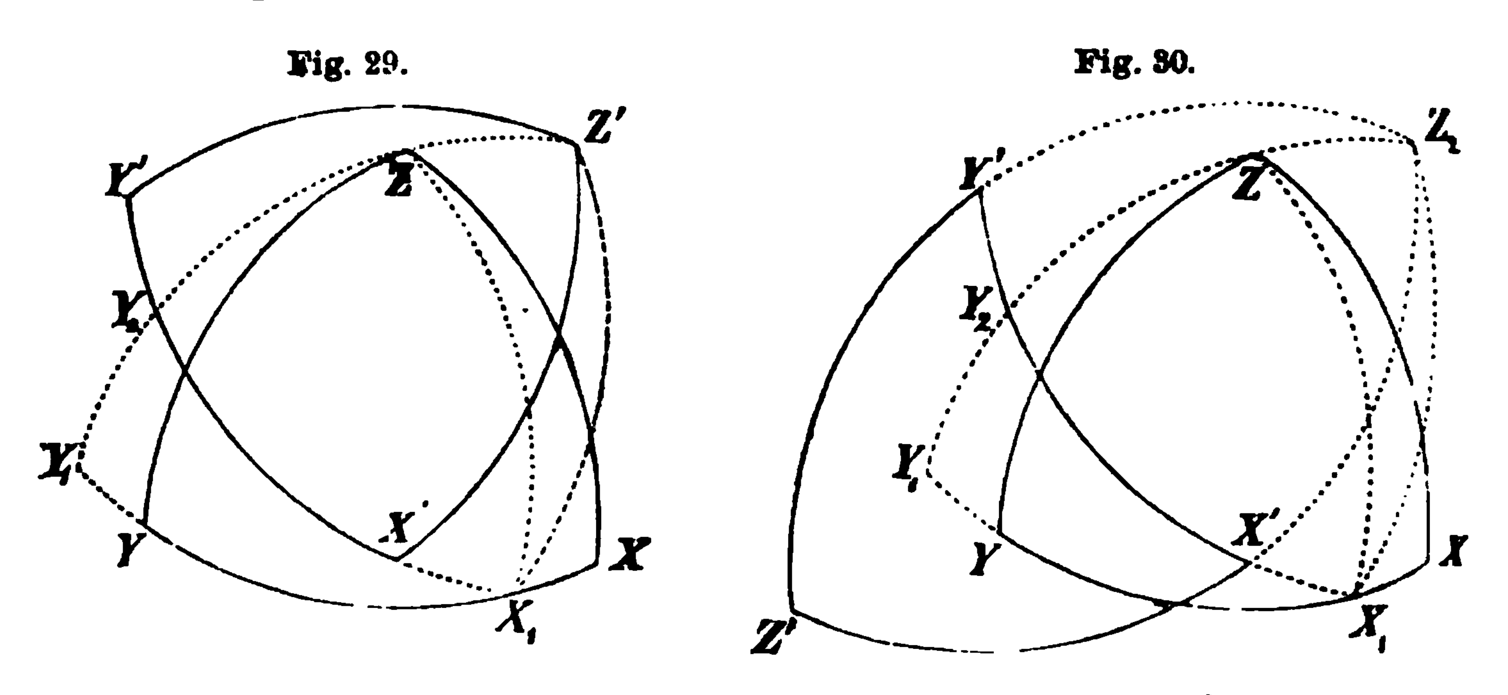
Fig. 28.



Endlich bezeichne φ den Winkel zwischen OX_1 und der positiven Seite der x'-Achse; die Drehungsrichtung von φ sei dieselbe wie von ψ, so dass also in dem Falle $\vartheta = 0$ der Winkel φ als Fortsetzung von ψ erscheinen würde ($\angle XOX' = \psi + \varphi$ für $\vartheta = 0$). Durch die Winkel ψ, ϑ, φ ist die Lage der positiven Seite OX' der x-Achse bestimmt; die positive Seite OY' der y'-Achse liege von OX' aus nach derselben Gegend des Raumes hin, wie OY von OX aus gerechnet. Was endlich die Achse der z' betrifft, so erstreckt sich bei zwei homologen Systemen ihre positive Seite OZ' nach derselben Gegend des Raumes, wie OZ, bei symmetrischen Systemen nach der entgegengesetzten Seite.

Aus diesen Bestimmungen erkennt man leicht, dass sich das primitive System durch drei aufeinander folgende Drehungen in das sekundäre überführen lässt; man hat erstens das primitive System in direktem Sinne um die Achse der z zu drehen, bis OX mit OX_1 zusammenfällt, mittels einer zweiten direkten Drehung um die Gerade OX_1 bringt man die Ebenen xy und $x'y'$ zur Koïncidenz, zugleich fällt OZ mit OZ' oder mit der entgegengesetzten Seite von OZ' zusammen, jenachdem die Systeme homolog oder symmetrisch sind; mittels einer dritten direkten Drehung um die gemeinschaftliche z-Achse bringt man endlich OX_1 nach OX' und

zugleich die beiden Systeme entweder zur Kongruenz oder zur symmetrisch entgegengesetzten Lage. Diese Bewegungen werden durch die sphärischen Dreiecke anschaulich, welche entstehen, wenn man aus dem gemeinschaftlichen Koordinatenanfange O als Mittelpunkt



mit dem Halbmesser $=1$ eine Kugelfläche beschreibt und die Koordinatenebenen erweitert, bis sie die Fläche in grössten Kreisen schneiden. Ist nämlich XYZ das dem primitiven Koordinatensysteme entsprechende sphärische Dreieck, $X'Y'Z'$ der Repräsentant des sekundären Systems und X_1 der Durchschnitt von XY mit $X'Y'$, so ist $XX_1 = \psi$, $\angle YX_1X' = \vartheta$, $X_1X' = \varphi$; nach der ersten Drehung hat das Dreieck XYZ die Lage X_1Y_1Z, nach der zweiten entweder die Lage X_1Y_2Z', oder bei stattfindender Symmetrie die Lage $X_1Y_2Z_2$, nach der dritten Drehung ist es entweder mit $X'Y'Z'$ zusammengefallen oder ihm symmetrisch entgegengesetzt.

Die genannten Bewegungen lassen sich analytisch mittels des bekannten Satzes verfolgen, dass zwischen den primitiven und sekundären rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes uv in der Ebene die Gleichungen

$$u = u' \cos\omega - v' \sin\omega, \qquad v = u' \sin\omega + v' \cos\omega$$

stattfinden, in denen ω den Winkel bezeichnet, um welchen das primitive System uv in direktem Sinne gedreht werden muss, damit die positive Richtung der u-Achse mit der positiven Richtung der u'-Achse, und ebenso die positive Seite der v-Achse mit der positiven Seite der v'-Achse zusammenfalle. Bei der ersten Drehung bleiben die z ungeändert, weil OZ die feste Drehungsachse war: dagegen haben wir, wenn die Koordinaten in Beziehung auf die Achsen OX_1 und OY_1 mit x_1 und y_1 bezeichnet werden:

$$1)\qquad x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, \qquad y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi.$$

Nach der zweiten Drehung haben die Koordinatenachsen die Lagen OX_1, OY_2, OY', wobei wir homologe Systeme voraussetzen; hier ändern sich die x_1 nicht, dagegen verwandeln sich y_1 und z in y_2 und z'; demnach ist

$$2)\qquad y_1 = y_2 \cos\vartheta - z' \sin\vartheta, \qquad z = y_2 \sin\vartheta + z' \cos\vartheta.$$

Bei der dritten Drehung bleiben die z' ungestört; dagegen geht x_1 in x' und y_2 in y' über, dies giebt:

$$3)\qquad x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \qquad y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

Für symmetrische Systeme würden die Gleichungen von ähnlicher Form sein und sich nur dadurch unterscheiden, dass $-z'$ an der Stelle von z' stünde. Nach Elimination von x_1, y_1, y_2 erhalten wir nun folgende Formeln zur Koordinatenverwandlung

$$4)\qquad \begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad - y'(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad \pm z' \sin\psi\sin\vartheta, \\ y = x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad \mp z' \cos\psi\sin\vartheta, \\ z = x' \sin\varphi\sin\vartheta + y' \cos\varphi\sin\vartheta \pm z' \cos\vartheta; \end{cases}$$

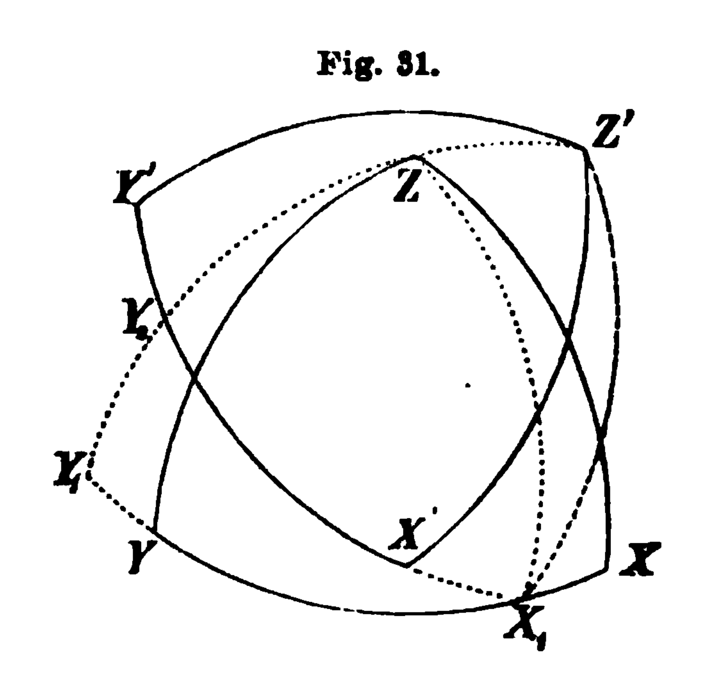
darin beziehen sich die oberen Vorzeichen auf homologe, die unteren auf symmetrische Koordinatensysteme.

Durch Vergleichung der Formeln 4) mit den früheren Formeln 7) oder 1) in § 21 ergeben sich die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos(x'x) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\
\beta &= \cos(y'x) = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta, \\
\gamma &= \cos(z'x) = \pm\sin\psi\sin\vartheta; \\
\alpha' &= \cos(x'y) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\
\beta' &= \cos(y'y) = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta, \\
\gamma' &= \cos(z'y) = \pm\cos\psi\sin\vartheta; \\
\alpha'' &= \cos(x'z) = \sin\varphi\sin\vartheta, \\
\beta'' &= \cos(y'z) = \cos\varphi\sin\vartheta, \\
\gamma'' &= \cos(z'z) = \pm\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Man kann diese Relationen auch mittels der sphärischen Trigonometrie erhalten, wie wir kurz an zwei homologen Systemen mit Rücksicht auf die vorhin benutzte Figur nachweisen wollen. In dem Dreiecke XX_1X' kennt man $XX_1 = \psi$, $X_1X' = \varphi$, $\angle XX_1X' = 180^0 - \vartheta$, mithin ist nach der Fundamentalformel der sphärischen Trigonometrie

Fig. 31.



$$(\cos X'X) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos(180^0-\vartheta);$$

in dem Dreiecke XX_1Y' findet sich aus $XX_1 = \psi$, $X_1Y' = 90^0 + \varphi$, $\angle XX_1Y' = 180^0 - \vartheta$,

$$\cos(Y'X) = \cos(90^0+\varphi)\cos\psi + \sin(90^0+\varphi)\sin\psi\cos(180^0-\vartheta);$$

im Dreiecke XX_1Z' ist $XX_1 = \psi$, $X_1Z' = 90^0$, $\angle XX_1Z' = 90^0 - \vartheta$, mithin

$$\cos(Z'X) = \cos 90^0 \cos\psi + \sin 90^0 \sin\psi\cos(90^0-\vartheta).$$

Von dem Dreiecke $X_1X'Y$ kennt man $X_1X' = \varphi$, $X_1Y = 90^0 - \psi$, $\angle YX_1X' = \vartheta$, man hat folglich

$$\cos(X'Y) = \cos\varphi\cos(90^0-\psi) + \sin\varphi\sin(90^0-\psi)\cos\vartheta;$$

im Dreiecke X_1YY' ist $X_1Y' = 90^0 + \varphi$, $X_1Y = 90^0 - \psi$ und der eingeschlossene Winkel $= \vartheta$, also

$$\cos(Y'Y) = \cos(90^0+\varphi)\cos(90^0-\psi) + \sin(90^0+\varphi)\sin(90^0-\psi)\cos\vartheta;$$

das Dreieck X_1YZ' enthält $X_1Z' = 90^0$, $X_1Y = 90^0 - \psi$ und $\angle YX_1Z' = 90^0 + \vartheta$ und giebt

$$\cos(Z'Y) = \cos 90^0\cos(90^0-\psi) + \sin 90^0\sin(90^0-\psi)\cos(90^0+\vartheta).$$

Weil ferner aus naheliegenden Gründen $\angle X_1Z'X' = \varphi$ und $ZZ' = \vartheta$ ist, so hat man in dem Dreiecke $X'Z'Z$ die bekannten Stücke $ZZ' = \vartheta$, $X'Z' = 90^0$, $\angle X'Z'Z = 90^0 - \varphi$, mithin

$$\cos(X'Z) = \cos\vartheta\cos 90^0 + \sin\vartheta\sin 90^0\cos(90^0-\varphi);$$

im Dreiecke $Y'Z'Z$ kennt man $Y'Z' = 90^0$, $ZZ' = \vartheta$, $\angle Y'Z'Z = \angle X'Z'X_1 = \varphi$, folglich ist

$$\cos(X'Z) = \cos\vartheta\cos 90^0 + \sin\vartheta\sin 90^0\cos\varphi;$$

endlich hat man unmittelbar wegen $Z'Z = \vartheta$

$$\cos(Z'Z) = \cos\vartheta.$$

Diese Formeln stimmen mit den vorigen für α, β, γ, α', ... γ' überein, doch würde der Nachweis ihrer Allgemeingiltigkeit ein

näheres und umständliches Eingehen auf alle möglichen Kombinationen spitzer und stumpfer φ, ψ, ϑ erfordern, während die erste Herleitung von selbst völlig allgemein ist.

Durch Substitution der Werte von α, β, ... γ'' in die Gleichungen 10) des vorigen Paragraphen ergeben sich die folgenden Formeln:

$$5) \quad \begin{cases} x' = x(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad + y(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad + z\sin\varphi\sin\vartheta; \\ y' = -x(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta) \\ \quad - y(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta) \\ \quad + z\cos\varphi\sin\vartheta, \\ z' = \pm(x\sin\psi\sin\vartheta - y\cos\psi\sin\vartheta + z\cos\vartheta), \end{cases}$$

welche den Übergang vom sekundären zu dem primitiven Systeme vermitteln.

Wir erwähnen endlich noch einige besonders häufig vorkommende Spezialfälle der Gleichungen 4). Wenn die Durchschnittslinie OX_1 der Ebenen xy und $x'y'$ zugleich die x-Achse ist, so hat man $\psi = 0$, mithin

$$6) \quad \begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi\cos\vartheta + y'\cos\varphi\cos\vartheta \mp z'\sin\vartheta, \\ z = x'\sin\varphi\sin\vartheta + y'\cos\varphi\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta. \end{cases}$$

Wird die Linie OX_1 zur Achse der x' genommen, so giebt dies $\varphi = 0$, also

$$7) \quad \begin{cases} x = x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta \pm z'\sin\psi\sin\vartheta, \\ y = x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta \mp z'\cos\psi\sin\vartheta, \\ z = y'\sin\vartheta \pm z'\cos\vartheta. \end{cases}$$

Von diesen Formeln wird oft in dem noch spezielleren Falle Gebrauch gemacht, wo sämtliche Punkte des sekundären Systems in einer Ebene liegen, welche man zur $x'y'$-Ebene wählt; es ist dann $z' = 0$, mithin

$$x = x'\cos\psi - y'\sin\psi\cos\vartheta,$$
$$y = x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta,$$
$$z = y'\sin\vartheta.$$

Haben beide Systeme nicht denselben Koordinatenanfang, so bezeichne man die ebenen Koordinaten von O' mit a und b und setze dann $x - a$ für x, sowie $y - b$ für y, wobei aber nicht zu übersehen

ist, dass a und b der primitiven Gleichung von OX' genügen müssen; man hat jetzt:

$$8)\qquad \begin{cases} x = a + x' \cos\psi - y' \cos\vartheta \sin\psi, \\ y = b + x' \sin\psi + y' \cos\vartheta \cos\psi, \\ z = y' \sin\vartheta. \end{cases}$$

Dieselben Formeln können auch unabhängig von dem vorigen durch eine einfache geometrische Betrachtung gefunden werden.

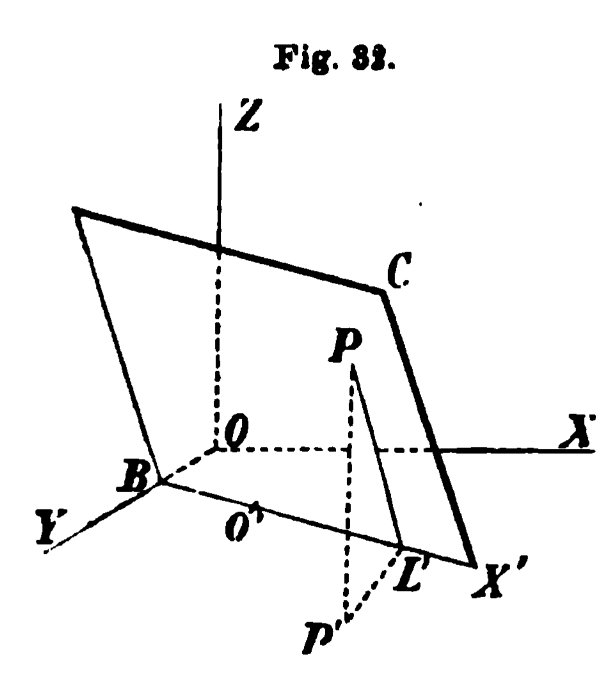


Fig. 32.

Ist nämlich BX' die Horizontalspur der Ebene BC, in welcher ein Punkt P liegt, der Winkel zwischen OX und BX' gleich ψ, der Neigungswinkel der Ebene BC gegen die Ebene xy gleich ϑ; ferner $O'X'$ der positive Teil der x'-Achse mit O' als Anfang der neuen rechtwinkligen Koordinaten, so hat man in der ersten Figur $O'L' = x'$, $L'P = y'$,

$$z = PP' = y' \sin\vartheta, \qquad L'P' = y' \cos\vartheta.$$

Ferner ist in der zweiten Figur, welche die Horizontalprojektion der ersten darstellt, $\angle O'L'Q = \angle L'P'R = \psi$ und

$$x - a = L'Q - L'R = x' \cos\psi - L'P' . \sin\psi,$$
$$y - b = O'Q + RP' = x' \sin\psi + L'P' . \cos\psi,$$

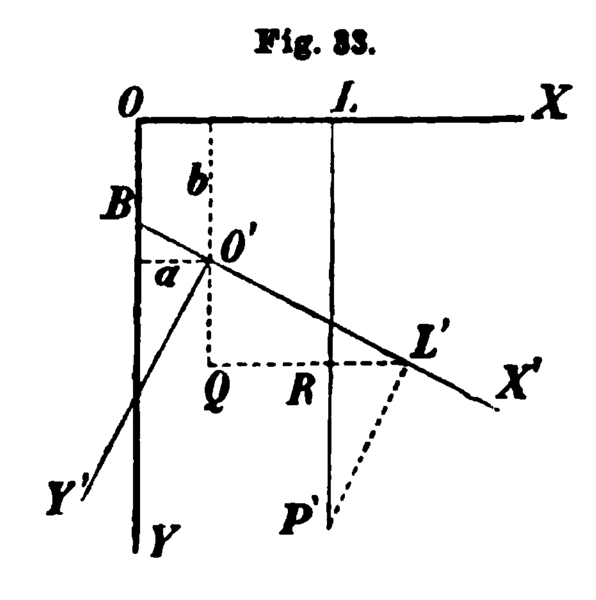


Fig. 33.

woraus man vermöge des Wertes von $L'P'$ die obigen Formeln erhält. Sind die Winkel ψ und ϑ nicht unmittelbar gegeben und ist dagegen nur die Gleichung der Ebene BC bekannt, so bedarf es erst der Ermittelung von $\cos\psi$, $\sin\psi$, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$. Sie geschieht auf folgende Weise. Die Gleichung der Ebene sei

$$9)\qquad Ax + By + Cz = D,$$

mithin die Gleichung ihrer Horizontalspur:

$$Ax + By = D \quad \text{oder} \quad y = -\frac{A}{B}x + \frac{D}{B};$$

man hat nun erstlich

$$\tan\varphi = -\frac{A}{B},$$

folglich, wenn das Wurzelzeichen im absoluten Sinne genommen und A stets als positiv angesehen wird,

$$\cos\psi = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\psi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

ferner hat man für den Neigungswinkel ϑ

$$\cos\vartheta = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}},$$

mithin durch Substitution der vier angegebenen Werte

$$10)\quad \begin{cases} x = a - \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x' - \dfrac{AC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}\,y', \\ y = b + \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x' - \dfrac{BC}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^2+B^2+C^2)}}\,y', \\ z = \dfrac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,y', \end{cases}$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass immer die Gleichung

$$11)\qquad Aa + Bb = D$$

erfüllt sein muss. Nicht selten wählt man zum neuen Koordinatenanfang O' den Fusspunkt des Perpendikels vom ursprünglichen Koordinatenanfang O auf die Horizontalspur BX' der gegebenen Ebene; für diesen Fall sind die Werte von a und b

$$12)\qquad a = \frac{AD}{A^2+B^2}, \quad b = \frac{BD}{A^2+B^2}.$$

Die Formeln 10) vermitteln analytisch dieselbe Operation, welche in der deskriptiven Geometrie als Umlegung einer Ebene in die Horizontalebene bekannt ist.

Fünftes Kapitel.

Die Cylinderflächen.

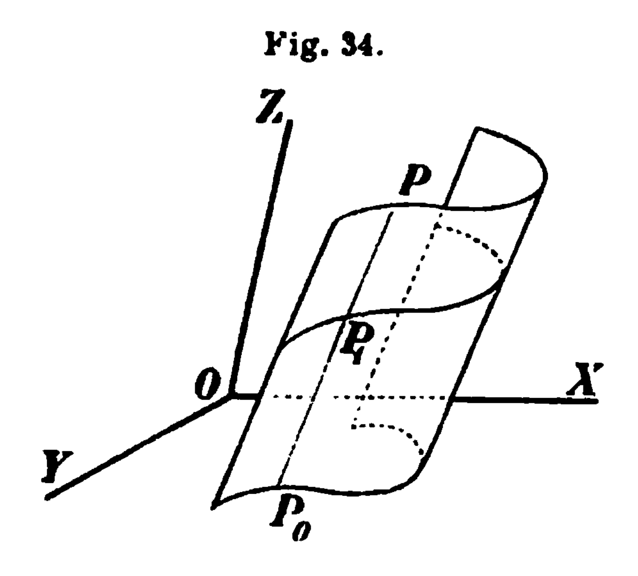
§ 23.

Entstehung und Gleichung der Cylinderflächen.

Wenn eine Gerade so bewegt wird, dass sie einer bestimmten Richtung parallel bleibt und gleichzeitig eine gegebene einfach oder doppelt gekrümmte Linie fortwährend schneidet, so entsteht eine Fläche, die im allgemeinen eine Cylinderfläche genannt wird; die bewegliche Gerade heisst ihre Erzeugungslinie und die Kurve, an welcher letztere hingleitet, die Direktrix oder Leitlinie der Fläche. Durch die Richtung der erzeugenden Geraden und durch die Direktrix ist die Natur der Fläche völlig bestimmt und man kann daher die Aufgabe stellen, aus jenen Daten die Gleichung der Cylinderfläche abzuleiten.

Wir betrachten zunächst den zwar speziellen aber sehr gewöhnlichen Fall, wo die Direktrix eine ebene krumme Linie ist, und nehmen ihre Ebene zur Koordinatenebene xy. Die Direktrix lässt sich dann als die stetige Folge der xy Spuren aller erzeugenden Geraden, d. h. als xy-Spur der Fläche selbst ansehen. Man hat nun erstens für jeden Punkt P einer zwar veränderlichen, aber einer bestimmten Richtung parallelen Geraden die Gleichungen

Fig. 34.



$$1) \qquad x = Az + x_0, \qquad y = Bz + y_0,$$

worin A und B die konstanten Richtungskoeffizienten, x_0 und y_0 die veränderlichen Koordinaten der xy-Spur der erzeugenden Geraden

darstellen; weil ferner die genannte Spur (P_0) auf der gegebenen Direktrix liegen soll, so müssen x_0 und y_0 einer gegebenen Gleichung, nämlich der Gleichung der Direktrix, genügen, welche durch

$$2)\qquad F(x_0, y_0) = 0$$

dargestellt werden möge. Aus den vorhandenen drei Gleichungen ergiebt sich eine einzige Gleichung zwischen x, y, z, nämlich die Gleichung der Cylinderfläche, wenn man x_0 und y_0 eliminiert; das Resultat dieser Elimination kann in der Form

$$3)\qquad F(x - Az, y - Bz) = 0$$

dargestellt werden.

Ist zweitens die Direktrix eine doppelt gekrümmte Kurve, so müssen zwei ihrer Projektionen gegeben sein; nehmen wir hierzu die Projektionen auf die xz- und yz-Ebene, so haben wir zwei Gleichungen von den Formen

$$4)\qquad \varphi(x, z) = 0, \qquad \psi(y, z) = 0.$$

Die erzeugende Gerade, deren Gleichungen wiederum

$$5)\qquad x = Az + x_0, \qquad y = Bz + y_0$$

sein mögen, schneidet der Voraussetzung zufolge die Direktrix in einem Punkte, dessen Koordinaten x_1, y_1, z_1 heissen mögen und für welche die vier Gleichungen

$$6)\qquad \begin{cases} x_1 = Az_1 + x_0, & y_1 = Bz_1 + y_0, \\ \varphi(x_1, z_1) = 0, & \psi(y_1, z_1) = 0 \end{cases}$$

zusammen gelten. Durch Elimination von x_1, y_1, z_1 folgt hieraus eine Gleichung zwischen x_0 und y_0, d. h. die Gleichung von der xy-Spur der Fläche. Bezeichnen wir diese Gleichung durch

$$7)\qquad F(x_0, y_0) = 0,$$

so ist jetzt die Sache wie vorhin und es ergiebt sich wiederum

$$8)\qquad F(x - Az, y - Bz) = 0$$

als Gleichung der Cylinderfläche.

Beispielsweise erwähnen wir diejenige Cylinderfläche, deren Direktrix irgend eine Kurve zweiten Grades ist; als Gleichung der Leitlinie haben wir in diesem Falle

$$9)\qquad \alpha x_0^2 + \beta y_0^2 + 2\gamma x_0 y_0 + 2\delta x_0 + 2\varepsilon y_0 + \varkappa = 0,$$

mithin als Gleichung der entsprechenden Cylinderfläche zweiten Grades

$$10)\qquad \begin{cases} \alpha(x - Az)^2 + \beta(y - Bz)^2 + 2\gamma(x - Az)(y - Bz) \\ \qquad + 2\delta(x - Az) + 2\varepsilon(y - Bz) + \varkappa = 0. \end{cases}$$

Am einfachsten gestaltet sich die in Nr. 8) entwickelte allgemeine Gleichung der Cylinderfläche in dem Falle, wo die z-Achse parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden gelegt wird; man hat dann $A = B = 0$, folglich

$$11) \qquad F(x, y) = 0, \qquad (z \text{ beliebig}).$$

Diese Gleichung unterscheidet sich im wesentlichen nicht von jener der ebenen Direktrix; in der That erhellt auch unmittelbar von selbst, dass unter der gemachten Voraussetzung jeder Punkt auf der Cylinderfläche liegt, dessen xy-Projektion der Direktrix angehört und dessen z beliebig ist.

Schnitte der Cylinderflächen. Unter den verschiedenen Lagen, die eine Ebene gegen eine Cylinderfläche haben kann, sind folgende hervorzuheben. Die Ebene kann erstens parallel zur xy-Ebene sein; man hätte dann in Nr. 11) dem z einen konstanten Wert zu erteilen, da aber z in der Gleichung selber nicht vorkommt, so bleibt letztere dadurch ungeändert, d. h. alle Parallelschnitte der Cylinderfläche sind kongruent, was auch geometrisch unmittelbar erhellt. Die Ebene kann zweitens parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden, also der z-Achse parallel sein; ihre Gleichung lautet unter dieser Voraussetzung

$$12) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (z \text{ beliebig})$$

und wenn wir sie mit der Gleichung 11) zusammenhalten, so bekommen wir diejenigen Punkte, welche die Ebene mit der Cylinderfläche gemein hat. Dabei bleibt z immer beliebig und es besteht daher die Reihenfolge der gemeinsamen Punkte jedenfalls in einer oder mehreren Geraden, deren xy-Spuren durch die Gleichungen 11) und 12) oder die nicht wesentlich davon verschiedenen

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1$$

bestimmt werden. Schneiden sich die durch vorstehende Gleichungen ausgedrückten Spuren der Cylinderfläche und der Ebene in einer Partie von Punkten, so schneidet die Ebene die Cylinderfläche in eben so viel Geraden, welche der Richtung der Fläche parallel sind; berühren sich jene Spuren in einem Punkte, so berührt die Ebene die Cylinderfläche längs einer Geraden; haben endlich jene Spuren keinen Punkt gemein, so liegt die Ebene völlig ausserhalb der Cylinderfläche. Eine ganz beliebige Ebene, deren Gleichung

13) $$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

sein möge, schneidet im allgemeinen die Cylinderfläche in einer krummen Linie. Die Projektionen der letzteren erhält man dadurch, dass man die Gleichung 13) mit der Gleichung der Cylinderfläche zusammen nimmt und eine der Koordinaten x, y, z eliminiert; die Elimination von z giebt die Gleichung der xy-Projektion der Durchschnittslinie, die Elimination von y liefert die Gleichung der xz-Projektion, die Elimination von x die Gleichung der yz-Projektion. Will man dagegen, wie es in vielen Fällen wünschenswert ist, die Gleichung der ebenen Durchschnittslinie selber haben, so bedarf es einer Transformation der Koordinaten, und zwar wählt man dabei die schneidende Ebene zur Ebene der neuen xy, wie dies in den Formeln 8) bis 12) in § 22 geschehen ist; setzt man die für x, y, z dort angegebenen Werte in die Gleichung der Cylinderfläche ein, so erhält man augenblicklich eine Gleichung zwischen den neuen ebenen Koordinaten der Durchschnittslinie, d. h. die Gleichung der letzteren. Hiernach findet man z. B. sehr leicht, dass jeder Schnitt einer Cylinderfläche zweiten Grades aus einer Kurve zweiten Grades besteht.

Berührungsebenen, Tangenten und Normalen der Cylinderflächen. In dem vorigen liegt bereits ein Mittel zur Auffindung derjenigen Ebene, welche eine gegebene Cylinderfläche in einem gegebenen Punkte P berührt. Man zieht nämlich die durch P gehende erzeugende Gerade, legt durch ihre xy-Spur eine Tangente an die gleichnamige Spur der Fläche und konstruiert die Ebene, welche jene Erzeugungslinie und diese Tangente enthält; die hiermit bestimmte Ebene berührt die Cylinderfläche längs jener erzeugenden Geraden. Jede durch den Berührungspunkt der Tangentialebene gehende, in dieser Ebene selbst liegende Gerade heisst eine Tangente der Cylinderfläche; die auf der Berührungsebene in einem ihrer Berührungspunkte P errichtete Senkrechte nennt man die Normale der Fläche im Punkte P.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wollen wir den elliptischen Cylinder genauer betrachten.

§ 24.

Der elliptische Cylinder.

Durchschneidet man einen beliebigen elliptischen Cylinder mittels einer auf der Richtung der erzeugenden Geraden senkrechten Ebene, so ist die entstehende Durchschnittslinie eine geschlossene Kurve zweiten Grades, d. h. eine Ellipse, und es kann daher jeder schiefe elliptische Cylinder auch als gerader elliptischer Cylinder angesehen werden. Denken wir uns diesen senkrechten Querschnitt als Direktrix der Fläche, nennen a die grosse, b die kleine Halbachse der Ellipse, und beziehen die Fläche auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x-Achse mit a und dessen y-Achse mit b zusammenfällt, so ist die Gleichung der Fläche

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (z \text{ beliebig}).$$

Durch den Anfangspunkt der Koordinaten legen wir ferner eine Ebene, deren Horizontalspur mit der x-Achse den Winkel ψ einschliessen und deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene $= \vartheta$ sein möge; ihr Durchschnitt mit der Fläche ist dann eine Kurve, deren Gleichung in ebenen Koordinaten durch die Substitutionen

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= y' \sin\vartheta \end{aligned}$$

erhalten wird. Es ergiebt sich auf diese Weise

$$\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) x'^2 + 2\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \cos\psi \sin\psi \cos\vartheta \,.\, x'y' + \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right) \cos^2\vartheta \,.\, y'^2 = 1,$$

also im allgemeinen immer eine Ellipse. Von Interesse ist dabei die Untersuchung, ob die fragliche Ellipse nicht unter Umständen zu einem Kreise werden könnte, in welchem Falle die Gleichung zu der Form

$$\frac{1}{r^2} x'^2 + \frac{1}{r^2} y'^2 = 1$$

gelangen müsste. Hierzu würden nun, da $a > b$ und $\cos\vartheta$ im allgemeinen von Null verschieden ist, die folgenden Bedingungen erforderlich sein:

$$\cos\psi \sin\psi = 0,$$
$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta = \frac{1}{r^2};$$

daraus folgt entweder

$$\cos\psi = 0, \text{ mithin } \sin\psi = 1 \text{ und } \cos^2\vartheta = \frac{a^2}{b^2},$$

oder

$$\sin\psi = 0, \quad \text{„} \quad \cos\psi = 1 \quad \text{„} \quad \cos^2\vartheta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Die erste dieser Gleichungen ist wegen $\frac{a}{b} > 1$ unmöglich, dagegen liefert die andere zwei Beantwortungen der Frage, nämlich

$$\cos\vartheta = +\frac{b}{a} \text{ und } \cos\vartheta = -\frac{b}{a}.$$

Jeder elliptische Cylinder lässt sich also auf zwei verschiedene Arten in Kreisen durchschneiden und kann daher auf doppelte Weise als schiefer Kreiscylinder betrachtet werden. Bemerkenswert ist dabei, dass der Neigungswinkel der Kreisebene gegen die xy-Ebene mit dem Winkel übereinkommt, unter welchem die Excentricität der Ellipse, vom Endpunkte der kleinen Halbachse aus gesehen, erscheint.

Nehmen wir die Ebene eines der Kreisschnitte als neue xy-Ebene und den Mittelpunkt des Kreises zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist die Gleichung der Horizontalspur, die wir jetzt auch als Direktrix betrachten können,

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2;$$

wir bezeichnen ferner mit

$$x = Az \text{ und } y = Bz$$

die Gleichungen derjenigen Geraden, welche durch den Kreismittelpunkt parallel zu den erzeugenden Geraden liegt (der sogenannten Cylinderachse) und haben jetzt als Gleichung des schiefen Kreiscylinders oder des ursprünglich elliptischen Cylinders

$$2) \qquad (x - Az)^2 + (y - Bz)^2 = r^2.$$

Um die Natur des Durchschnittes beurteilen zu können, welchen irgend eine Ebene

$$3) \qquad A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1$$

mit dem vorigen Cylinder bildet, erörtern wir zuerst den Fall, wo die genannte Ebene zur Berührungsebene wird. Hierzu gehört erstens, dass die Ebene parallel zur Richtung der erzeugenden Geraden (oder der Cylinderachse) liegt, was durch die Bedingungsgleichung

$$4)\qquad AA_1 + BB_1 + C_1 = 0$$

ausgedrückt wird; zweitens ist erforderlich, dass die Horizontalspur der Ebene die Horizontalspur der Cylinderfläche berühre. Die Gleichungen der beiden genannten Spuren sind

$$Ax + By = D, \qquad x^2 + y^2 = r^2,$$

und die Bedingung der tangentialen Lage der Geraden gegen den Kreis wird durch die Gleichung

$$5)\qquad (A_1^2 + B_1^2)\, r^2 = D_1^2$$

ausgedrückt, wie man u. a. durch die Bemerkung finden kann, dass die Entfernung der Geraden vom Koordinatenanfange gleich dem Radius des Kreises sein muss. Sind nun die Bedingungen 4) und 5) gleichzeitig erfüllt, so berührt die Ebene den Cylinder längs einer Geraden; ist nur die erste, nicht aber die zweite Bedingung erfüllt, so hat die Ebene mit der Cylinderfläche entweder zwei oder gar keine Gerade gemein; ist endlich auch die Bedingung 4) nicht erfüllt, so schneidet die Ebene die Cylinderfläche in einer Ellipse, die im speziellen Falle auch zu einem Kreise werden kann.

Die Gleichungen 4) und 5) dienen zur Lösung der Aufgabe. „durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine Berührungsebene an die Cylinderfläche zu legen". Nennen wir

$$A_1 \xi + B_1 \eta + C_1 \zeta = D_1$$

oder kürzer

$$6)\qquad L\xi + M\eta + N\zeta = 1$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so haben wir erstens als Bedingung, dass sie durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ geht,

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = 1,$$

ferner als Bedingungen der Berührung mit der Fläche

$$AL + BM + N = 0,$$
$$(L^2 + M^2)\, r^2 \quad = 1.$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen ergeben sich die Werte

$$L = \frac{r(x_1 - Az_1) \pm (y_1 - Bz_1)\sqrt{(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 - r^2}}{r[(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2]},$$

$$M = \frac{r(y_1 - Bz_1) \mp (x_1 - Az_1)\sqrt{(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 - r^2}}{r[(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2]},$$

$$N = -(AL + BM).$$

Man erkennt hieraus, dass keine Berührungsebene möglich ist, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 < r^2,$$

d. h. wenn sich der Punkt $x_1 y_1 z_1$ innerhalb des von der Cylinderfläche umschlossenen Raumes befindet, dass zweitens eine einzige Tangentialebene existiert, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 = r^2,$$

in welchem Falle der Punkt $x_1 y_1 z_1$ auf der Cylinderfläche selber liegt, und dass drittens zwei verschiedene Berührungsebenen möglich sind, wenn

$$(x_1 - Az_1)^2 + (y_1 - Bz_1)^2 > r^2,$$

d. h. wenn der Punkt $x_1 y_1 z_1$ sich in dem von der Fläche ausgeschlossenen Raume befindet. Schreiben wir im zweiten Falle einfach x, y, z für x_1, y_1, z_1, so sind die obigen Werte

$$L = \frac{x - Az}{r^2}, \quad M = \frac{y - Bz}{r^2}, \quad N = -\frac{A(x - Az) + B(y - Bz)}{r^2}$$

und mithin lautet die Gleichung der Berührungsebene

$$7) \quad (x - Az)\xi + (y - Bz)\eta - [A(x - Az) + B(y - Bz)]\zeta = r^2,$$

wobei nicht zu übersehen ist, dass hier x, y, z unveränderlich sind, wenn ξ, η, ζ sich ändern.

Als Gleichungen derjenigen Geraden, welche die Berührungsebene im Punkte xyz senkrecht schneidet, findet man noch

$$8) \quad \begin{cases} [A(x - Az) + B(y - Bz)](\xi - x) + (x - Az)(\zeta - z) = 0, \\ [A(x - Az) + B(y - Bz)](\eta - y) + (y - Bz)(\zeta - z) = 0; \end{cases}$$

dies sind die Gleichungen der im Punkte xyz auf der Cylinderfläche errichteten Normalen.

Sechstes Kapitel.

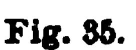
Die Kegelflächen.

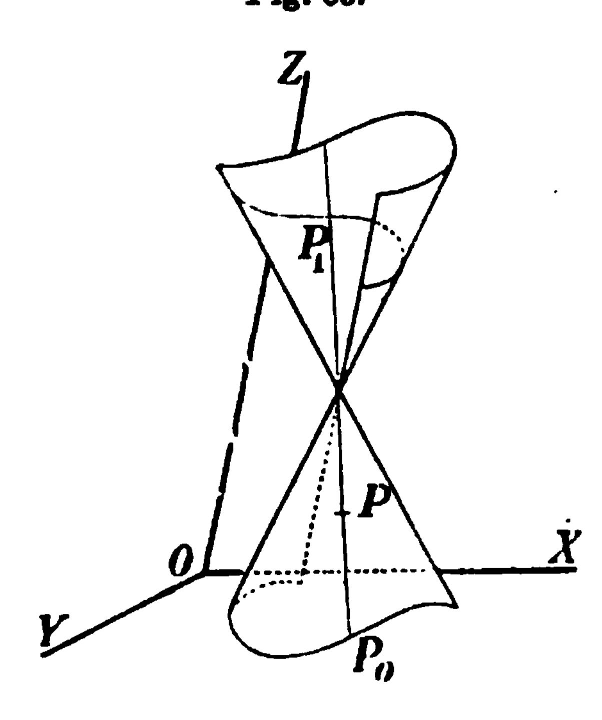
---

§ 25.

Entstehung und Gleichung der Kegelflächen.

Wenn eine Gerade so bewegt wird, dass sie einerseits immer durch einen bestimmten festen Punkt geht und andererseits eine gegebene einfach oder doppelt gekrümmte Linie fortwährend schneidet, so entsteht eine sogenannte Kegelfläche; der feste Punkt heisst der Mittelpunkt, die bewegliche Gerade die Erzeugungslinie und die feste Kurve die Direktrix oder Leitlinie der Fläche. Man muss sich dabei die erzeugende Gerade in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung vorstellen, und es hat dies zur Folge, dass jede Kegelfläche aus zwei unendlichen symmetrisch gleichen Teilen besteht, die sich im Mittelpunkte vereinigen. Lässt man den Mittelpunkt der Fläche unendlich weit von der Direktrix wegrücken, so degeneriert die Kegelfläche in eine Cylinderfläche und es kann daher diese als spezieller Fall von jener gelten.


Fig. 35.



Wie aus der Entstehungsweise der Kegelfläche hervorgeht, ist letztere bestimmt, sobald der Mittelpunkt und die Direktrix ihrer Lage nach gegeben sind; dies giebt Veranlassung zu der Aufgabe, aus den genannten Daten die Gleichung der Kegelfläche herzuleiten.

Wir betrachten zunächst den zwar speziellen, aber sehr gewöhnlichen Fall, wo die Direktrix eine ebene Kurve ist; ihre Ebene

nehmen wir zur Ebene xy und bezeichnen die Koordinaten des Mittelpunktes mit f, g, h. Die Gleichungen irgend einer durch den Punkt fgh gehenden Geraden können jetzt unter der Form

$$x - f = M(z - h), \qquad y - g = N(z - h)$$

dargestellt werden und dabei sind die Koordinaten x_0 und y_0 ihrer xy-Spur durch die Formeln

$$x_0 - f = -Mh, \qquad y_0 - g = -Nh$$

bestimmt. Die Elimination von M und N giebt

$$1)\quad x - f = -\frac{x_0 - f}{h}(z - h), \qquad y - g = -\frac{y_0 - g}{h}(z - h)$$

als Gleichungen der Geraden, welche die Punkte fgh und $x_0 y_0$ verbindet. Soll diese Gerade mit der erzeugenden Geraden (in irgend einer ihrer Lagen gedacht) identisch sein, so muss der Punkt $x_0 y_0$ der Direktrix angehören, deren Gleichung durch

$$2)\qquad F(x_0, y_0) = 0$$

dargestellt werden möge. Nach Elimination von x_0 und y_0 aus den Gleichungen 1) und 2) ergiebt sich nun eine einzige Gleichung zwischen x, y, z, nämlich

$$3)\qquad F\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0$$

und diese ist die Gleichung der Kegelfläche.

Eine doppelt gekrümmte Direktrix stellen wir durch zwei Gleichungen dar, indem wir sie auf die Ebenen xz und yz projiziert denken; die betreffenden Gleichungen mögen sein

$$4)\qquad \varphi(x, z) = 0, \quad \psi(y, z) = 0.$$

Den Gleichungen der erzeugenden Geraden geben wir wieder die Form

$$x - f = -\frac{x_0 - f}{h}(z - h), \qquad y - g = -\frac{y_0 - g}{h}(z - h)$$

und nennen $x_1 y_1 z_1$ den Punkt, in welchem sie die Direktrix schneiden. Für die Koordinaten dieses Punktes gelten zusammen die Gleichungen

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 - f = -\frac{x_0 - f}{h}(z_1 - h), \quad & y_1 - g = -\frac{y_0 - g}{h}(z_1 - h), \\ \varphi(x_1, z_1) = 0, \quad & \psi(y_1, z_1) = 0; \end{aligned}\right.$$

eliminiert man aus ihnen x_1, y_1, z_1, so bleibt eine Gleichung zwischen x_0 und y_0 übrig, d. h. die Gleichung der xy-Spur der Fläche.

Bezeichnen wir die so entstandene Gleichung mit

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

so ist die Sache ganz wie vorhin und es ergiebt sich wiederum

$$F\left(\frac{fz - hx}{z - h}, \frac{gz - hy}{z - h}\right) = 0$$

als Gleichung der Kegelfläche.

Um die Rechnung zu vereinfachen, kann man zunächst die z-Achse durch den Mittelpunkt der Fläche legen, es ist dann $f = g = 0$, folglich

$$F\left(\frac{hx}{h - z}, \frac{hy}{h - z}\right) = 0;$$

verschiebt man nachher den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt, indem man z für $h - z$ setzt, so wird noch einfacher

$$F\left(\frac{hx}{z}, \frac{hy}{z}\right) = 0.$$

Beispielsweise betrachten wir den schiefen Kreiskegel. Das Koordinatensystem sei rechtwinklig, r der Halbmesser der Direktrix, die Koordinaten des Kreismittelpunktes mögen p und q heissen, der Mittelpunkt des Kegels liege auf der z-Achse, die Direktrix in der xy-Ebene; die Gleichung der Leitlinie ist in diesem Falle

$$(x_0 - p)^2 + (y_0 - q)^2 = r^2,$$

mithin die Gleichung der Kegelfläche

$$\left(\frac{hx}{h - z} - p\right)^2 + \left(\frac{hy}{h - z} - q\right)^2 = r^2.$$

Nimmt man den Mittelpunkt der Fläche zum Koordinatenanfang, so dass nun die Direktrix in der Entfernung h parallel zur neuen xy-Ebene liegt, so ist noch einfacher

$$\left(\frac{hx}{z} - p\right)^2 + \left(\frac{hy}{z} - q\right)^2 = r^2$$

die Gleichung der Fläche.

Schnitte der Kegelfläche. Bei der Erörterung der verschiedenen Lagen einer Ebene gegen eine Kegelfläche unterscheiden wir die beiden Hauptfälle, ob die Ebene durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht oder nicht. Findet das erste statt, so geben die xy-Spuren der Fläche und der Ebene ein leichtes Mittel an die Hand, um die Natur des Durchschnittes beider Gebilde kennen zu lernen. Es kann nämlich die Spur der Ebene die Spur der Fläche

entweder in gewissen Punkten schneiden, oder in einem Punkte berühren, oder keinen Punkt mit ihr gemein haben; im ersten Falle schneidet die Ebene die Fläche in eben so viel erzeugenden Geraden, im zweiten Falle berührt die Ebene die Fläche längs einer erzeugenden Geraden, im dritten Falle hat die Ebene ausser dem Mittelpunkte der Kegelfläche keinen weiteren Punkt mit letzterer gemein. Wenn dagegen die Ebene nicht durch den Mittelpunkt der Kegelfläche geht, so wird sie diese im allgemeinen in irgend einer krummen Linie schneiden. Die Projektionen der letzteren findet man dadurch, dass man die Gleichung der Kegelfläche mit der Gleichung der Ebene verbindet und eine der Koordinaten x, y, z eliminiert; die Elimination von z giebt die Gleichung der xy-Projektion der Durchschnittslinie, die Elimination von y liefert die Gleichung der xz-Projektion, die Elimination von x die Gleichung der yz-Projektion. Will man die Gleichung der ebenen Durchschnittslinie selber haben, so bedarf es einer Transformation der Koordinaten, und zwar wählt man dabei die schneidende Ebene zur Ebene der neuen xy, wie dies in den Formeln 8) bis 12) in § 22 angegeben ist. Nach diesen Bemerkungen findet man z. B. leicht, dass der Schnitt jeder Kegelfläche, deren Direktrix eine Kurve zweiten Grades ist, wiederum eine Linie desselben Grades darstellt.

Berührungsebenen, Tangenten und Normalen der Kegelflächen. In dem vorigen liegt bereits das Mittel zur Konstruktion derjenigen Ebene, welche eine gegebene Kegelfläche in einem bestimmten Punkte P berührt. Man zieht nämlich die durch P gehende erzeugende Gerade, legt durch ihre xy-Spur eine Tangente an die gleichnamige Spur der Fläche und konstruiert die Ebene, welche jene Erzeugungslinie und diese Tangente enthält; die hiermit bestimmte Ebene berührt die Kegelfläche längs der genannten erzeugenden Geraden. Jede durch einen Berührungspunkt gehende in dieser Ebene liegende Gerade heisst eine Tangente der Fläche; die auf der Berührungsebene in einem ihrer Berührungspunkte errichtete Senkrechte nennt man die Normale der Fläche in diesem Punkte.

§ 26.

Der elliptische Kegel.

Wir betrachten hier einen elliptischen Kegel, dessen Direktrix eine Ellipse ist und dessen Spitze in einer Normalen zur Ebene

der Direktrix liegt, die durch den Mittelpunkt der Direktrix geht. Die Direktrix mag die grosse Halbachse a, die kleine b haben, die Entfernung des Kegelmittelpunktes von der Direktrix soll c heissen, die Koordinatenachsen der x, y, z legen wir der Reihe nach in a, b, c, und haben so als Gleichung der Direktrix

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

ferner als Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x = -\frac{x_0}{c}(z - c), \quad y = -\frac{y_0}{c}(z - c),$$

mithin als Gleichung der elliptischen Kegelfläche

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z - c)^2}{c^2}.$$

Noch einfacher gestaltet sich das Resultat, wenn wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt der Fläche verlegen; die Direktrix liegt dann in der Entfernung c parallel zur xy-Ebene und hat

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c$$

zur Gleichung; für die Gleichung der Fläche erhalten wir

$$2) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2.$$

Der Durchschnitt der Fläche mit der xz-Ebene besteht aus zwei Geraden, deren Gleichungen lauten

$$y = 0, \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2;$$

der Durchschnitt der Fläche mit der yz-Ebene besteht gleichfalls aus zwei durch die Gleichungen

$$x = 0, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

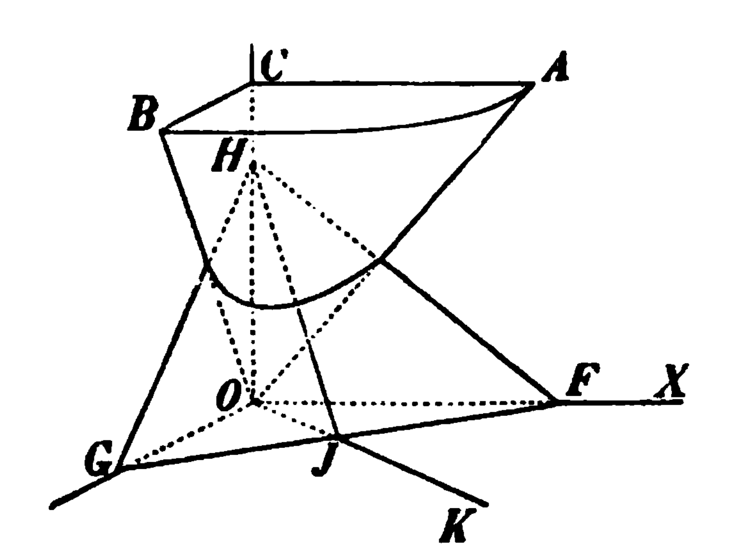
bestimmten Geraden. Man erkennt hieraus die geometrische Bedeutung der Verhältnisse $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$; es ist nämlich $\frac{c}{a}$ die Cotangente des Winkels AOZ, welchen die xz-Spur der Fläche mit der

z-Achse einschliesst, ebenso $\frac{c}{b}$ die Kotangente des Winkels BOZ zwischen der yz-Spur der Fläche und derselben Achse. Bezeichnen wir die genannten Winkel mit α und β, so können wir der Gleichung 2) die Form

3) $x^2 cot^2 \alpha + y^2 cot^2 \beta = z^2$

erteilen, welche in manchen Fällen bequemer ist.

Fig. 36.



Eine durch die Gleichung

4) $Ax + By + Cz = D$

charakterisierte Ebene schneidet die Kegelfläche in einer Kurve, deren Horizontalprojektion durch Elimination von z gefunden wird; die betreffende Gleichung lautet:

$$5)\qquad \left(\frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{c^2}\right) x^2 + \left(\frac{C^2}{b^2} - \frac{B^2}{c^2}\right) y^2 - 2\,\frac{AB}{c^2}\,xy$$
$$+ 2\,\frac{AD}{c^2}\,x + 2\,\frac{BD}{c^2}\,y - \frac{D^2}{c^2} = 0.$$

Man erkennt hieraus, dass die Horizontalprojektion des Schnittes, mithin auch letzterer selbst, eine Linie zweiten Grades ist. Setzen wir zunächst $D \gtrless 0$ voraus, in welchem Falle die Ebene nicht durch den Kegelmittelpunkt (Koordinatenanfang) geht, so entscheidet sich die Natur des Durchschnittes nach der bekannten Regel, dass die Gleichung

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2\,C_1 xy + 2\,D_1 x + 2\,E_1 y + F_1 = 0$$

eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel charakterisiert, jenachdem der Ausdruck

$$C_1^2 - A_1 B_1$$

negativ, positiv oder gleich Null ist. Durch Anwendung auf die Gleichung 5) folgt der Satz: der Durchschnitt der Ebene mit der Kegelfläche ist

eine Ellipse für $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2c^2$,
„ Hyperbel „ $A^2a^2 + B^2b^2 > C^2c^2$,
„ Parabel „ $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2$,

immer $D \lessgtr 0$ vorausgesetzt. — Lassen wir zweitens D in Null übergehen, so reduziert sich im ersten Falle die Ellipse auf einen blossen Punkt und die Ebene hat dann mit der Kegelfläche nur den

Kegelmittelpunkt gemein; im zweiten Falle degeneriert die Hyperbel zu zwei Geraden; im dritten Falle verwandelt sich die Parabel in eine Gerade und die Ebene berührt die Kegelfläche längs dieser Geraden. Die letzteren Resultate können leicht mittels der Direktrix verifiziert werden. Der Durchschnitt der Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

mit der Ebene der Direktrix ist nämlich für $z = c$

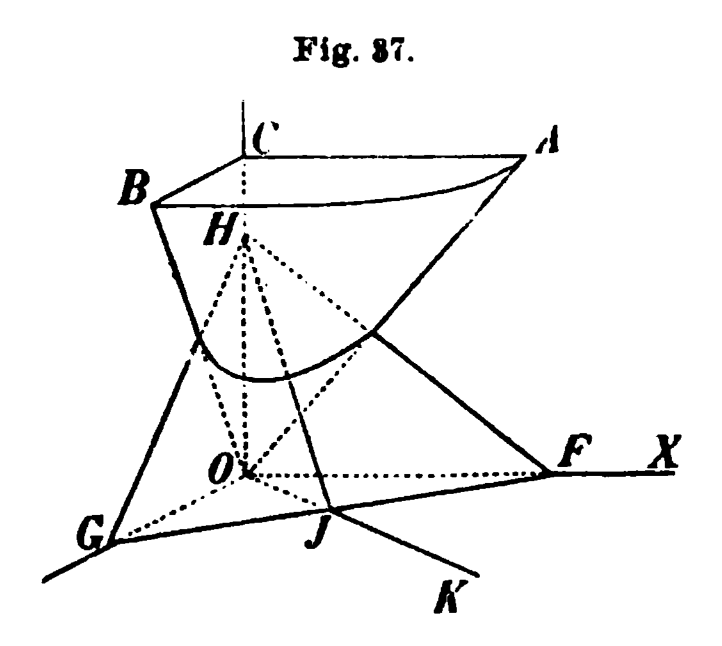
$$Ax + By + Cc = 0,$$

d. h. eine Gerade; diese hat mit der Direktrix

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

keinen Punkt gemein, wenn $A^2a^2 + B^2b^2 < C^2c^2$; sie schneidet dieselbe in zwei Punkten, wenn $A^2a^2 + B^2b^2 > C^2c^2$; sie berührt die Direktrix, wenn $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2$; hieraus folgen unmittelbar die angegebenen Eigenschaften der Ebene.

Fig. 87.



Um die Gleichung der Durchschnittslinie selber zu erhalten, nehmen wir die Schnittebene FGH zur Ebene $x'y'$ eines neuen Koordinatensystems; die Strecke OG, welche die Ebene von der y-Achse abschneidet, heisse g, der Anfangspunkt der neuen Koordinaten sei G, ferner GF die Achse der positiven x', $\angle GFO = \psi$ und der Neigungswinkel HJK der Ebene gegen die xy-Ebene $= \vartheta$. Wir haben jetzt nach den Formeln 8) in § 22:

$$\begin{aligned} x &= \quad\; x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= g + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= \quad\; y' \sin\vartheta, \end{aligned}$$

mithin durch Substitution in die Gleichung 2) und bei gehöriger Anordnung

$$6) \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}\right) x'^2 + \left\{\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right) \cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\right\} y'^2 \\ &\qquad + 2\,\frac{(a^2 - b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{a^2b^2}\, x'y' \\ &\qquad + 2\,\frac{g\sin\psi}{b^2}\, x' + 2\,\frac{g\cos\psi\cos\vartheta}{b^2}\, y' + \frac{g^2}{b^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Hieraus lassen sich nach bekannten Methoden die Achsen des Schnittes ihrer Lage und Grösse nach bestimmen, wobei wir nicht weiter verweilen wollen. Von Interesse ist nur noch die Frage, ob die durch Nr. 6) dargestellte Kurve nicht unter Umständen zu einem Kreise werden kann. Hierzu würden die Bedingungen

$$7)\qquad \frac{\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\psi}{b^2}=\left(\frac{\sin^2\psi}{a^2}+\frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta-\frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$8)\qquad (a^2-b^2)\cos\vartheta\cos\psi\sin\psi=0$$

gehören, von denen die letzte wegen der Voraussetzung $a>b$ nur durch

$$\vartheta=90^0 \quad\text{oder}\quad \psi=90^0 \quad\text{oder}\quad \psi=0^0$$

erfüllbar ist. Für $\vartheta=90^0$ liefert die Gleichung 7)

$$\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{b}\right)^2=-\frac{1}{c^2}$$

also ein unmögliches Resultat; für $\psi=90^0$ wird aus Nr. 7)

$$\frac{1}{b^2}=\frac{\cos^2\vartheta}{a^2}-\frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\quad\text{oder}\quad \sin\vartheta=\frac{c\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{a^2+c^2}},$$

mithin ϑ imaginär (wegen $b<a$); endlich für $\psi=0$ ergiebt sich aus Nr. 7)

$$9)\qquad \frac{1}{a^2}=\frac{\cos^2\vartheta}{b^2}-\frac{\sin^2\vartheta}{c^2}\quad\text{oder}\quad \sin\vartheta=\frac{c\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Giebt man dem für $\sin\vartheta$ erhaltenen Werte die Form

$$\sin\vartheta=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}},$$

so erscheint $\sin\vartheta$ als Produkt zweier echten Brühe, mithin ist der Wert von $\sin\vartheta$ ein echter Bruch, folglich ϑ immer möglich und zwar zweideutig, weil man dafür ebensowohl einen spitzen als einen stumpfen Winkel nehmen kann. Demnach wird der elliptische Kegel durch zwei Systeme von Ebenen in Kreisen geschnitten; alle diese Ebenen sind der x-Achse parallel und bilden mit der xy-Ebene gleiche Winkel entweder nach der positiven oder nach der negativen Seite der z hin. Stellt man die Gleichung einer der x-Achse parallelen Ebene in der Form

$$10)\qquad By+Cz=D$$

dar, so bestimmt sich ihr Neigungswinkel gegen die xy-Ebene durch die Formel

$$\cos^2\vartheta = \frac{C^2}{B^2+C^2} \quad \text{oder} \quad \sin^2\vartheta = \frac{B^2}{B^2+C^2};$$

durch Substitution des letzteren Ausdrucks folgt aus Nr. 9), dass die Ebene 10) die Kegelfläche in einem Kreise schneidet, wenn die Bedingung

$$11) \qquad \frac{B^2}{C^2} = \frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2+c^2)}$$

erfüllt ist.

Wir lösen endlich noch die Aufgabe, „durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine Berührungsebene an die elliptische Kegelfläche zu legen". Da die gesuchte Ebene jedenfalls durch den Mittelpunkt der Fläche gehen muss, so ist ihre Gleichung von der Form

$$A\xi + B\eta + C\zeta = 0;$$

ferner haben wir, weil diese Ebene durch den Punkt $x_1 y_1 z_1$ gehen soll

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0,$$

endlich wegen der verlangten Berührung

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2.$$

Einfacher werden diese Gleichungen, wenn wir

$$\frac{A}{C} = M, \qquad \frac{B}{C} = N$$

setzen; die Gleichung der Berührungsebene ist dann

$$12) \qquad M\xi + N\eta + \zeta = 0$$

und darin gelten für M und N die Bedingungen

$$Mx_1 + Ny_1 + z_1 = 0,$$
$$M^2a^2 + N^2b^2 = c^2.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich

$$M = \frac{-b^2x_1z_1 \pm y_1\sqrt{b^2c^2x_1^2 + a^2c^2y_1^2 - a^2b^2z_1^2}}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2},$$

$$N = \frac{-a^2y_1z_1 \pm x_1\sqrt{b^2c^2x_1^2 + a^2c^2y_1^2 - a^2b^2z_1^2}}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2}.$$

Demnach sind zwei berührende Ebenen, eine Tangentialebene, oder keine derartige Ebene möglich, jenachdem

$$b^2c^2x_1^2 + a^2c^2y_1^2 \gtreqless a^2b^2z_1^2$$

oder

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 \gtreqless \left(\frac{z_1}{c}\right)^2,$$

d. h. jenachdem der Punkt $x_1 y_1 z_1$ ausserhalb, auf oder innerhalb des von der Kegelfläche umschlossenen Raumes liegt. Schreiben wir im zweiten Falle x, y, z für x_1, y_1, z_1, so ist

$$-\frac{c^2 x}{a^2 z}\xi + \frac{c^2 y}{b^2 z}\eta + \zeta = 0$$

oder symmetrischer

13) $$\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta = \frac{z}{c^2}\zeta$$

die Gleichung der durch den Punkt xyz der Kegelfläche gehenden Berührungsebene.

Hieraus findet man leicht

14) $$\xi - x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = -\frac{c^2 y}{b^2 z}(\zeta - z)$$

als Gleichungen der im Punkte xyz auf der Kegelfläche errichteten Normalen.

§ 27.

Der elliptische Kegel als schiefer Kreiskegel.

Nimmt man irgend einen Kreisschnitt des elliptischen Kegels als neue Direktrix, so kann der elliptische Kegel auch als schiefer Kreiskegel angesehen werden, wodurch die Formeln eine andere Gestalt bekommen. Die Ebene eines Kreisschnittes wählen wir zur xy-Ebene eines neuen rechtwinkligen Koordinatensystemes, dessen Anfang im Mittelpunkte des Kreisschnittes liegen möge; die Gleichung der Direktrix, welche gleichzeitig die Horizontalspur des Kegels bildet, ist jetzt

$$x_0^2 + y_0^2 = r^2.$$

Bezeichnen wir ferner mit a, b, c die Koordinaten der Kegelspitze, so sind die Gleichungen der erzeugenden Geraden

$$x - a = -\frac{x_0 - a}{c}(z - c), \qquad y - b = -\frac{y_0 - b}{c}(z - c);$$

durch Elimination von x_0 und y_0 ergiebt sich

1) $$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = r^2 (z - c)^2$$

als Gleichung der Kegelfläche.

Ihr Durchschnitt mit einer beliebigen durch die Gleichung

$$2)\qquad Ax + By + Cz = D$$

repräsentierten Ebene ist eine Linie zweiten Grades, deren Horizontalprojektion sich durch Elimination von z aus den Gleichungen beider Flächen bestimmt; die Gleichung der erwähnten Horizontalprojektion ist von der Form

$$3)\qquad A_1x^2 + B_1y^2 + 2C_1xy + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

und darin

$$A_1 = (Aa + Cc)^2 + A^2(b^2 - r^2),$$
$$B_1 = (Bb + Cc)^2 + B^2(a^2 - r^2),$$
$$C_1 = (Aa + Cc)Ba + (Bb + Cc)Ab - ABr^2.$$

Vermöge dieser Werte erhält man nach gehöriger Reduktion*

$$C_1^2 - A_1B_1 = (A^2 + B^2)r^2 - (Aa + Bb + Cc)^2$$

und hieraus ergiebt sich, dass der Schnitt einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, jenachdem

$$4)\qquad r^2 \begin{smallmatrix}<\\=\\>\end{smallmatrix} \frac{(Aa + Bb + Cc)^2}{A^2 + B^2}.$$

Die geometrische Bedeutung hiervon wird auf folgende Weise sichtbar. Durch den Mittelpunkt der Kegelfläche legen wir parallel zur schneidenden Ebene eine Hilfsebene; die Gleichung der letzteren ist

$$A(x - a) + B(y - b) + C(z - c) = 0,$$

und die Gleichung ihrer Horizontalspur ($z = 0$)

$$Ax + By = Aa + Bb + Cc.$$

Für die Entfernung p dieser Geraden vom Koordinatenanfange ergiebt sich

$$p^2 = \frac{(Aa + Bb + Cc)^2}{A^2 + B^2};$$

demnach ist der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem die Horizontalspur der Hilfsebene ausserhalb der Direktrix liegt, sie berührt oder schneidet.

---

* Bezeichnet man nämlich zur Abkürzung $Aa + Cc$ mit α und $Bb + Cc$ mit β, so findet sich zunächst

$$C_1^2 - A_1B_1 = r^2[A^2(\beta - Bb)^2 + B^2(\alpha - Aa)^2] - (\alpha\beta - ABab)^2,$$

welcher Ausdruck nach Substitution der Werte von α und β die oben erwähnte Form annimmt.

Geht die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kegelfläche, ist also

$$5) \qquad Aa + Bb + Cc = D,$$

so wird die im ersten der in Nr. 4) genannten Fälle, d. h. die für

$$r^2 < \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

entstehende Ellipse zu einem Punkte; die für

$$r^2 = \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

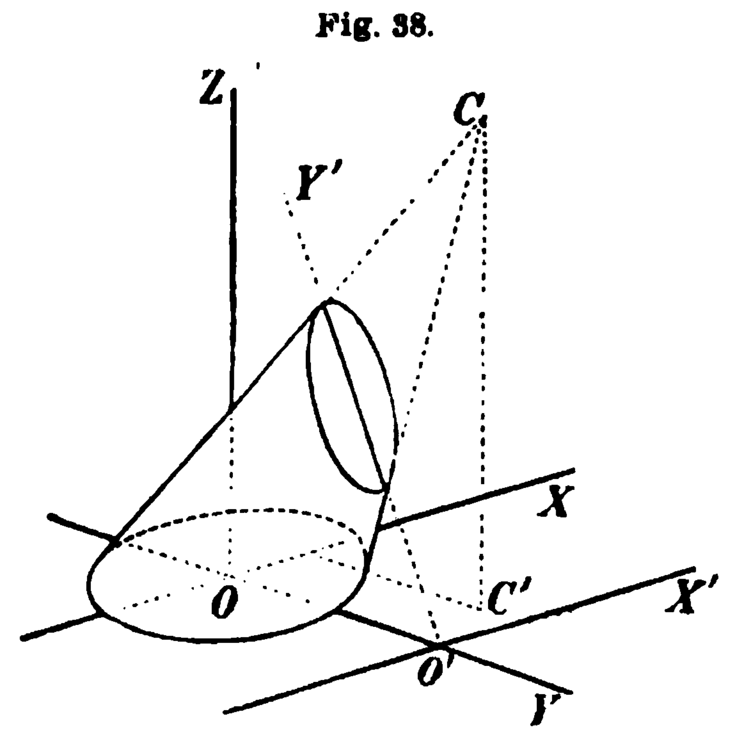
vorhandene Parabel degeneriert in eine Gerade, längs welcher die Ebene den Kegel berührt; endlich degeneriert die der Bedingung

$$r^2 > \frac{D^2}{A^2 + B^2}$$

entsprechende Hyperbel in zwei durch den Mittelpunkt der Fläche gehende Gerade.

Um die Gleichung des Kegelschnittes in möglichst einfacher Form zu erhalten, legen wir die bisher beliebige x-Achse parallel zur Horizontalspur der schneidenden Ebene, so dass die y-Achse mit der Senkrechten vom Koordinatenanfange auf jene Spur zusammenfällt; den Fusspunkt dieses Perpendikels nehmen wir zum Anfangspunkte eines neuen rechtwinkligen Systems, dessen x'-Achse die Horizontalspur der Schnittebene ist, wobei die positiven x' in derselben Richtung wie die positiven x gezählt werden mögen; die y'-Achse legen wir in die Schnittebene und ihre positive Seite nach der positiven Seite der z-Achse zu; endlich sei k der Abstand des neuen von dem früheren Koordinatenanfange und ϑ der Neigungswinkel der $x'y'$-Ebene gegen die xy-Ebene, d. h. der Winkel zwischen den Richtungen der positiven y und y'. Zufolge dieser Bestimmungen geschieht der Übergang von dem ursprünglichen zu dem jetzigen Koordinatensysteme mittels der Substitution (Nr. 8 in § 22 für $\psi = 0$)

Fig. 38.



$$x = x', \quad y = k + y' \cos\vartheta, \quad z = y' \sin\vartheta;$$

die Gleichung 1) erhält jetzt die Form

$$6)\qquad A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

und darin ist

$$A' = r^2, \quad B' = (a^2 - r^2)\sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2,$$
$$C' = -ac\sin\vartheta, \quad D' = 0,$$
$$E' = c[r^2\sin^2\vartheta - k(b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)], \quad F' = c^2(k^2 - r^2).$$

Hieraus folgt:

$$C'^2 - A'B' = c^2[r^2\sin^2\vartheta - (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2]$$

und dieser Wert giebt zu erkennen, dass der Schnitt zu einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel wird, jenachdem

$$r^2 \lesseqgtr (b - c\cot\vartheta)^2$$

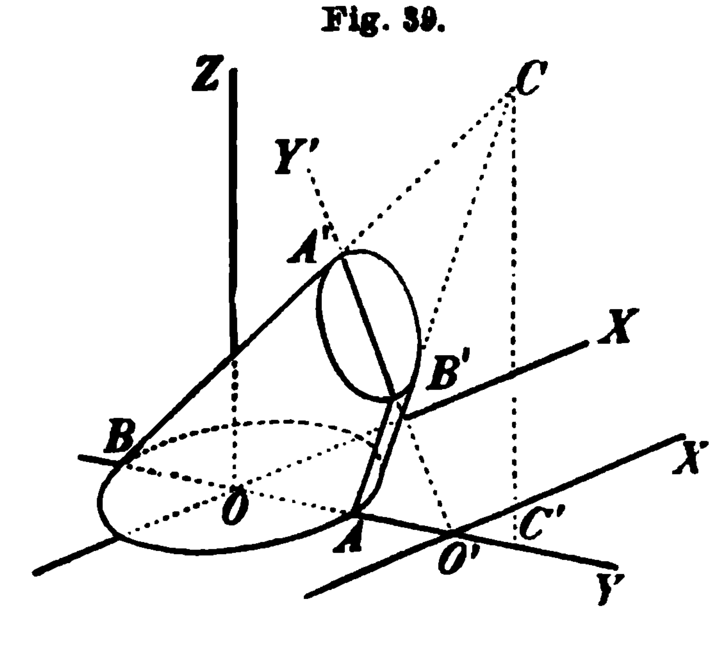
ausfällt. Dieses Resultat stimmt, wie leicht zu sehen ist, mit dem vorhin erhaltenen überein.

Soll der Kegelschnitt zu einem Kreise werden, so müssen die Bedingungen $A' = B'$ und $C' = 0$, d. h.

$$c^2 = (a^2 - r^2)\sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2,$$
$$ac\sin\vartheta = 0,$$

erfüllt sein. Die zweite dieser Gleichungen wird durch $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = 180^0$ erfüllt, doch giebt dies nichts anderes, als eine zur Direktrix parallele Ebene; da ferner c nicht $= 0$ sein kann, weil sonst die Kegelfläche zu einer Ebene degenerieren würde, so bleibt nur noch $a = 0$ übrig, wodurch gesagt ist, dass der Anfangspunkt des neuen Koordinatensystemes mit dem Mittelpunkte der Kegelfläche in einer und derselben auf der Direktrixebene senkrechten Ebene liegen muss.

Fig. 39.



Die erste der Bedingungsgleichungen wird jetzt

$$c^2 = -r^2\sin^2\vartheta + (b\sin\vartheta - c\cos\vartheta)^2$$

und liefert, wenn $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ durch $\tan\vartheta$ ausgedrückt werden

$$7)\qquad \tan\vartheta = \frac{2bc}{b^2 - c^2 - r^2}.$$

Die geometrische Bedeutung hiervon ergiebt sich, wenn man die beiden Winkel α und $\beta < \alpha$ in Rechnung bringt, welche die yz-Spuren AC und BC der Kegelfläche mit der y-Achse einschliessen; man hat nämlich

$$\tan\alpha = \frac{c}{b-r}, \qquad \tan\beta = \frac{c}{b+r},$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2bc}{b^2 - c^2 - r^2},$$

folglich $\alpha + \beta = \vartheta = \angle YO'A'$. Die yz-Spur der Schnittebene liegt demnach so, dass $\angle CB'A' = \angle CBA$ ist; der hiermit bestimmte Kreisschnitt des schiefen Kegels heisst dessen Wechselschnitt.

Soll durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ eine berührende Ebene an einen Kreiskegel gelegt werden, so bezeichne man die Gleichung der gesuchten Ebene vorläufig mit

$$8) \qquad L\xi + M\eta + N\zeta = 1;$$

dass sie den gegebenen Punkt $x_1 y_1 z_1$ enthalten muss, wird ausgedrückt durch

$$Lx_1 + My_1 + Nz_1 = 1,$$

die Berührung der verlangten Ebene mit der Fläche liefert ferner die Bedingungen

$$La + Mb + Nc = 1, \qquad r^2 = \frac{1}{L^2 + M^2}.$$

Eliminiert man N aus den beiden ersten Bedingungsgleichungen, so hat man

$$(az_1 - cx_1)L + (bz_1 - cy_1)M = z_1 - c,$$

$$L^2 + M^2 = \frac{1}{r^2},$$

und daraus finden sich die folgenden Werte von L und M, in denen zur Abkürzung

$$az_1 - cx_1 = u, \qquad bz_1 - cy_1 = v$$

gesetzt worden ist:

$$L = \frac{ru(z_1 - c) \pm v\sqrt{u^2 + v^2 - r^2(z_1 - c)^2}}{r(u^2 + v^2)},$$

$$M = \frac{rv(z_1 - c) \mp u\sqrt{u^2 + v^2 - r^2(z_1 - c)^2}}{r(u^2 + v^2)},$$

$$N = \frac{1 - aL - bM}{c}.$$

Demnach hat die Aufgabe zwei Auflösungen, eine oder keine Auflösung, jenachdem

$$u^2 + v^2 = r^2 (z_1 - c)^2,$$

d. h. jenachdem der Punkt $x_1 y_1 z_1$ ausserhalb des von der Kegelfläche umschlossenen Raumes, auf der Fläche oder innerhalb jenes Raumes liegt. Im zweiten Falle, wo wir x, y, z für x_1, y_1, z_1 schreiben, lautet die Gleichung der Berührungsebene bei vollständiger Entwickelung

$$9) \quad cu\xi + cv\eta + [r^2 (z - c) - au - bv]\, \zeta = cr^2 (z - c).$$

Hieraus ergeben sich noch die Gleichungen

$$10) \quad \begin{cases} \xi - x = \dfrac{cu}{r^2 (z - c) - au - bv} (\zeta - z), \\ \eta - y = \dfrac{cv}{r^2 (z - c) - au - bv} (\zeta - z) \end{cases}$$

als Gleichungen der durch den Punkt xyz der Kegelfläche gehenden Normalen.

Siebentes Kapitel.

Die Umdrehungsflächen.

§ 28.

Entstehung und Gleichung der Umdrehungsflächen.

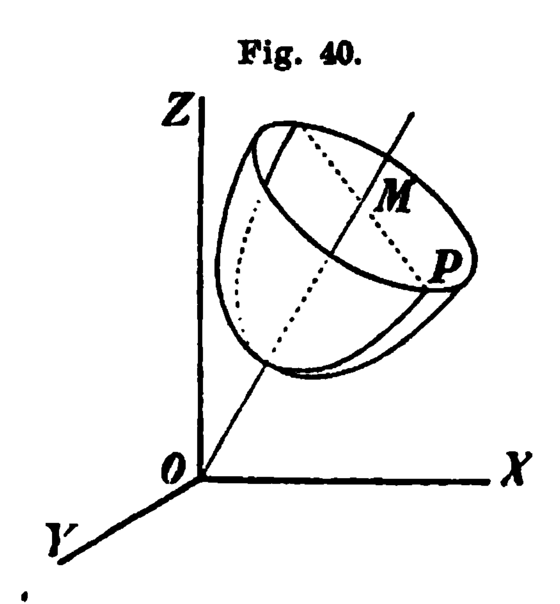
Denkt man sich irgend eine einfach oder doppelt gekrümmte Linie mit einer ihrer Lage nach bestimmten Geraden verbunden, so ist immer eine solche drehende Bewegung der Kurve möglich, dass jeder ihrer Punkte einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt auf der festen Geraden liegt; die rotierende Kurve erzeugt bei dieser Bewegung eine Fläche, welche eine Rotations- oder Umdrehungsfläche genannt wird; die unveränderliche Gerade heisst ihre Achse.

Aus dieser Entstehung der Fläche geht unmittelbar hervor, dass alle auf der Drehungsachse senkrechten Schnitte der Fläche Kreise sind, deren Halbmesser im allgemeinen verschieden ausfallen, jenachdem die Schnitte durch verschiedene Punkte der Achse gelegt werden. Diese Kreise werden die Parallelkreise der Fläche genannt. Ferner ist leicht einzusehen, dass die Fläche von allen Ebenen, welche die Drehungsachse in sich enthalten, in kongruenten Kurven geschnitten wird; diese Linien einfacher Krümmung, durch deren Drehung um die Achse gleichfalls die Rotationsfläche erzeugt werden kann, heissen die Meridiane der Fläche.

Um die allgemeine Form kennen zu lernen, unter welcher die Gleichung einer Umdrehungsfläche enthalten ist, denken wir uns durch einen beliebigen Punkt der Drehungsachse ein rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt und nennen α, β, γ die Richtungswinkel der Drehungsachse; ferner sei durch einen beliebigen

Punkt xyz der Fläche ein Parallelkreis gelegt, q dessen Halbmesser und p der Abstand seines Mittelpunktes vom Koordinatenanfang. Die Geraden $OM = p$ und $MP = q$ lassen sich nun als die ebenen rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Meridiankurve betrachten und es existiert daher zwischen p und q eine Gleichung von der Form

Fig. 40.



$$1)\qquad q = f(p),$$

oder, wenn statt q der Radiusvektor $OP = r$ in Rechnung gebracht wird,

$$\sqrt{r^2 - p^2} = f(p);$$

daraus folgt

$$2)\qquad r^2 = p^2 + [f(p)]^2,$$

welche Gleichung überhaupt unter der Form

$$3)\qquad r^2 = F(p)$$

enthalten ist. Durch Substitution der bekannten Werte

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

ergiebt sich nun als Gleichung der Rotationsfläche

$$4)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = F(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma).$$

Geht die Drehungsachse nicht durch den Koordinatenanfang, sondern durch einen Punkt $a\,b\,c$, so bedarf es nur einer Verschiebung des Koordinatensystems nach diesem Punkte; man erhält dann

$$5)\qquad \begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \\ = F[(x-a)\cos\alpha + (y-b)\cos\beta + (z-c)\cos\gamma] \end{cases}$$

als allgemeinste Gleichung der Rotationsflächen.

Am einfachsten gestaltet sich diese Gleichung, wenn man eine der Koordinatenachsen mit der Drehungsachse zusammenfallen lässt; gewöhnlich wählt man hierzu entweder die x-Achse oder die z-Achse. Im ersten Falle ist $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 90^0$, mithin nach Nr. 4)

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(x),$$

welcher Gleichung auch die Form

$$y^2 + z^2 = \Phi(x)$$

erteilt werden kann; im zweiten Falle ergiebt sich analog

$$x^2 + y^2 + z^2 = F(z)$$

oder

$$x^2 + y^2 = \Psi(z).$$

Diese Entwickelungen liefern unmittelbar die Gleichung der Rotationsfläche, wenn die Gleichung des Meridianes $[q = f(p)]$ bekannt ist, was namentlich in dem Falle stattfindet, wo die rotierende Kurve eine einfach gekrümmte ist und ihre Ebene die Drehungsachse enthält. Finden diese Umstände nicht gleichzeitig statt, so hat man den folgenden Weg einzuschlagen, wobei der Einfachheit wegen vorausgesetzt ist, dass die z-Achse mit der Drehungsachse zusammenfällt. Bei der primitiven Lage der rotierenden Kurve mögen die Koordinaten irgend eines ihrer Punkte mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet werden; die Projektionen der Kurve auf die beiden Vertikalebenen sind dann bestimmt durch zwei Gleichungen von den Formen

6) $$x_0 = \varphi(z_0), \qquad y_0 = \psi(z_0).$$

Dreht sich nun die Kurve um die z-Achse, so erhält der Punkt $x_0 y_0 z_0$ eine andere Lage, und zwar mögen x, y, z seine neuen Koordinaten in dem Falle heissen, wo die Drehung den Winkel ω von der positiven Seite der x-Achse nach der positiven Seite der y-Achse hin durchlaufen hat. Man kann diesen Winkel in der Horizontalprojektion sichtbar machen, wenn man die einander gleichen Vektoren der Punkte $x_0 y_0$ und xy zieht; ω ist dann der Winkel zwischen beiden Vektoren. Aus sehr einfachen Gründen hat man

$$x_0 = x\cos\omega + y\sin\omega, \qquad y_0 = -x\sin\omega + y\cos\omega, \qquad z_0 = z,$$

mithin nach Nr. 6)

7) $$x\cos\omega + y\sin\omega = \varphi(z), \qquad -x\sin\omega + y\cos\omega = \psi(z);$$

dies sind die Gleichungen der rotierenden Kurve in irgend einer ihrer Lagen, wobei der Winkel ω das Intervall von 0^0 bis 360^0 zu durchlaufen hat, wenn alle möglichen Lagen der Kurve zum Vorschein kommen sollen. Die Elimination von ω giebt

8) $$x^2 + y^2 = [\varphi(z)]^2 + [\psi(z)]^2$$

als Gleichung der erzeugten Rotationsfläche.

Beispiele hierzu liefern die Kurven zweiten Grades, deren entsprechende Flächen in den Fällen sehr einfache Gleichungen erhalten, wo die Drehung um eine der Hauptachsen vor sich geht. Denken wir uns die Ebene xz als die Ebene der in ihrer ursprünglichen Lage befindlichen rotierenden Kurve, so haben wir für eine durch den Koordinatenanfang gehende Gerade

$$x_0 = \frac{a}{c} z_0, \quad y_0 = 0,$$

mithin für die entstandene Kegelfläche

$$9) \qquad x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{c} z\right)^2 \text{ oder } \frac{x^2 + y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2};$$

dasselbe Resultat ergiebt sich aus der Gleichung 2) in § 26, wenn man den dort erwähnten elliptischen Kegel für $b = a$ zu einem geraden Kreiskegel werden lässt.

Die Gleichungen einer in der Ebene xz befindlichen Ellipse sind

$$x_0 = a\sqrt{1 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2}, \quad y_0 = 0,$$

wobei die Achsen der Ellipse zu Koordinatenachsen genommen sind; die Gleichung der erzeugten Umdrehungsfläche, des sogenannten Rotationsellipsoides, ist folglich

$$x^2 + y^2 = a^2\left[1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]$$

oder bei besserer Anordnung

$$10) \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Hierbei müssen wir die Fälle $a > c$, $a < c$ und $a = c$ unterscheiden. Im ersten Falle ist die Drehung um die kleinere Halbachse vor sich gegangen und das Ellipsoid heisst in diesem Falle ein abgeplattetes; im zweiten Falle ist die Drehungsachse die grössere Halbachse und das Ellipsoid ein gestrecktes; im letzten Falle wird die rotierende Kurve zu einem Kreise, mithin das Rotationsellipsoid zu einer Kugelfläche; die Gleichung der letzteren pflegt man gewöhnlich unter der Form

$$11) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

darzustellen, wobei $c = a$ den konstanten Halbmesser bedeutet.

Für eine Hyperbel, deren Hauptachse $2a$ mit der x-Achse, und deren Nebenachse $2c$ mit der z-Achse zusammenfällt, hat man

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 = 1 \text{ oder } x_0 = a\sqrt{1 + \left(\frac{z_0}{c}\right)^2}, \quad y_0 = 0;$$

mithin als Gleichung der erzeugten Umdrehungsfläche

$$x^2 + y^2 = a^2\left[1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right]$$

oder

$$12)\qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diese Fläche heisst das einfache Rotationshyperboloid. Ist dagegen c die Haupt- und a die Nebenhalbachse der Meridiankurve, so gelten für sie die Gleichungen

$$\left(\frac{z_0}{c}\right)^2 - \left(\frac{x_0}{a}\right)^2 = 1 \quad \text{oder} \quad x_0 = a\sqrt{\left(\frac{z_0}{c}\right)^2 - 1}, \quad y_0 = 0,$$

und daraus ergiebt sich als Gleichung der Umdrehungsfläche

$$13)\qquad -\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

letztere heisst das geteilte Rotationshyperboloid, weil sie aus zwei getrennten Stücken besteht.

Für eine Parabel, deren Achse mit der Drehungsachse, und deren Scheitel mit dem Koordinatenanfang zusammenfällt, hat man

$$x_0 = \sqrt{2kz_0} \qquad y_0 = 0,$$

wobei k den Halbparameter der Parabel bezeichnet; die entsprechende Umdrehungsfläche hat zur Gleichung

$$14)\qquad x^2 + y^2 = 2kz$$

und heisst das Rotationsparaboloid. Giebt man der Parabel die umgekehrte Lage, so dass ihre Achse mit der x-Achse zusammenfällt, so findet sich

$$z_0 = \sqrt{2kx_0} \quad \text{oder} \quad x_0 = \frac{z_0^2}{2k}, \quad y_0 = 0,$$

und

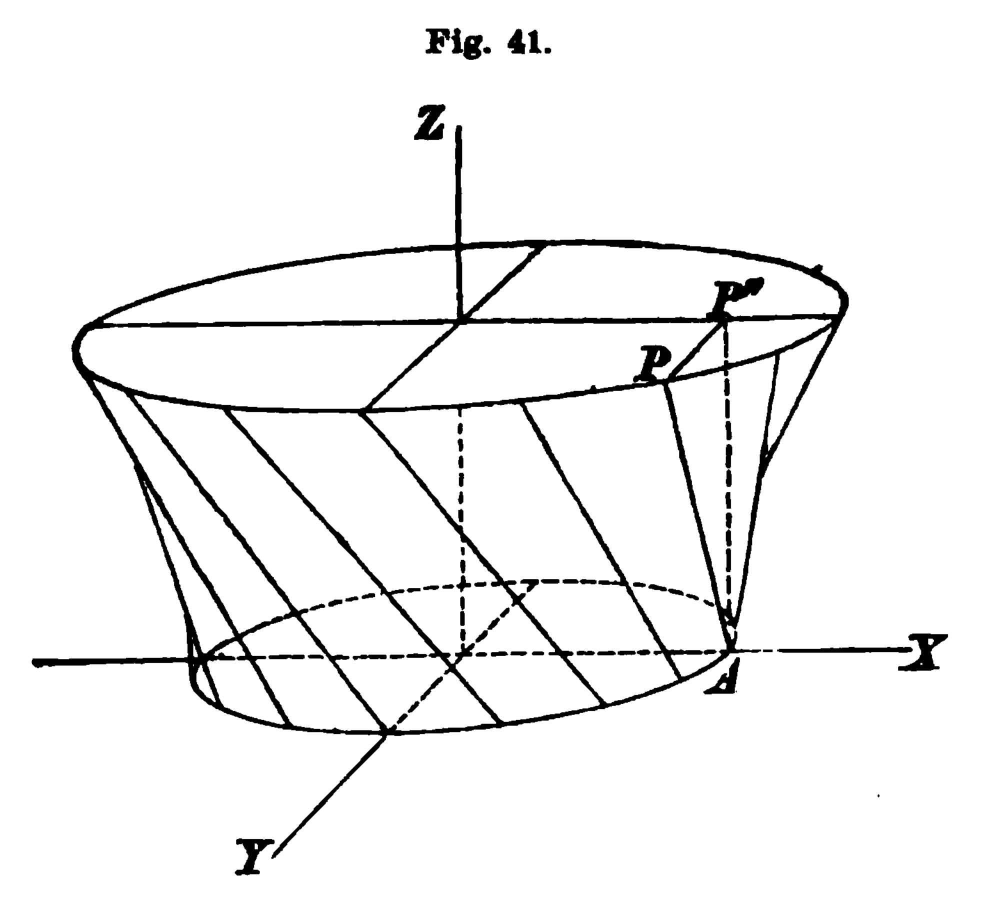
$$x^2 + y^2 = \frac{z^4}{4k^2}.$$

Während die Gleichungen der vorigen Umdrehungsflächen von demselben (zweiten) Grade waren, wie die ihrer Meridiankurven, findet bei der letzten Fläche diese Übereinstimmung nicht mehr statt; sie führt deshalb keinen besonderen Namen.

Um ein Beispiel für den Fall zu haben, wo die rotierende Kurve nicht in einer Ebene mit der Drehungsachse liegt, denken wir uns von zwei sich kreuzenden Geraden die eine um die andere herumgedreht. Die feste Gerade sei wieder die z-Achse, die kürzeste Entfernung beider Geraden, in der ursprünglichen Lage der letz-

teren genommen, sei der Richtung nach zusammenfallend mit der x-Achse und der Grösse nach $= a$, endlich heisse γ der konstante Neigungswinkel $PAP' = 90^0 - \angle PAP''$ der beweglichen Geraden gegen die xy-Ebene. Die Gleichungen der rotierenden Geraden sind jetzt bei deren primitiver Lage

Fig. 41.



$$x_0 = a, \quad y_0 = z_0 \cot\gamma,$$

mithin lautet die Gleichung der erzeugten Fläche

$$x^2 + y^2 = a^2 + z^2 \cot^2\gamma,$$

oder besser

$$15) \qquad \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{(a \tan\gamma)^2} = 1.$$

Der Vergleich mit Nr. 12) führt zu dem bemerkenswerten Resultate, dass die entstandene Umdrehungsfläche ein einfaches **Rotationshyperboloid** ist, welches die kürzeste Entfernung a beider Geraden zur Haupthalbachse und $a \tan\gamma$ zur Nebenhalbachse hat. Daraus folgt umgekehrt, dass sich auf jedem einfachen Rotationshyperboloide unendlich viel gerade Linien ziehen lassen; jede solche Gerade steht senkrecht auf irgend einem Halbmesser des kleinsten Parallelkreises und ist gegen die Ebene des letzteren um einen Winkel γ geneigt, der sich durch die Formel $\tan\gamma = \frac{c}{a}$ bestimmt.

§ 29.

Schnitte, Berührungsebenen und Normalen der Rotationsflächen.

I. Das Verfahren zur Bestimmung des Durchschnittes einer Umdrehungsfläche mit einer Ebene oder beliebigen anderen Fläche ist im allgemeinen das nämliche, wie bei den schon besprochenen Gattungen von Flächen; eliminiert man nämlich aus den Gleichungen der sich schneidenden Flächen das eine Mal z, das andere Mal y, so erhält man im ersten Falle die Gleichung der xy-Projektion, im anderen Falle die Gleichung der xz-Projektion des Durchschnittes

Bei einem ebenen Schnitte kann auch eine Transformation der Koordinaten vorgenommen werden, welche die Gleichung des Durchschnittes selber kennen lehrt. Ein paar nicht gewöhnliche Beispiele hierzu sind folgende.

Durchschnitt einer Kugel mit einem elliptischen Kegel. Beschreibt man aus dem Mittelpunkte eines elliptischen oder schiefen Kreiskegels eine Kugelfläche, so ist der Durchschnitt beider Flächen ein sogenannter sphärischer Kegelschnitt (sphärische Ellipse), für dessen Punkte die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{und} \quad x^2 \cot^2\alpha + y^2 \cot^2\beta - z^2 = 0$$

zusammen gelten [Nr. 11) in § 28 und Nr. 3) in § 26]. Als Gleichung der Horizontalprojektion findet sich hieraus

$$\frac{x^2}{(r\sin\alpha)^2} + \frac{y^2}{(r\sin\beta)^2} = 1;$$

letztere ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen $a' = r\sin\alpha$ und $b' = r\sin\beta$. Die Vertikalprojektion hat zur Gleichung

$$\frac{x^2}{\dfrac{r^2\cot^2\beta}{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}} + \frac{y^2}{(r\cos\beta)^2} = 1,$$

und ist, $\alpha > \beta$ vorausgesetzt, eine Ellipse mit den Halbachsen

$$a'' = \frac{r\cot\beta}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}, \quad c'' = r\cos\beta.$$

Die Projektion auf die Ebene yz bestimmt sich durch die Gleichung

$$-\frac{y^2}{\dfrac{r^2\cot^2\alpha}{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}} + \frac{z^2}{(r\cos\alpha)^2} = 1,$$

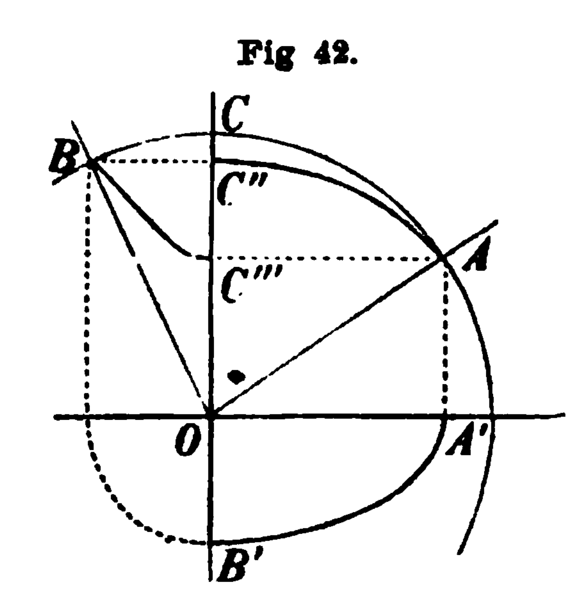
und ist eine Hyperbel, deren Haupthalbachse $c''' = r\cos\alpha$ in der Richtung der z liegt, und deren Nebenhalbachse

$$b''' = \frac{r\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}$$

ist. In der Figur sind die drei Projektionsebenen auf die in § 2 erwähnte Weise auseinander gelegt; OA und OB sind die Vertikalspuren des elliptischen Kegels, welche mit der z-Achse die Winkel $AOC = \alpha$ und $BOC = \beta$ bilden, OC ist der Kugelhalbmesser

$OA' = a'$, $OB' = b'$, $OC'' = c''$, $OC''' = c'''$; die in der Figur nicht angegebenen Halbachsen a'' und b'' finden sich leicht aus der Bemerkung, dass die Vertikalellipse durch den Punkt A und die Hyperbel durch den Punkt B gehen muss.

Fig 42.



Durchschnitt eines Rotationsparaboloides und eines elliptischen Kegels. Unter der Voraussetzung, dass die Achsen beider Flächen zusammenfallen, sind die Gleichungen der letzteren

$$x^2 + y^2 = 2kz, \quad x^2 \cot^2\alpha + y^2 \cot^2\beta = z^2.$$

Die Horizontalprojektion des Durchschnitts hat die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 = (2k\cot\alpha)^2 x^2 + (2k\cot\beta)^2 y^2$$

und ist die sogenannte Fusspunktkurve einer aus den Halbachsen $a' = 2k\cot\alpha$, $b' = 2k\cot\beta$ konstruierten Ellipse. Als Gleichung der Vertikalprojektion des Durchschnittes ergiebt sich

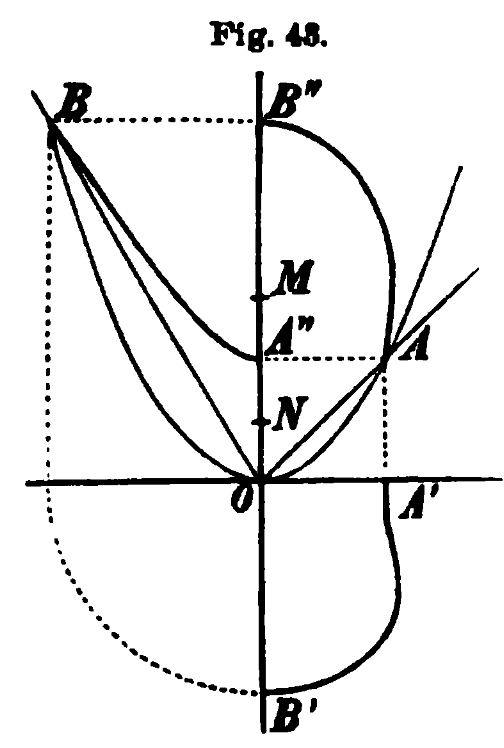
$$(\cot^2\beta - \cot^2\alpha)x^2 + (z - k\cot^2\beta)^2 = k^2\cot^4\beta;$$

sie bedeutet eine Ellipse, deren Halbachsen

$$a'' = \frac{k\cot^2\beta}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}, \quad c'' = k\cot^2\beta$$

sind und deren Mittelpunkt in der Höhe $k\cot^2\beta$ über dem Koordinatenanfange auf der z-Achse liegt. Die Gleichung der seitlichen Vertikalprojektion lautet:

Fig. 43.



$$(z - k\cot^2\alpha)^2 - (\cot^2\beta - \cot^2\alpha)y^2 = k^2\cot^4\alpha;$$

ihr entspricht eine aus den Halbachsen

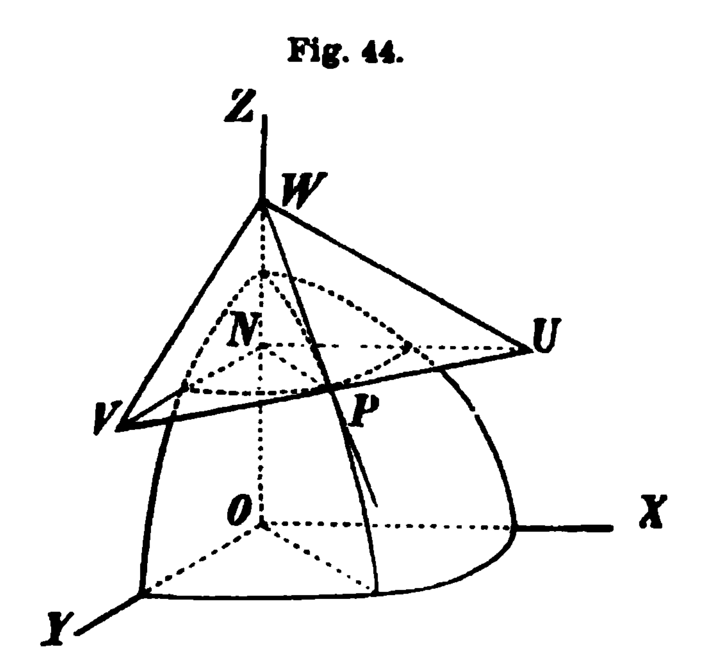
$$c''' = k\cot^2\alpha, \quad b''' = \frac{k\cot^2\alpha}{\sqrt{\cot^2\beta - \cot^2\alpha}}$$

konstruierte Hyperbel, deren Mittelpunkt in der Höhe $k\cot^2\alpha$ über dem Koordinatenanfange auf der z-Achse liegt. In der Figur ist $OA' = a'$, $OB' = b'$, $OB'' = 2c''$ und der Mittelpunkt M dieser Linie der Mittelpunkt der Vertikalellipse; die Hauptbalbachse a'' der letzteren lässt sich leicht mittels der Bemerkung finden, dass die Ellipse durch den Punkt A geht. Ferner ist $OA'' = 2c'''$ und die Mitte N dieser Linie der

Mittelpunkt der Hyperbel; die Nebenhalbachse der letzteren kann leicht aus a'' hergeleitet werden. Man wird übrigens, wenn es auf eine Zeichnung ankommt, am zweckmässigsten zuerst die beiden Vertikalprojektionen konstruieren und aus diesen die Horizontalprojektion ableiten.

II. Legt man durch einen gegebenen Punkt P einer Rotationsfläche einen Parallelkreis und einen Meridian, konstruiert man ferner die beiden Geraden, welche jene zwei ebenen Kurven in P berühren, und legt endlich durch diese sich schneidenden Tangenten eine Ebene, so heisst letztere eine Berührungsebene der Fläche und P ihr Berührungspunkt. Ihre Gleichung wird am kürzesten auf folgende Weise gefunden. Der Mittelpunkt des durch P gelegten Parallelkreises sei N, sein Halbmesser ist dann $NP = \sqrt{x^2 + y^2}$, und wenn man in P an den Kreis eine Tangente legt, so schneidet letztere die Ebene xz in einem Punkte U, dessen Koordinaten

Fig. 44.



$$\frac{x^2 + y^2}{x}, \quad 0, \quad z,$$

sind; dieselbe Tangente schneidet die yz-Ebene in einem durch die Koordinaten

$$0, \quad \frac{x^2 + y^2}{y}, \quad z$$

bestimmten Punkte V. Ferner sei ONP der durch den Punkt P geführte Meridianschnitt, PW die im Punkte P an den Meridian gelegte Tangente und $OW = t$ das von letzterer auf der z-Achse abgeschnittene Stück; die Strecke t ist immer bekannt und aus der bekannten Meridiangleichung leicht zu finden. Legen wir nun durch den Punkt W, dessen Koordinaten $0, 0, t$ sind, und durch die Punkte U, V eine Ebene, so finden wir als Gleichung derselben

$$1) \qquad x\xi + y\eta + \frac{x^2 + y^2}{t - z}\,\zeta = \frac{x^2 + y^2}{t - z}\,t;$$

hiermit ist die Berührungsebene im Punkte xyz soweit bestimmt, dass es in jedem individuellen Falle nur noch der Substitution des Wertes von t bedarf.

Daraus ergeben sich auch die Gleichungen der Vertikalprojektionen einer im Punkte xyz auf der Berührungsebene errichteten Senkrechten, nämlich

$$2)\quad \xi - x = \frac{x(t-z)}{x^2+y^2}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{y(t-z)}{x^2+y^2}(\zeta - z);$$

dies sind die Gleichungen der Normalen im Punkte xyz.

Als Beispiel diene das Rotationsellipsoid; jeder Meridian desselben ist eine aus den Halbachsen a und c konstruierte Ellipse, und nach einem bekannten Satze schneidet die Tangente im Punkte P von der z-Achse die Strecke $t = \frac{c^2}{z}$ ab. Hieraus folgt:

$$\frac{x^2+y^2}{t-z} = \frac{x^2+y^2}{c^2-z^2}\, z$$

oder vermöge der Gleichung der Fläche [Nr. 10) in § 28]:

$$\frac{x^2+y^2}{t-z} = \frac{a^2}{c^2}\, z;$$

demnach lautet die Gleichung der Berührungsebene

$$x\xi + y\eta + \frac{a^2}{c^2} z\zeta = a^2$$

oder in besserer Form:

$$3)\qquad \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{a^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1.$$

Die Gleichungen der Normale sind

$$4)\qquad \xi - x = \frac{c^2 x}{a^2 z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{c^2 y}{a^2 z}(\zeta - z).$$

Wir unterlassen die weitere Ausführung dieser Betrachtungen, weil die hauptsächlichsten der vorhin erwähnten Rotationsflächen nur spezielle Fälle von allgemeineren Flächen sind, mit deren Untersuchung sich die nächsten Kapitel beschäftigen.

Achtes Kapitel.

Die Flächen zweiten Grades.

§ 30.

Diskussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades.

In den drei letzten Kapiteln kamen mehrere Flächen vor, deren Gleichungen vom zweiten Grade sind, doch blieb dabei unentschieden, ob mit jenen Flächen die ganze Reihe der möglichen Flächen zweiten Grades bereits erschöpft ist oder nicht; das letztere würde namentlich dann der Fall sein, wenn Flächen zweiten Grades existieren sollten, die weder Cylinder-, noch Kegel-, noch Umdrehungsflächen sind. Um hierüber zu entscheiden, betrachten wir die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen drei Koordinaten, nämlich

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,Dyz + 2\,Ezx + 2\,Fxy \\ + 2\,Gx + 2\,Hy + 2\,Iz + K = 0, \end{aligned}$$

und untersuchen, welche verschiedenen Flächen dieselbe repräsentiert. Wir werden dabei im allgemeinen denselben Weg einschlagen, den die analytische Geometrie bei der Diskussion der Gleichung zweiten Grades zwischen zwei Koordinaten zu befolgen pflegt.

Aus der Lehre von der Transformation der Koordinaten ist bekannt, dass der Grad einer Flächengleichung bei dem Übergange zu einem neuen Koordinatensysteme ungeändert bleibt; wäre demnach die Gleichung 1) auf ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem bezogen, so würde man diesem ein rechtwinkliges System der $x'y'z'$ substituieren können und eine neue Gleichung von der Form

$$\begin{aligned} A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2\,D'y'z' + 2\,E'z'x' + 2\,F'x'y' \\ + 2\,G'x' + 2\,H'y' + 2\,I'z' + K' = 0 \end{aligned}$$

erhalten. Letztere ist von ganz ähnlicher Zusammensetzung, wie die ursprüngliche Gleichung, wir brauchen daher unsere Diskussion vorläufig nur auf den Fall zu beziehen, wo das zu Grunde liegende Koordinatensystem ein rechtwinkliges ist.

Irgend einen Punkt xyz der zu untersuchenden Fläche zweiten Grades verbinden wir mit einem beliebig im Raume gewählten Punkte $\xi\eta\zeta$ durch eine Gerade und bezeichnen mit r die Entfernung der Punkte xyz und $\xi\eta\zeta$, ferner durch α, β, γ die Winkel, welche r mit den senkrecht aufeinander stehenden Koordinatenachsen der x, y, z bildet; für die Koordinaten x, y, z haben wir nun einerseits, weil der Punkt xyz auf der erwähnten Fläche liegt,

$$1)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2\,Dyz + 2\,Ezx + 2\,Fxy \\ \quad + 2\,Gx + 2\,Hy + 2\,Iz + K = 0, \end{cases}$$

andererseits, weil der Punkt xyz zu der Geraden r gehört,

$$2)\quad x = r\cos\alpha + \xi,\quad y = r\cos\beta + \eta,\quad z = r\cos\gamma + \zeta.$$

Durch Substitution dieser Werte in die Gleichung 1) erhält letztere die Form

$$3)\qquad sr^2 + 2\,mr + n = 0,$$

wobei s, m, n zur Abkürzung dienen, nämlich

$$s = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$
$$+ 2\,D\cos\beta\cos\gamma + 2\,E\cos\gamma\cos\alpha + 2\,F\cos\alpha\cos\beta$$

oder auch bei etwas anderer Anordnung:

$$4)\quad \begin{cases} s = (A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\cos\alpha \\ \quad + (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)\cos\beta \\ \quad + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)\cos\gamma, \end{cases}$$

$$5)\quad \begin{cases} m = (A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\,\xi \\ \quad + (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)\,\eta \\ \quad + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)\,\zeta \\ \quad + G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma, \end{cases}$$

$$6)\quad \begin{cases} n = (A\xi + F\eta + E\zeta)\,\xi \\ \quad + (F\xi + B\eta + D\zeta)\,\eta \\ \quad + (E\xi + D\eta + C\zeta)\,\zeta \\ \quad + 2\,G\xi + 2\,H\eta + 2\,I\zeta + K. \end{cases}$$

Betrachtet man ξ, η, ζ und α, β, γ als gegebene Grössen, d. h. geometrisch, denkt man sich durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ eine Gerade in bestimmter Richtung gezogen, so sind die Werte von s, m und n

bekannt, unbekannt dagegen r, x, y, z, d. h. diejenigen Grössen, welche den Durchschnitt jener Geraden mit der Fläche bestimmen; in diesem Falle führt die Gleichung 3) zur Kenntnis von r und nachher geben die Gleichungen 2) die Koordinaten des Durchschnittes. Die Beachtung des Umstandes, dass die Gleichung 3) eine quadratische ist, mithin höchstens zwei reelle Wurzeln besitzt, liefert nun augenblicklich den Fundamentalsatz: **eine gerade Linie kann mit einer Fläche zweiten Grades nicht mehr als zwei Punkte gemein haben.**

Die erwähnten Werte von r sind

$$r = \frac{-m + \sqrt{m^2 - ns}}{s} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - ns}}{s};$$

sie fallen reell und verschieden aus, wenn $m^2 - ns$ positiv ist, die Gerade schneidet dann die Fläche in zwei Punkten, deren Verbindungslinie eine **Sehne** der Fläche bildet; für $m^2 - ns = 0$ folgt $r_1 = r$, die Sehne wird dann zu Null und die Gerade zur **Tangente** an der Fläche; ist endlich $m^2 - ns$ negativ, so liegt die Gerade ausserhalb der Fläche, ohne einen Punkt mit der letzteren gemein zu haben.

Ausser den genannten Hauptfällen bedarf noch ein spezieller Fall näherer Untersuchung. Verbindet man zwei beliebige Punkte xyz und $x_1y_1z_1$ der Fläche durch eine Gerade und wählt auf letzterer den Punkt $\xi\eta\zeta$ willkürlich, so lassen sich daraus α, β, γ mittels der Formeln

$$\cos\alpha = \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y - y_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z - z_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}$$

ableiten und dann erhalten s, m, n von selbst solche Werte, dass r und r_1 reell ausfallen; dies vorausgesetzt, kann man auch beurteilen, welchen Wert m annehmen wird, wenn man den Punkt $\xi\eta\zeta$ auf die Mitte der Sehne legt. In diesem Falle sind nämlich r und r_1 gleich gross aber von entgegengesetzten Vorzeichen, und es muss folglich die für r angegebene Gleichung eine rein quadratische, d. h. $m = 0$ sein. Führen wir zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$7)\quad \begin{cases} a = A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma, \\ b = F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma, \\ c = E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma, \\ d = G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma, \end{cases}$$

so ist, vermöge des Wertes von m,

$$8)\quad a\xi + b\eta + c\zeta + d = 0$$

die Bedingung dafür, dass der Punkt $\xi\eta\zeta$ auf der Mitte der in der Richtung $\alpha\beta\gamma$ gezogenen Sehne liegt.

Lassen wir die einmal bestimmten Werte von α, β, γ ungeändert, während ξ, η, ζ sich ändern, so erhalten wir eine Schar paralleler Sehnen und deren Mittelpunkte; für die Koordinaten der letzteren gilt fortwährend die Gleichung 3), sie repräsentiert also den geometrischen Ort jener Punkte. Letzterer ist aber, wie man unmittelbar bemerkt, eine Ebene, und man kann daher den wichtigen Satz aussprechen: die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen einer Fläche zweiten Grades liegen in einer Ebene. Jede derartige Ebene mag eine Diametralebene der Fläche heissen.

Die Gleichung 8) kann die Form erhalten:

$$9)\quad \begin{cases} T \equiv (A\xi + F\eta + E\zeta + G)\cos\alpha \\ \quad + (F\xi + B\eta + D\zeta + H)\cos\beta \\ \quad + (E\xi + D\eta + C\zeta + I)\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen

$$10)\quad \begin{cases} T_1 \equiv A\xi + F\eta + E\zeta + G = 0, \\ T_2 \equiv F\xi + B\eta + D\zeta + H = 0, \\ T_3 \equiv E\xi + D\eta + C\zeta + I\ = 0 \end{cases}$$

stellen Diametralebenen dar, die zu den Richtungen der Koordinatenachsen gehören; denn setzt man in 9) z. B. $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, so geht 9) in die Gleichung $T_1 = 0$ über. Im allgemeinen haben die Ebenen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ einen und nur einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt ist auch auf $T = 0$ gelegen. Daher gilt der Satz: Alle Diametralebenen einer Fläche zweiter Ordnung haben im allgemeinen einen Punkt gemein. Jede Sehne der Fläche, die diesen Punkt enthält, ist einer bestimmten Diametralebene zugeordnet; da diese durch denselben Punkt geht, so folgt: Der gemeinsame Punkt aller Diametralebenen enthält die Mitten aller durch ihn gehenden Sehnen der

Fläche. Aus diesem Grunde wird dieser Punkt als der Mittelpunkt der Fläche bezeichnet.

Haben die Ebenen $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ eine gemeinsame Gerade, so kann jeder Punkt derselben als Mittelpunkt der Fläche gelten. Haben die Ebenen keinen im Endlichen liegenden Punkt gemein, so wird die Fläche als Fläche ohne Centrum bezeichnet.

§ 31.

Fortsetzung.

Aus den Richtungswinkeln α, β, γ der parallelen Sehnen ergeben sich unmittelbar die Stellungswinkel der zugehörigen Diametralebene, wenn man die Formeln 13) in § 10 auf die Gleichung 8) anwendet, wobei jene Stellungswinkel kurz mit α', β', γ' bezeichnet werden mögen; man erhält:

$$1)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \end{cases}$$

Ferner lässt sich der Neigungswinkel ω der parallelen Sehnen gegen ihre Diametralebene bestimmen; er ist nämlich das Komplement des Winkels, welchen die parallelen Sehnen mit einer auf der Diametralebene errichteten Senkrechten einschliessen; zufolge dieser Bemerkung hat man

$$\cos(90^0 - \omega) = \sin\omega$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'$$

d. i.

$$\sin\omega = \frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

oder noch einfacher, wenn man sich an die Gleichungen 7) und 4) erinnert:

$$2)\quad \sin\omega = \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Von besonderem Interesse ist hier die Frage, ob die Richtung der parallelen Sehnen so gewählt werden kann, dass die zu-

gehörige Diametralebene senkrecht auf den Sehnen steht (man begreift im voraus, dass eine solche Diametralebene sich besonders gut zu einer neuen Koordinatenebene eignen müsste), was unter den Bedingungen

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = s,$$
$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta, \quad \gamma' = \gamma$$

der Fall sein würde. Durch Substitution dieser Werte verwandeln sich die Gleichungen 9) in die folgenden:

$$3) \qquad \cos\alpha = \frac{a}{s}, \quad \cos\beta = \frac{b}{s}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{s},$$

oder wegen $s = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma$:

$$4) \qquad \begin{cases} (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\alpha = a, \\ (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\beta = b, \\ (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\cos\gamma = c. \end{cases}$$

Denkt man sich die Werte von a, b, c eingesetzt, so enthalten die vorstehenden drei Gleichungen die drei Unbekannten α, β, γ, welche ausserdem noch an die vierte Bedingung

$$5) \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

gebunden sind. Gleichwohl ist das Problem der Bestimmung von α, β, γ deswegen noch nicht unmöglich; denn man kann sich auf folgende Weise überzeugen, dass die dritte der Gleichungen 4) eine blosse Konsequenz der beiden vorhergehenden und mithin überflüssig ist. Multipliziert man die erste der Gleichungen 4) mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\cos\beta$ und addiert, so wird

$$(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) = a\cos\alpha + b\cos\beta;$$

hier braucht man nur $\cos^2\alpha + \cos^2\beta$ durch $1 - \cos^2\gamma$ zu ersetzen, um nach gehöriger Hebung sofort die dritte Gleichung in 4) zu erhalten. Wollte man nun die Gleichungen 4) und 5) auf gewöhnliche Weise als drei Gleichungen mit drei Unbekannten ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) behandeln, so würde die Elimination von zweien der letzteren auf eine sehr komplizierte Gleichung von hohem Grade führen; es ist daher besser, die obigen Gleichungen so zu betrachten, als ob sie vier Unbekannte, nämlich α, β, γ, s, enthielten, und vor der Hand s zu entwickeln, woraus sich nachher α, β, γ leicht ableiten lassen.

Setzt man die Werte von a, b, c in die Gleichungen 3) ein und vereinigt nach Wegschaffung der Brüche die gleichartigen Grössen, so gelangt man zu den folgenden drei Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} (A-s)\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \\ F\cos\alpha + (B-s)\cos\beta + D\cos\gamma = 0, \\ E\cos\alpha + D\cos\beta + (C-s)\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Wir untersuchen dieses Gleichungssystem zunächst für den besondern Fall $D = E = F = 0$; alsdann für den Fall, dass zwei dieser Zahlen verschwinden, die dritte nicht; dann unter der Voraussetzung, dass nur eine verschwindet; und zuletzt nehmen wir an, dass keine der Zahlen Null ist.

I. Fall. $D = E = F = 0$.

Die Gleichungen 6) vereinfachen sich unter dieser Voraussetzung zu

$$7)\quad \begin{cases} (A-s)\cos\alpha = 0, \\ (B-s)\cos\beta = 0, \\ (C-s)\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

und aus § 30, Nr. 4) ergiebt sich

$$s = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

Ist $A = B = C$, so ist

$$s = A(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Da nun

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

so folgt

$$s = A.$$

Setzt man dies in 7) ein, so verschwinden die linken Seiten wegen $A = B = C$ für jeden Wert von α, β, γ; hieraus folgt, dass in dem Falle jede beliebige Richtung eine Hauptrichtung ist. Die Gleichung der Fläche geht über in

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\frac{G}{A}x + 2\frac{H}{A}y + 2\frac{I}{A}z + \frac{K}{A} = 0.$$

Setzt man hierfür

$$\left(x+\frac{G}{A}\right)^2 + \left(y+\frac{H}{A}\right)^2 + \left(z+\frac{I}{A}\right)^2 = \frac{G^2+I^2+H^2-AK}{A^2},$$

so erkennt man, dass die Gleichung, sofern die rechte Seite positiv ist, sofern sie also überhaupt eine geometrische Bedeutung hat, eine **Kugel** darstellt, deren Centrum die Koordinaten hat:

$$-\frac{G}{A}, \quad -\frac{H}{A}, \quad -\frac{I}{A},$$

und deren Halbmesser ist

$$r = \frac{1}{A}\sqrt{G^2 + I^2 + H^2 - AK}.$$

Sind zwei der Grössen A, B, C gleich, von der dritten aber verschieden, etwa $A = B \gtrless C$, so wird das System

$$8) \quad \begin{cases} (A - s)\cos\alpha = 0, \\ (A - s)\cos\beta = 0, \\ (C - s)\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

$$s = A(\cos^2\alpha + \cos^2\beta) + C\cos^2\gamma = A + (C - A)\cos^2\gamma$$

erfüllt, wenn $\cos\gamma = 0$; denn dann wird $s = A$, und die ersten beiden Gleichungen von 8) sind identisch. Mithin sind alle Richtungen Hauptrichtungen, für welche $\gamma = 90^0$, also alle zur z-Achse normalen Richtungen. Wenn s nicht gleich A ist, so kann man den beiden ersten Gleichungen nur durch $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ genügen; alsdann muss $\cos\gamma = 1$ sein, und die vierte der obigen Gleichungen giebt in Übereinstimmung mit der dritten $s = C$. Es giebt also in diesem Falle noch eine Hauptrichtung, die zu den unendlich vielen andern normal ist.

Ist also $D = E = F = 0$, und zugleich

entweder $$A = B \gtrless C$$

oder $$A = C \gtrless B$$

oder $$B = C \gtrless A,$$

so fällt eine Hauptrichtung in die Z-, bez. Y-, bez. X-Achse und ausserdem sind alle zu diesen normalen Richtungen Hauptrichtungen.

Sind unter A, B, C nicht zwei gleiche Zahlen, so kann, da nicht alle drei Werte $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zugleich verschwinden können, dem System 7) nur genügt werden, wenn

entweder $\cos\alpha = 1$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$, also $s = A$,

oder $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 1$, $\cos\gamma = 0$, also $s = B$,

oder $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, also $s = C$.

In diesem Falle giebt es also nur drei Hauptrichtungen, und diese fallen mit den Koordinatenachsen zusammen.

II. Fall. Zwei der Zahlen D, E, F verschwinden, die dritte nicht, z. B.

$$D \gtrless 0, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

Das System 6) vereinfacht sich jetzt zu

$$9) \quad \begin{cases} (A - s) \cos\alpha = 0, \\ (B - s) \cos\beta + D \cos\gamma = 0, \\ D \cos\beta + (C - s) \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung erfordert entweder $s = A$ oder $\cos\alpha = 0$.

Unter der ersten Annahme ergeben die beiden andern Gleichungen

$$10) \quad \begin{cases} (B - A) \cos\beta + D \cos\gamma = 0 \\ D \cos\beta + (C - A) \cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen sind für Werte von $\cos\beta$ und $\cos\gamma$, die nicht beide verschwinden, nur erfüllbar, wenn

$$(B - A) : D = D : (C - A),$$

d. i. wenn

$$11) \quad (B - A)(C - A) - D^2 = 0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so sind alle Richtungen Hauptrichtungen, für welche

$$12) \quad (B - A) \cos\beta + D \cos\gamma = 0.$$

Bestimmt man eine Richtung λ, μ, ν aus den Gleichungen

$$\cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = \frac{B - A}{\sqrt{(B - A)^2 + D^2}}, \quad \cos\nu = \frac{D}{\sqrt{(B - A)^2 + D^2}},$$

so hat man statt 11)

$$\cos\lambda \cos\alpha + \cos\mu \cos\beta + \cos\nu \cos\gamma = 0;$$

also alle Normalen zu λ, μ, ν sind Hauptrichtungen.

Wenn 11) nicht erfüllt ist, so wird 10) nur genügt, wenn

$$\cos\beta = \cos\gamma = 0, \quad \cos\alpha = 1. \text{ —}$$

Wenn s nicht gleich A ist, so muss $\cos\alpha = 0$ sein, und 9) geht über in

$$(B - s) \cos\beta + D \cos\gamma = 0,$$
$$D \cos\beta + (C - s) \cos\gamma = 0.$$

Diese Gleichungen sind, wenn nicht $\cos\beta = \cos\gamma = 0$, nur erfüllbar unter der Bedingung

$$13)\qquad (B-s)(C-s)-D^2=0,$$

aus welcher für s die beiden Werte folgen

$$s = \tfrac{1}{2}(B+C) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4D^2+(B-C)^2},$$

also zwei immer reelle, und wegen $D \gtrless 0$ nicht zusammenfallende Wurzeln; werden dieselben mit s_1 und s_2 bezeichnet, so ergeben sich folgende Hauptrichtungen

$$14)\qquad \begin{cases} \cos\alpha_1 = 0, & \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = -D:(B-s_1), \\ \cos\alpha_2 = 0, & \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = -D:(B-s_2). \end{cases}$$

Nun ist nach 13)

$$C - s_1 = \frac{D^2}{B-s_1},$$
$$C - s_2 = \frac{D^2}{B-s_2},$$

woraus durch Subtraktion folgt

$$s_2 - s_1 = D^2\left(\frac{1}{B-s_1} - \frac{1}{B-s_2}\right) = -\frac{D^2(s_2-s_1)}{(B-s_1)(B-s_2)},$$

also, weil $s_2 \gtrless s_1$

$$(B-s_1)(B-s_2)+D^2=0;$$

dies ergiebt mit Rücksicht auf 14)

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

Die Hauptrichtungen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ sind daher normal zueinander; ausserdem sind sie normal zur dritten

$$\cos\alpha = 1,\quad \cos\beta = \cos\gamma = 0.$$

Daher folgt: Wenn eine der drei Bedingungen erfüllt ist:

$$15)\qquad \begin{cases} D \gtrless 0, & E=0, & F=0, & (B-A)(C-A)-D^2=0, \\ D=0, & E \gtrless 0, & F=0, & (A-B)(C-B)-E^2=0, \\ D=0, & E=0, & F \gtrless 0, & (A-C)(B-C)-F^2=0, \end{cases}$$

so giebt es unendlich viele Hauptrichtungen, die auf der noch ausserdem vorhandenen normal sind; ist keine

der Bedingungen erfüllt, so giebt es nur drei aufeinander normale Hauptrichtungen.

III. Fall Eine der Zahlen D, E, F verschwindet, die andern beiden nicht, z. B. $D = 0$, $E \gtrless 0$, $F \gtrless 0$.

Die Gleichungen 6) werden jetzt:

$$16)\qquad \begin{cases} (A - s)\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \\ F\cos\alpha + (B - s)\cos\beta = 0, \\ E\cos\alpha + (C - s)\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Durch die Annahme $s = B$ kann das System nur erfüllt werden, wenn zugleich $C = B$; alsdann genügen

$$17)\qquad \cos\alpha = 0, \quad F\cos\beta + E\cos\gamma = 0,$$

wodurch eine Richtung eindeutig bestimmt ist.

Wenn s ungleich B und C ist, so entnimmt man aus 16):

$$\cos\beta = -\frac{F}{B - s}\cos\alpha, \quad \cos\gamma = -\frac{E}{C - s}\cos\alpha,$$

und erhält durch Substitution in die erste der Gleichungen 16)

$$18)\qquad (A - s)(B - s)(C - s) - F^2(C - s) - E^2(B - s) = 0.$$

Im Falle $B = C$ hat diese Gleichung die Wurzel $s = B$; die beiden andern folgen aus

$$19)\qquad (A - s)(B - s) - F^2 - E^2 = 0$$

zu

$$s = \tfrac{1}{2}(A + B) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4(E^2 + F^2) + (A - B)^2}$$

und sind reell verschieden, da E und F nicht Null sind.

Ist s eine Wurzel der Gleichung 18) oder 19), so bestimmen sich die dazu gehörigen Werte von $\alpha\beta\gamma$ aus der Proportion

$$20)\qquad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -1 : \frac{F}{B - s} : \frac{E}{C - s},$$

welche im Falle $B = C$ übergeht in

$$21)\qquad \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = -1 : \frac{F}{B - s} : \frac{E}{B - s}.$$

Bezeichnet man in diesem letzteren Falle die beiden Wurzeln von 19) mit s_1 und s_2, so erhält man

$$A - s_1 = \frac{E^2 + F^2}{B - s_1},$$

$$A - s_2 = \frac{E^2 + F^2}{B - s_2},$$

und hieraus durch Subtraktion

$$s_2 - s_1 = -\frac{(E^2 + F^2)(s_2 - s_1)}{(B - s_1)(B - s_2)};$$

da nun $s_2 \gtrless s_1$, so folgt:

$$\frac{F^2 + E^2}{(B - s_1)(B - s_2)} + 1 = 0. \tag{22}$$

Sind $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ und $\alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ die zu s_1 und s_2 gehörigen Hauptrichtungen, so hat man

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 &= -1 : \frac{F}{B - s_1} : \frac{E}{B - s_1}, \\ \cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 &= -1 : \frac{F}{B - s_2} : \frac{E}{B - s_2}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

und daher in Rücksicht auf 22) und 23):

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

Ist ferner $\alpha\beta\gamma$ die der Bedingung 17) entsprechende dritte Hauptrichtung, so ergiebt sich aus 17):

$$\cos\beta : \cos\gamma = E : -F,$$

und daher folgt mit Rücksicht auf 23):

$$\cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1 = 0,$$
$$\cos\alpha \cos\alpha_2 + \cos\beta \cos\beta_2 + \cos\gamma \cos\gamma_2 = 0.$$

Die drei Hauptrichtungen sind daher normal zueinander.

Derselbe Schluss ergiebt sich auch für den Fall, dass B ungleich C ist. Es gilt alsdann zunächst zu entscheiden, wieviele reelle Wurzeln die Gleichung für s hat:

$$(A - s)(B - s)(C - s) - F^2(B - s) - E^2(C - s) = 0.$$

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende kubische Funktion von s mit t und untersuchen, welche Werte t annimmt, wenn s die reelle Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Schreibt man

$$t = (A - s)(B - s)(C - s)\left\{1 - \frac{F^2}{(A - s)(C - s)} - \frac{E^2}{(A - s)(B - s)}\right\},$$

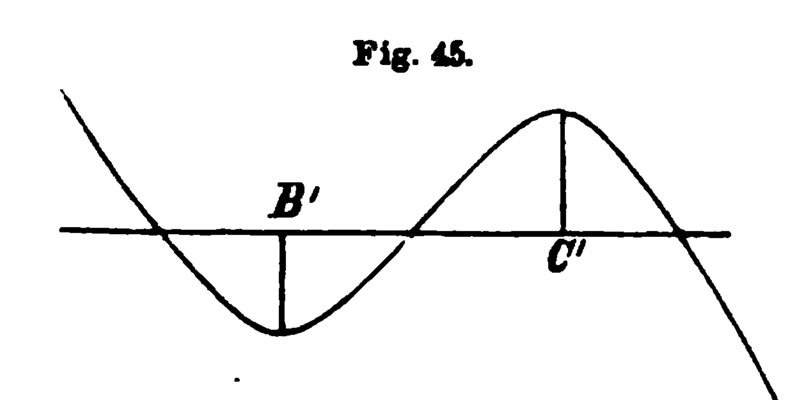
und setzt hierin $s = -\infty$, so nähert sich der Klammerinhalt dem Grenzwerte 1, während der andere Faktor positiv unendlich wird; daher wird $t = +\infty$, wenn $s = -\infty$ ist. Ebenso findet man $t = -\infty$, wenn $s = +\infty$. Substituiert man für s ausserdem B und C, so erhält man:

$s =$	$-\infty$	B	C	$+\infty$
$t =$	$+\infty$	$-E^2(C-B)$	$-F^2(B-C)$	$-\infty$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, dass $B < C$ ist; alsdann ist $-E^2(C-B)$ negativ und $-F^2(B-C)$ positiv.

Trägt man die Werte von s als Abscissen, die von t als Ordinaten in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme auf, so erhält man nach der obigen Zusammenstellung eine Kurve, deren Gestalt aus Fig. 45 ersichtlich ist, wobei B' und C' die Punkte angeben, in denen die Abscissen B und C endigen. Da die Kurve dreimal von einer Seite der Abscissenachse auf die andere übertritt, nämlich zwischen den Abscissen $-\infty$ und B, zwischen B und C und zwischen C und $+\infty$, so folgt, dass t für drei reelle Werte von s verschwindet; diese drei Wurzeln s_1, s_2, s_3 der Gleichung $t=0$ sind in der Weise angeordnet:

Fig. 45.



$$-\infty < s_1 < B < s_2 < C < s_3 < +\infty.$$

Aus 20) folgt für die Hauptrichtungen, die diesen Wurzeln zugehören:

$$24)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = -1 : \dfrac{F}{B-s_1} : \dfrac{E}{C-s_1}, \\ \cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = -1 : \dfrac{F}{B-s_2} : \dfrac{E}{C-s_2}, \\ \cos\alpha_3 : \cos\beta_3 : \cos\gamma_3 = -1 : \dfrac{F}{B-s_3} : \dfrac{E}{C-s_3}. \end{cases}$$

Aus 18) folgt:

$$25)\quad \begin{cases} A - s_1 = \dfrac{F^2}{B-s_1} + \dfrac{E^2}{C-s_1}, \\ A - s_2 = \dfrac{F^2}{B-s_2} + \dfrac{E^2}{C-s_2}, \\ A - s_3 = \dfrac{F^2}{B-s_3} + \dfrac{E^2}{C-s_3}. \end{cases}$$

Hieraus erhält man durch Subtraktion zunächst

$$s_2 - s_1 = -\left\{\frac{F^2}{(B-s_1)(B-s_2)} + \frac{E^2}{(C-s_1)(C-s_2)}\right\}(s_2 - s_1).$$

Da nun $s_2 \gtrless s_1$, so folgt:

$$26)\begin{cases} 1+\dfrac{F^2}{(B-s_1)(B-s_2)}+\dfrac{E^2}{(C-s_1)(C-s_2)}=0, \\ \text{und ebenso:} \\ 1+\dfrac{F^2}{(B-s_2)(B-s_3)}+\dfrac{E^2}{(C-s_2)(C-s_3)}=0, \\ 1+\dfrac{F^2}{(B-s_3)(B-s_1)}+\dfrac{E^2}{(C-s_3)(C-s_1)}=0. \end{cases}$$

Aus 26) und 24) ergeben sich:

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 &= 0, \\ \cos\alpha_2 \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cos\gamma_3 &= 0, \\ \cos\alpha_3 \cos\alpha_1 + \cos\beta_3 \cos\beta_1 + \cos\gamma_3 \cos\gamma_1 &= 0. \end{aligned}$$

Also findet man wieder: Die drei Hauptrichtungen sind normal zu einander.

Wenn daher eine der Zahlen D, E, F verschwindet, die beiden anderen aber von Null verschieden sind, so giebt es stets drei und nicht mehr als drei Hauptrichtungen, und diese sind normal zu einander.

IV. Fall. Keine der drei Zahlen D, E, F ist gleich Null. In dem Systeme 6):

$$\begin{aligned} (A-s)\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma &= 0, \\ F\cos\alpha + (B-s)\cos\beta + D\cos\gamma &= 0, \\ E\cos\alpha + D\cos\beta + (C-s)\cos\gamma &= 0 \end{aligned}$$

dividieren wir die erste Gleichung durch EF und addieren beiderseits

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\cos\alpha}{EF}\left(s-A+\frac{EF}{D}\right);$$

aus der zweiten Gleichung ziehen wir durch Division mit FD und Addition von $\dfrac{\cos\beta}{E}$:

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\cos\beta}{FD}\left(s-B+\frac{FD}{E}\right),$$

und durch ein ähnliches Verfahren aus der dritten Gleichung

$$\frac{\cos\alpha}{D}+\frac{\cos\beta}{E}+\frac{\cos\gamma}{F}=\frac{\cos\gamma}{DE}\left(s-C+\frac{DE}{F}\right).$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$27)\quad \begin{cases} L=A-\dfrac{EF}{D},\quad M=B-\dfrac{FD}{E},\quad N=C-\dfrac{DE}{F},\\ Q=\dfrac{\cos\alpha}{D}+\dfrac{\cos\beta}{E}+\dfrac{\cos\gamma}{F},\end{cases}$$

wo L, M, N bekannte Grössen sind, Q dagegen unbekannt ist; wir haben jetzt nach dem Vorigen

$$28)\quad Q=\frac{\cos\alpha}{EF}(s-L),\quad Q=\frac{\cos\beta}{FD}(s-M),\quad Q=\frac{\cos\gamma}{DE}(s-N)$$

oder

$$29)\quad \cos\alpha=\frac{EFQ}{s-L},\quad \cos\beta=\frac{FDQ}{s-M},\quad \cos\gamma=\frac{DEQ}{s-N}.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich zwei andere bilden, welche unmittelbar die Auflösung unseres Problems liefern; man erhält nämlich einerseits, wenn man die obigen Werte von $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ in die Formel 5) einsetzt und die entstehende Gleichung auf Q reduziert:

$$30)\quad Q=\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{EF}{s-L}\right)^2+\left(\dfrac{FD}{s-M}\right)^2+\left(\dfrac{DE}{s-N}\right)^2}};$$

dividiert man ferner die erste der Gleichungen 29) durch D, die zweite durch E, die dritte durch F und addiert die Quotienten, so ergiebt sich auf der linken Seite wieder Q und es ist demnach

$$Q=\frac{EF}{D}\,\frac{Q}{s-L}+\frac{FD}{E}\,\frac{Q}{s-M}+\frac{DE}{F}\,\frac{Q}{s-N}$$

oder

$$31)\quad Q\left(1-\frac{EF}{D}\,\frac{1}{s-L}-\frac{FD}{E}\,\frac{1}{s-M}-\frac{DE}{F}\,\frac{1}{s-N}\right)=0.$$

Diese Gleichung wird erfüllt sowohl durch $Q=0$, als durch

$$32)\quad 1-\frac{EF}{D}\,\frac{1}{s-L}-\frac{FD}{E}\,\frac{1}{s-M}-\frac{DE}{F}\,\frac{1}{s-N}=0;$$

im ersten Falle müsste nach Nr. 28) entweder $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=0$ sein, was der Gleichung 5) widerspricht, oder es müsste gleichzeitig $s=L$, $s=M$, $s=N$ werden, was nur unter der be-

sonderen Voraussetzung, dass L, M, N gleiche Werte haben, geschehen könnte. Versparen wir einstweilen die Untersuchung dieses Spezialfalles, so ist im allgemeinen Q von Null verschieden, mithin bleibt noch die Bedingung 32) zu erfüllen. Diese enthält die einzige Unbekannte s; hat man deren Wert durch Auflösung der Gleichung ermittelt, so findet sich Q aus Formel 30), nachher dienen die Gleichungen 29) zur Bestimmung der Winkel α, β, γ.

Es gilt nun, zu entscheiden, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung 32) hat.

§ 32.

Fortsetzung.

Durch Multiplikation mit dem Produkte der Differenzen $s-L$, $s-M$ und $s-N$ erhält die Gleichung 32) die Form:

$$(s-L)(s-M)(s-N) - \frac{EF}{D}(s-M)(s-N)$$
$$-\frac{FD}{E}(s-N)(s-L) - \frac{DE}{F}(s-L)(s-M) = 0^*,$$

und nach Division mit DEF:

$$33) \qquad \frac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF} - \frac{(s-L)(s-M)}{F^2} - \frac{(s-N)(s-L)}{E^2} - \frac{(s-M)(s-N)}{D^2} = 0.$$

Die links vom Gleichheitszeichen stehende kubische Funktion von s bezeichnen wir wieder mit t, und untersuchen die Werte, welche t annimmt, wenn s die reelle Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft. Dabei werden wir wieder s als Abscisse, t als Ordinate auftragen, und die Kurve betrachten, welche durch die Gleichung

---

* Führt man die angedeuteten Multiplikationen aus und setzt nachher die für L, M, N angegebenen Werte ein, so kann man die obige Gleichung auch in die folgende verwandeln:

$$(s-A)(s-B)(s-C)$$
$$-D^2(s-A) - E^2(s-B) - F^2(s-C) - 2DEF = 0.$$

Diese einfache Form der ursprünglichen Gleichung würde in dem Falle bequem sein, wo es sich bei numerisch gegebenen A, B, ... F um den Zahlenwert von s handelte, dagegen gestattet sie keine so leichte Entscheidung der Frage nach der Anzahl der reellen Wurzeln.

$$34)\qquad t = \frac{(s-L)(s-M)(s-N)}{DEF} - \ldots$$

dargestellt wird.

Das Produkt DEF kann ebensowohl positiv als negativ sein, im ersten Falle mag dessen reziproker Wert mit $+\varkappa$, im zweiten Falle mit $-\varkappa$ bezeichnet werden, so dass $\varkappa$ in beiden Fällen den absoluten Wert von $\frac{1}{DEF}$ ausdrückt. Die Grössen L, M, N sind im allgemeinen von einander verschieden, es giebt also unter ihnen eine kleinste, eine mittlere und eine grösste, und um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir annehmen, dass $L < M < N$, mithin jede der Differenzen $N-M$, $L-N$, $M-N$ negativ sei; diese Voraussetzung beeinträchtigt übrigens die Allgemeinheit der Untersuchung nicht, denn man wird bald bemerken, dass die nachherigen Erörterungen ganz gleichförmig auf jede andere Rangordnung der Grössen L, M, N passen. Der Gleichung 34) geben wir zunächst die Form

$$35)\qquad t = (s-L)(s-M)(s-N)\left\{\pm\varkappa - \frac{1}{F^2(s-N)} - \frac{1}{E^2(s-M)} - \frac{1}{D^2(s-L)}\right\}$$

und denken uns s als unendlich wachsende negative Zahl; die Quotienten

$$\frac{1}{s-L},\quad \frac{1}{s-M},\quad \frac{1}{s-N}$$

haben in diesem Falle die Null zur Grenze, und das Produkt

$$(s-L)(s-M)(s-N)$$

erhält einen unendlich wachsenden, aber negativen Wert, weil bei hinreichend grossem negativen s jeder einzelne Faktor desselben negativ wird. Wir drücken dies kurz durch die Formel aus:

$$\text{für } s = -\infty \quad \text{wird } t = (-\infty)(\pm\varkappa) = \mp\infty.$$

Nehmen wir zweitens $s = L$, so giebt die Gleichung 34) unmittelbar

$$t = -\frac{(L-M)(L-N)}{D^2},$$

d. h., wenn man sich an das über die Differenzen $L-M$ und $L-N$ Gesagte erinnert,

$$\text{für } s = L \quad \text{wird } t \text{ negativ.}$$

Daran schliessen sich ferner die Bemerkungen:

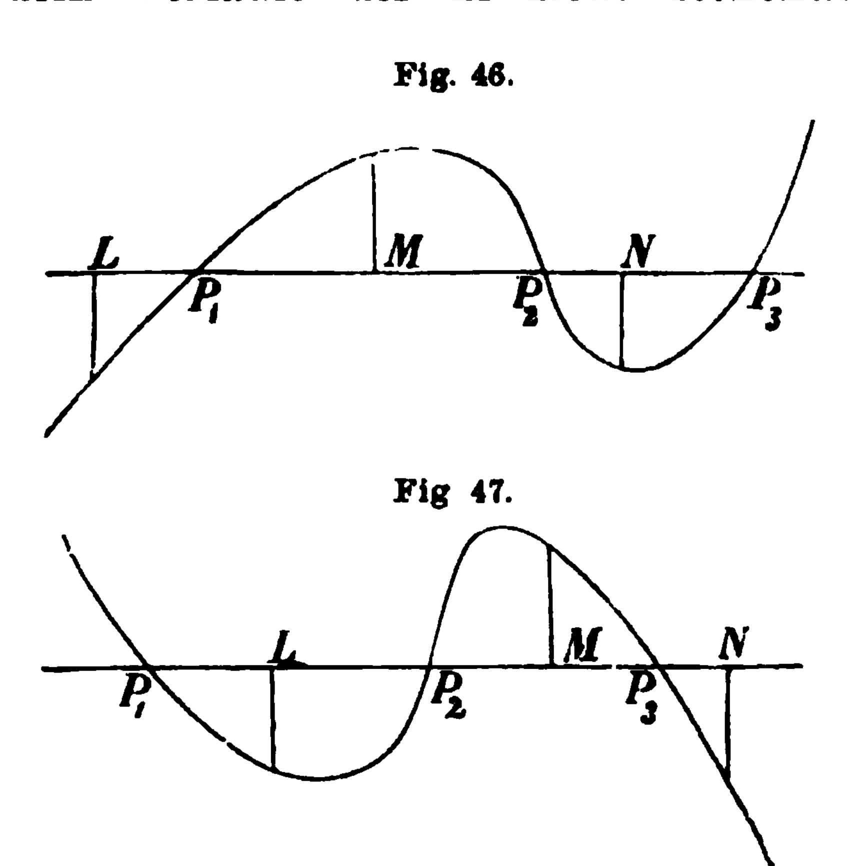
$$\text{für } s = M \text{ wird } t = -\frac{(M-N)(M-L)}{E^2} \text{ d. h. positiv,}$$

$$\text{„ } s = N \text{ „ } t = -\frac{(N-L)(N-M)}{F^2} \text{ d. h negativ.}$$

Wir denken uns zuletzt s als unendlich wachsende positive Zahl und benutzen dabei wieder die Form 35); auch in diesem Falle haben die dort erwähnten Quotienten die Null zur Grenze, dagegen wächst das Produkt $(s-L)(s-M)(s-N)$ ins positiv Unendliche, d. h.

$$\text{für } s = +\infty \text{ wird } t = (+\infty)(\pm \varkappa) = \pm \infty.$$

Nach diesen Ergebnissen kann man sich leicht ein Bild von dem Verlaufe der in Rede stehenden Kurve entwerfen; für ein positives DEF hat sie die in Fig. 46 angedeutete Gestalt, für ein negatives DEF entspricht sie der Fig. 47; in beiden Darstellungen sind L, M, N die Endpunkte der Abscissen $s = L$, $s = M$, $s = N$, wobei man sich den Anfangspunkt der Koordinaten an beliebiger Stelle auf der Achse der s denken kann. Aus dem Anblicke dieser Figuren geht hervor, dass die Gleichung $A = 0$ stets drei reelle Wurzeln s_1, s_2, s_3 hat, und zwar ist, wenn $\varkappa > 0$:



$$L < s_1 < M < s_2 < N < s_3 < +\infty$$

und wenn $\varkappa < 0$

$$-\infty < s_1 < L < s_2 < M < s_3 < N.$$

Den drei verschiedenen Werten $s = s_1$, $s = s_2$, $s = s_3$ entsprechen nach Formel 30) drei verschiedene Werte von Q, die wir der Reihe nach mit Q_1, Q_2, Q_3 bezeichnen wollen; diese liefern nach Nr. 29) drei verschiedene Richtungen der parallelen Sehnen und zwar mögen die betreffenden Richtungswinkel durch α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 unterschieden werden.

Um über die gegenseitige Lage der Hauptebenen Aufschluss zu erhalten, entwickeln wir einige Relationen zwischen den Wurzeln der Gleichung 33). Da s_1, s_2, s_3 die genannte Gleichung erfüllen, so genügen sie auch der nicht wesentlich davon verschiedenen Gleichung 32); es ist also gleichzeitig

$$\frac{EF}{D}\frac{1}{s_1-L}+\frac{FD}{E}\frac{1}{s_1-M}+\frac{DE}{F}\frac{1}{s_1-N}=1,$$
$$\frac{EF}{D}\frac{1}{s_2-L}+\frac{FD}{E}\frac{1}{s_2-M}+\frac{DE}{F}\frac{1}{s_2-N}=1,$$
$$\frac{EF}{D}\frac{1}{s_3-L}+\frac{FD}{E}\frac{1}{s_3-M}+\frac{DE}{F}\frac{1}{s_3-N}=1.$$

Durch Subtraktion der zweiten von der ersten Gleichung und nachherige Multiplikation mit DEF folgt

$$(s_2-s_1)\left\{\frac{E^2F^2}{(s_1-L)(s_2-L)}+\frac{F^2D^2}{(s_1-M)(s_2-M)}+\frac{D^2E^2}{(s_1-N)(s_2-N)}\right\}=0,$$

da s_2-s_1 von Null verschieden ist, so muss der Inhalt der Parenthese $=0$ sein; auf analoge Weise kann man die erste der vorigen Gleichungen mit der dritten, sowie die zweite mit der dritten verbinden, was zusammen die folgenden Beziehungen giebt:

$$36)\begin{cases}\dfrac{E^2F^2}{(s_1-L)(s_2-L)}+\dfrac{F^2D^2}{(s_1-M)(s_2-M)}+\dfrac{D^2E^2}{(s_1-N)(s_2-N)}=0,\\ \dfrac{E^2F^2}{(s_1-L)(s_3-L)}+\dfrac{F^2D^2}{(s_1-M)(s_3-M)}+\dfrac{D^2E^2}{(s_1-N)(s_3-N)}=0,\\ \dfrac{E^2F^2}{(s_2-L)(s_3-L)}+\dfrac{F^2D^2}{(s_2-M)(s_3-M)}+\dfrac{D^2E^2}{(s_2-N)(s_3-N)}=0.\end{cases}$$

Die Winkel, welche die Hauptrichtungen mit den Achsen einschliessen, bestimmen sich nach Nr. 29), nämlich:

$$\cos\alpha_1=\frac{EFQ_1}{s_1-L},\quad \cos\beta_1=\frac{FDQ_1}{s_1-M},\quad \cos\gamma_1=\frac{DEQ_1}{s_1-N},$$
$$\cos\alpha_2=\frac{EFQ_2}{s_2-L},\quad \cos\beta_2=\frac{FDQ_2}{s_2-M},\quad \cos\gamma_2=\frac{DEQ_2}{s_2-N},$$
$$\cos\alpha_3=\frac{EFQ_3}{s_3-L};\quad \cos\beta_3=\frac{FDQ_3}{s_3-M};\quad \cos\gamma_3=\frac{DEQ_3}{s_3-N}.$$

Aus diesen Werten ergiebt sich in Verbindung mit 36):

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0,$$
$$\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\cos\beta_2\cos\beta_3+\cos\gamma_2\cos\gamma_3=0,$$
$$\cos\alpha_3\cos\alpha_1+\cos\beta_3\cos\beta_1+\cos\gamma_3\cos\gamma_1=0.$$

Hieraus folgt: Die drei Hauptrichtungen einer Fläche zweiter Ordnung sind zu einander senkrecht.

Wir betrachten nun den besonderen Fall $L = M = N$. Setzen wir zunächst nur $L = M$ voraus, so geht die Gleichung 33) über in

$$(s-L)\left\{\frac{(s-L)(s-N)}{DEF} - \frac{s-L}{F^2} - \frac{s-N}{E^2} - \frac{s-N}{D^2}\right\} = 0.$$

Diese hat die Wurzel $s_1 = L$; die beiden andern ergeben sich aus

$$37)\qquad \frac{(s-L)(s-N)}{DEF} - \frac{s-L}{F^2} - \frac{s-N}{E^2} - \frac{s-N}{D^2} = 0.$$

Die Substitutionen

$$s = -\infty,\quad L,\quad N,\quad +\infty$$

erteilen der linken Seite die Werte

$$\pm\infty,\qquad -(L-N)\left(\frac{1}{E^2}+\frac{1}{D^2}\right),\qquad -\frac{N-L}{F^2},\qquad \mp\infty$$

und zwar gelten die oberen oder unteren Zeichen, jenachdem $\varkappa \gtrless 0$. Sind nun L und N verschieden, so haben $L - N$ und $N - L$ entgegengesetzte Zeichen, daher liegt sicher eine reelle Wurzel der quadratischen Gleichung 37) zwischen L und N; die andere ist kleiner als L oder grösser als N, jenachdem $\varkappa$ positiv oder negativ ist.

Eine Doppelwurzel der Gleichung 33) kann daher nur dann vorhanden sein, wenn ausser $L = M$ noch $M = N$ erfüllt ist. Alsdann kann die Gleichung 33) geschrieben werden:

$$38)\qquad (s-L)^2\left\{\frac{s-L}{DEF} - \frac{1}{F^2} - \frac{1}{F^2} - \frac{1}{D^2}\right\} = 0.$$

Da nach der Voraussetzung D, E und F nicht verschwinden, so kann der zweite Klammerinhalt für $s = L$ nicht auch den Wert Null annehmen, also hat die Gleichung nur zwei gleiche Wurzeln $s = L$, die dritte Wurzel ist

$$39)\qquad s = L + DEF\left(\frac{1}{D^2} + \frac{1}{E^2} + \frac{1}{F^2}\right).$$

Für diese Doppelwurzel $s = L$ geht das System 6) über in

$$40)\qquad \begin{cases} (A-L)\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma = 0, \\ F\cos\alpha + (B-L)\cos\beta + D\cos\gamma = 0, \\ E\cos\alpha + D\cos\beta + (C-L)\cos\gamma = 0. \end{cases}$$

Berücksichtigt man, dass

$$41)\qquad L = A - \frac{EF}{D} = B - \frac{FD}{E} = C - \frac{DE}{F},$$

so erkennt man, dass

$$A - L = \frac{EF}{D},\quad B - L = \frac{FD}{E},\quad C - L = \frac{DE}{F}.$$

Dividiert man die Gleichungen 40) nach Einsetzung dieser Werte der Reihe nach durch EF, FD und DE, so gehen sie alle drei in ein und dieselbe Gleichung über, nämlich es wird aus jeder, wenn wir die zur Doppelwurzel gehörige Hauptrichtung mit $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ bezeichnen:

$$42)\qquad \frac{\cos\alpha_1}{D} + \frac{\cos\beta_1}{E} + \frac{\cos\gamma_1}{F} = 0.$$

Die andere von L verschiedene Wurzel, die wir mit s_2 bezeichnen wollen, ergiebt, wie wir aus 39) und 41) ersehen:

$$A - s_2 = -DEF\left(\frac{1}{E^2} + \frac{1}{F^2}\right),$$

$$B - s_2 = -DEF\left(\frac{1}{D^2} + \frac{1}{F^2}\right),$$

$$C - s_2 = -DEF\left(\frac{1}{D^2} + \frac{1}{E^2}\right).$$

Das System 6) wird daher durch eine Richtung $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_2$, $\gamma = \gamma_2$ erfüllt, für welche

$$43)\qquad \cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2 = \frac{1}{D} : \frac{1}{E} : \frac{1}{F}.$$

Aus 42) und 43) folgt noch

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2 = 0.$$

Daher ergiebt sich: Wenn D, E, F nicht Null sind, so hat die kubische Gleichung für s nur dann eine Doppelwurzel, wenn $L = M = N$; nur in diesem Falle giebt es unzählige Hauptrichtungen, die zu einer Richtung normal sind, die selbst Hauptrichtung ist.

Bevor wir die Ergebnisse dieser längeren Untersuchung zusammenfassen, wollen wir zeigen, dass wenigstens zwei Hauptebenen in endlicher Entfernung vom Anfangspunkte liegen. Zunächst bemerken wir, dass in der Gleichung einer Hauptebene

$$44)\left\{\begin{array}{l}(A\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma)\,\xi + (F\cos\alpha + B\cos\beta + D\cos\gamma)\,\eta \\ + (E\cos\alpha + D\cos\beta + C\cos\gamma)\,\zeta + (G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma) = 0\end{array}\right.$$

die Koeffizienten der Koordinaten die Werte

$$s \cos\alpha, \quad s \cos\beta, \quad s \cos\gamma$$

haben; daher kann die Gleichung 44) in der Form geschrieben werden

$$45) \quad \cos\alpha \,.\, \xi + \cos\beta \,.\, \eta + \cos\gamma \,.\, \zeta + \frac{G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma}{s} = 0.$$

Das letzte Glied ist dem Abstande der Ebene vom Anfangspunkte entgegengesetzt gleich; die Ebene kann daher nur dann unendlich fern werden, wenn s verschwindet, und nicht zugleich der Zähler. Im Falle I. kann s nur verschwinden, wenn eine der Grössen A, B, C verschwindet. Sind diese Zahlen ungleich, so giebt es zwei nicht verschwindende Werte für s, also zwei endlich ferne Hauptebenen; sind zwei Zahlen gleich, z. B. $A = B$, und von Null verschieden, und $C = 0$, so gehören zu $s = A$ unendlich viele Hauptebenen, die alle endlich fern liegen. Sind dagegen zwei der Zahlen gleich Null, die dritte, z. B. C, nicht Null, so ist die zu $s = C$ gehörige Hauptebene endlich fern. Zu $s = A$ gehören alsdann unendlich viele Hauptrichtungen, welche normal zur z-Achse sind; wählt man darunter diejenige aus, für welche auch

$$G\cos\alpha + H\cos\beta + I\cos\gamma = 0,$$

so hat die zu dieser Richtung normale Hauptebene einen unbestimmten Abstand vom Anfangspunkte, d. i. jede zu der genannten Richtung normale Ebene ist Hauptebene der Fläche; also giebt es auch in diesem Falle zu einander normale nicht unendlich ferne Hauptebenen.

Diese Schlussweise wiederholt sich in den übrigen Fällen II. III und IV.

Im II. Fall kann, wenn z. B. D nicht verschwindet, nur $s = A$ verschwinden. Ist dies der Fall, und die Bedingung

$$(B - A)(C - A) - D^2 = 0,$$

die sich jetzt wegen $A = 0$ zu

$$46) \qquad BC - D^2 = 0$$

vereinfacht, nicht erfüllt, so sind die beiden andern Wurzeln für s nicht Null. Ist die Bedingung 46) erfüllt, so ergiebt sich für s aus der Lösung der Gleichung 13) der Wert

$$s = B + C,$$

und dies kann wegen $BC = D^2$ und $D \gtrless 0$ nicht Null sein; die zugehörige Hauptebene ist daher nicht unendlich fern.

Die übrigen Hauptrichtungen erfüllen die aus 9) durch Einsetzung von $s = 0$ hervorgehende Gleichung

$$B \cos\beta + D \cos\gamma = 0.$$

Wählt man darunter die eindeutig bestimmte aus, für welche

$$G \cos\alpha + H \cos\beta + I \cos\gamma = 0,$$

so gehören dieser Richtung alle zu derselben normalen Ebenen als Hauptebenen zu.

Im III. Falle sind die drei Werte für s stets ungleich, also immer zwei von Null verschieden.

Im IV. Falle kommen zwei gleiche verschwindende Werte von s nur vor, wenn

$$s = L = M = N = 0.$$

Die zugehörigen Hauptrichtungen erfüllen die Gleichungen

$$\frac{\cos\alpha}{D} + \frac{\cos\beta}{E} + \frac{\cos\gamma}{F} = 0.$$

Wählt man wieder diejenige unter diesen unendlich vielen Richtungen, für welche

$$G \cos\alpha + H \cos\beta + I \cos\gamma = 0,$$

so ist jede zu dieser Richtung normale Ebene eine Hauptebene. Wir schliessen daher: Bei jeder Fläche II. Ordnung kann man immer zwei zu einander normale Hauptebenen angeben, die nicht unendlich fern sind.

Wir geben nun eine übersichtliche Zusammenstellung der gewonnenen Ergebnisse.

Eine Fläche zweiter Ordnung hat im allgemeinen, d. i. wenn nicht besondere Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten der Gleichung der Fläche erfüllt sind, ein eindeutig bestimmtes Centrum und drei dasselbe enthaltende zueinander senkrechte Hauptebenen. Ist $A = B = C \gtrless 0$, $D = E = F = 0$, so ist das Centrum ein im Endlichen gelegener Punkt, und jede Diametralebene ist eine Hauptebene (Kugelfall).

Ist eine der sieben Bedingungen erfüllt

$$D = E = F = 0, \quad B = C \gtrless A,$$

$$D = E = F = 0, \quad C = A \gtrless B,$$

$$D = E = F = 0, \quad A = B \gtrless C,$$

$$D \gtrless 0, \quad E = 0, \quad F = 0, \quad (B - A)(C - A) - D^2 = 0;$$

$$D = 0, \quad E \gtrless 0, \quad F = 0, \quad (A - B)(C - B) - E^2 = 0;$$

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F \gtrless 0, \quad (A - C)(B - C) - F^2 = 0;$$

$$\begin{cases} D \gtrless 0, \quad E \gtrless 0, \quad F \gtrless 0, \\ A - \frac{EF}{D} = B - \frac{FD}{E} = C - \frac{DE}{F}; \end{cases}$$

so zerfallen die Hauptrichtungen in zwei Gruppen; eine Gruppe besteht aus einer einzelnen Hauptrichtung, die andere aus allen Richtungen, die zu dieser einzelnen normal sind. Wenn zu der genannten Bedingung in den einzelnen Fällen der Reihe nach folgende treten

$$B = C = 0; \quad C = A = 0; \quad A = B = 0;$$
$$A = 0; \quad B = 0; \quad C = 0;$$
$$A - \frac{EF}{D} = B - \frac{FD}{E} = C - \frac{DE}{F} = 0;$$

so sind die zur zweiten Gruppe gehörigen Hauptebenen unendlich fern, bis auf eine Schar von Parallelebenen, die sämtlich Hauptebenen sind.

§ 33.

Schluss.

Die Thatsache, dass bei jeder Fläche zweiter Ordnung zwei nicht unendlich ferne Hauptebenen vorhanden sind, die aufeinander senkrecht stehen, legt uns den Gedanken nahe, dieselben zu Koordinatenebenen zu machen; den Koordinatenanfang legen wir beliebig auf den geradlinigen Durchschnitt derselben, so dass die dritte Koordinatenebene der dritten Hauptebene parallel liegt. Ist nun in dem neuen rechtwinkligen Koordinatensysteme, dessen Koordinaten x', y', z' heissen mögen, die Ebene $y'z'$ eine Hauptebene,

so muss jeder in dieser Ebene liegende Punkt $y'z'$ der Mittelpunkt einer darauf senkrechten (zur x'-Achse parallelen) Sehne sein, d. h. jedem Koordinatenpaare $y'z'$ müssen zwei gleich grosse und dem Zeichen nach entgegengesetzte x' entsprechen. Hieraus folgt, dass die transformierte Gleichung, welche die Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'y'z' + 2E'z'x' + 2F'x'y' + 2G'x' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0$$

besitzen würde, rein quadratisch in Beziehung auf x' sein muss; sie lautet daher

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2D'y'z' + 2H'y' + 2I'z' + K' = 0.$$

Ist zweitens die Koordinatenebene $x'z'$ eine Hauptebene, so entsprechen jedem willkürlich gewählten Koordinatenpaare $x'z'$ zwei gleiche und entgegengesetzte y', es verschwinden daher auch die Koeffizienten aller mit der ersten Potenz von y' behafteten Glieder, d. h. die Gleichung jeder Fläche zweiten Grades kann auf die Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + 2I'z' + K' = 0 \tag{47}$$

gebracht werden.

Eine weitere Vereinfachung entsteht dadurch, dass man den Anfangspunkt der Koordinaten auf der z-Achse um die Strecke $\frac{I'}{C'}$ verschiebt; setzt man nämlich

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'' - \frac{I'}{C'},$$

so verwandelt sich die Gleichung in

$$A'x''^2 + B'y''^2 + C'z''^2 + \frac{I'^2}{C'} + K' = 0, \tag{48}$$

wobei man die beiden unveränderlichen Grössen zusammen mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen könnte.

Die soeben ausgeführte Verschiebung des Koordinatenanfangs wird in dem Falle $C' = 0$ unthunlich, weil dann $\frac{I'}{C'}$ entweder unendlich oder keine bestimmte Grösse ist; für diesen Fall, in welchem also statt Nr. 47)

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2I'z' + K' = 0 \tag{49}$$

zu schreiben ist, dient eine andere durch die Substitutionen

$$x' = x'', \quad y' = y'', \quad z' = z'' - \frac{K'}{2I'}$$

angezeigte Koordinatenänderung; sie giebt

$$50) \qquad A'x''^2 + B'y''^2 + 2I'z'' = 0.$$

Auch diese Transformation ist unausführbar, wenn $I' = 0$; man hätte dann statt der Gleichung 49)

$$A'x'^2 + B'y'^2 + K' = 0,$$

wodurch eine gerade Cylinderfläche charakterisiert wird; da übrigens die vorstehende Form bereits in der Form 48) enthalten ist, so giebt sie keine Veranlassung zu einer neuen Umwandlung. Bei Unterdrückung der nicht mehr nötigen Accente haben wir nun folgendes Theorem: Wenn man zwei Hauptebenen einer Fläche zweiten Grades zu den Koordinatenebenen der xz und yz nimmt, so lässt sich die Gleichung der Fläche auf die eine oder andere der beiden Formen

$$51) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = K,$$

$$52) \qquad Ax^2 + By^2 = 2Iz$$

zurückführen; die Flächen zweiten Grades zerfallen daher in zwei verschiedene Arten, jenachdem ihre Gleichungen der einen oder der anderen Form angehören.

Die Gleichungen für die Koordinaten des Centrums § 30 Nr. 10) werden bei 51):

$$A\xi = 0, \quad B\eta = 0, \quad C\zeta = 0.$$

Wenn zwei von den Zahlen A, B, C verschwinden, etwa $B = C = 0$, so werden die Gleichungen erfüllt durch $\xi = 0$ und völlig unbestimmte Werte von η und ζ; jeder Punkt der yz-Ebene kann daher als Centrum gelten. Die Fläche artet dabei, wie aus ihrer Gleichung

$$A\xi^2 = K$$

sofort hervorgeht, zu den zwei zur x-Achse normalen Ebenen aus, deren Abscissen $\xi = \pm\sqrt{K:A}$ sind.

Wenn nur eine der Zahlen A, B, C verschwindet, etwa $A = 0$, $B \gtrless 0$, $C \gtrless 0$, so wird den Gleichungen § 30, 10) durch ein unbestimmtes ξ und durch $\eta = \zeta = 0$ genügt; alsdann kann also jeder Punkt der x-Achse als Centrum betrachtet werden.

Die Fläche ist diesem Falle ein Cylinder, dessen Mantellinien der z-Achse parallel sind.

Sind A, B und C von Null verschieden, so ist das Centrum eindeutig bestimmt, nämlich der Koordinatenanfangspunkt.

Für die Flächen, welche der Gleichung 52) zugehören, wird die Gleichung § 30 Nr. 3) zu

$$53)\quad \begin{cases} (A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta)\, r^2 + 2\,(A\cos\alpha\,.\,\xi + B\cos\beta\,.\,\eta - I\cos\gamma)\, r \\ \qquad + (A\xi^2 + B\eta^2 - 2I\zeta) = 0. \end{cases}$$

Die der Richtung $\alpha\beta\gamma$ zugehörige Diametralebene hat die Gleichung

$$A\cos\alpha\,.\,\xi + B\cos\beta\,.\,\eta - I\cos\gamma = 0.$$

Die Diametralebenen sind daher parallel der z-Achse; sie enthalten nicht eine gemeinsame Gerade; denn die Horizontalspur kann durch geeignete Wahl von $\alpha\beta\gamma$ mit jeder beliebigen Geraden der xy-Ebene zusammenfallen.

Hieraus folgt, dass die Gleichung 51) die zentrischen, 52) die nichtzentrischen Flächen zweiter Ordnung darstellt.

Endlich würde noch zu entscheiden sein, wieviel individuelle Flächen zweiten Grades in jeder einzelnen Gattung enthalten sind; hierzu bedarf es nur einer Untersuchung über die verschiedenen möglichen Vorzeichen, welche die Grössen A, B, C, D, K, I in den Gleichungen 51) und 52) haben können.

a) Unter der Voraussetzung, dass keine der Grössen A, B, C, K verschwindet, können wir die Gleichung 51) durch K dividieren, und es sei dann

$$\frac{A}{K} = \pm\frac{1}{a^2},\quad \frac{B}{K} = \pm\frac{1}{b^2},\quad \frac{C}{K} = \pm\frac{1}{c^2};$$

bilden wir nun alle möglichen Kombinationen der Vorzeichen, so entstehen folgende acht Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad +\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Diesen entsprechen aber nicht acht verschiedene Flächen, namentlich sind diejenigen Flächen ihrer Natur nach identisch, deren Gleichungen in einer Gruppe beisammen stehen. Schreibt man z. B. in der zweiten Gleichung derjenigen Gruppe, welche zwei positive Zeichen neben einem negativen enthält, x_1, z_1, y_1 für x, y, z und a_1, c_1, b_1 für a, b, c, so verwandelt sich dieselbe in

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{z_1^2}{c_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1$$

und wird dadurch identisch mit der ersten Gleichung derselben Gruppe; beide Flächen unterscheiden sich daher nicht der Art, sondern nur der Lage nach; auf gleiche Weise kann die Gleichheit der übrigen in einer Gruppe befindlichen Flächen nachgewiesen werden. Ausserdem ist noch zu beachten, dass die letzte der vorigen Gleichungen keinen geometrischen Sinn hat, weil die Summe mehrerer negativen Zahlen nicht $= +1$ sein kann. Demnach bleiben nur die drei Gleichungen:

$$54)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 \end{aligned}\right.$$

als Repräsentanten von drei wirklich verschiedenen Flächen übrig.

Ist zweitens $K = 0$, so setzen wir

$$A = \pm \frac{1}{a^2}, \qquad B = \pm \frac{1}{b^2}, \qquad C = \pm \frac{1}{c^2}$$

und erhalten durch Kombination der Vorzeichen die Formen

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0, \\ -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0, \end{aligned} \qquad\Bigg|\qquad \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 0. \end{aligned}$$

Die beiden Gleichungen der ersten Gruppe sind identisch (wie die blosse Multiplikation mit -1 zeigt) und repräsentieren keine Fläche, sondern nur einen Punkt, weil ihnen auf keine andere Weise als durch $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ genügt werden kann. Die beiden Gleichungen der zweiten Gruppe charakterisieren gleichfalls eine und dieselbe Fläche, nämlich den elliptischen Kegel. Übrigens ist diese

Fläche implicite bereits in der zweiten Gleichung von Nr. 54) enthalten; setzt man nämlich in letzterer $a = \delta a'$, $b = \delta b'$, $c = \delta c'$, so erhält man

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = \delta^2,$$

und hieraus wird für $\delta = 0$ die Gleichung der Kegelfläche.

Wenn nicht K, aber einer der Koeffizienten B, C, etwa C verschwindet, so repräsentiert die Gleichung

$$Ax^2 + By^2 = K$$

im allgemeinen eine Cylinderfläche, deren erzeugende Gerade der z-Achse parallel ist. Die nämliche Gleichung erscheint auch als spezieller Fall einer der Gleichungen 54), wenn man c (oder b oder a) unendlich gross werden lässt. Für $K = 0$ wird daraus entweder ein blosser Punkt (bei gleichen Vorzeichen von A und B) oder ein Komplex von zwei zur z-Achse parallelen sich schneidenden Ebenen (bei entgegengesetzten Vorzeichen von A und B). Verschwinden zwei der Koeffizienten A, B, C, etwa die beiden ersten, so repräsentiert die Gleichung

$$Cz^2 = K$$

bei positiven $\frac{K}{C}$ zwei zur xy-Ebene parallele Ebenen, die für $K = 0$ zusammenfallen; für ein negatives $\frac{K}{C}$ hört die Gleichung auf geometrisch bedeutsam zu sein.

b) Um in ähnlicher Weise die Flächen zweiter Art zu diskutieren, setzen wir zunächst voraus, dass keine der Grössen A, B, I verschwinde; nach Division mit I sei

$$\frac{A}{I} = \pm\frac{1}{a}, \quad \frac{B}{I} = \pm\frac{1}{b},$$

und jede der Grössen a und b an sich positiv. Die Kombination der Vorzeichen liefert folgende vier Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z, \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z,$$

$$-\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z, \qquad -\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z.$$

Hier können wiederum die in einer Gruppe beisammen stehenden Gleichungen zur Identität gebracht werden und zwar dadurch, dass

man der z-Achse die entgegengesetzte Lage giebt, d. h. $z = -z'$ setzt; demnach bleiben nur die zwei durch die Gleichungen

$$55)\quad \begin{cases} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 2z, \\ \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z \end{cases}$$

repräsentierten Flächen als reell verschiedene übrig.

Für $I = 0$ reduziert sich die Gleichung 52) auf

$$Ax^2 + By^2 = 0,$$

wovon die geometrische Bedeutung bereits angegeben wurde. Verschwindet einer der Koeffizienten A und B, etwa der letztere, so repräsentiert die Gleichung

$$Ax^2 = 2Iz$$

einen parabolischen Cylinder, dessen erzeugende Gerade der y-Achse parallel ist; für $I = 0$ degeneriert derselbe zur yz-Ebene, für $A = 0$ zur xy-Ebene.

Schliessen wir nun alle die speziellen Fälle aus, in denen eine Fläche zweiten Grades zu einem Kegel, Cylinder oder zu einem ebenen Gebilde wird, so haben wir als Gesamtresultat der ganzen Diskussion den Satz: die Flächen zweiten Grades zerfallen in fünf besondere Flächen, von denen drei einen Mittelpunkt, und die übrigen keinen Mittelpunkt besitzen.

Wir untersuchen jetzt diese individuellen Flächen der Reihe nach einzeln.

§ 34.

Das Ellipsoid.

Gestalt der Fläche. Die erste von den zentrischen Flächen zweiten Grades wird nach Nr. 54) durch die Gleichung

$$1)\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

charakterisiert, mittels deren man leicht Auskunft über ihre Gestalt erlangen kann. Um zunächst die Spuren oder sogenannten Hauptschnitte der Fläche kennen zu lernen, setzen wir der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, und erhalten dementsprechend

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

diese Gleichungen geben zu erkennen, dass alle drei Hauptschnitte Ellipsen sind, und zwar besitzt der Schnitt mit der xy-Ebene die Halbachsen a und b, der xz-Schnitt die Halbachsen a und c, endlich der yz-Schnitt die Halbachsen b und c. Legt man ferner in der Höhe h über der xy-Ebene eine zu dieser parallele Ebene, d. h. nimmt man z unveränderlich $= h$, so schneidet letztere Ebene die Fläche in einer Linie, welche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

oder

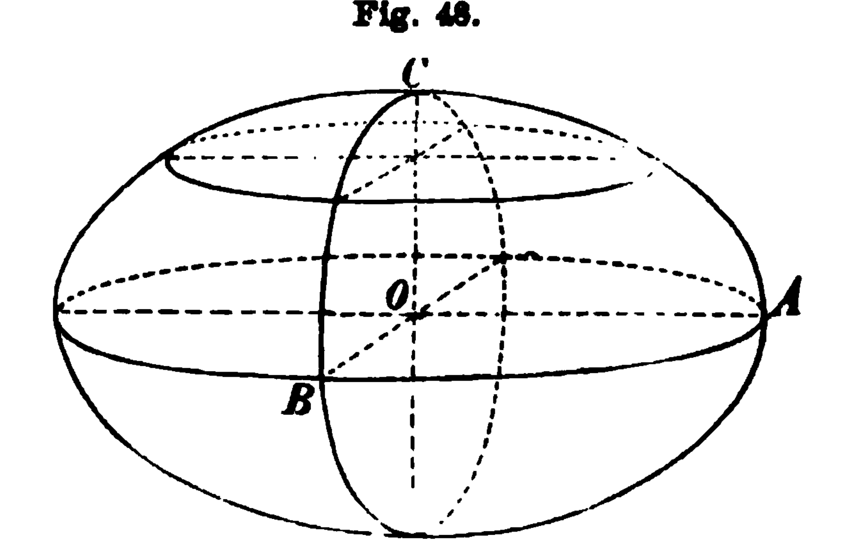
$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}}\right)^2=1$$

zur Gleichung hat; der Durchschnitt ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2-h^2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2-h^2}.$$

Ihre grössten Werte erhalten dieselben für $h = 0$; bei wachsenden h nehmen sie ab, reduzieren sich für $h = c$ auf Null (in welchem Falle der Querschnitt zu einem Punkte wird) und werden endlich imaginär für $h > c$. Man kann sich demnach die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und gleichzeitig ihre Scheitel auf zwei festen Ellipsen fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OA = a$, $OC = c$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OB = b$, $OC = c$ konstruiert ist. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein dreiachsiges Ellipsoid. Für $b = a > c$ verwandelt sich dasselbe in das abgeplattete Rotationsellipsoid mit c als Drehungsachse, für $c = b < a$ in das durch Drehung um die x-Achse entstandene gestreckte Rotationsellipsoid; für $a > b$ und

Fig. 48.



$c = \infty$ geht das dreiachsige Ellipsoid in einen elliptischen Cylinder über, dessen Normalquerschnitt die Halbachsen a und b besitzt.

Ebene Schnitte. Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$2)\qquad Ax + By + Cz = D$$

sein möge, schneidet das Ellipsoid in einer krummen Linie, für welche die Gleichung der Horizontalprojektion durch Elimination von z aus den Gleichungen 1) und 2) bestimmt wird; das Resultat dieser leichten Rechnung ist von der Form

$$3)\qquad A_1x^2 + B_1y^2 + 2C_1xy + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$

worin $A_1, B_1 \ldots F_1$ folgende Werte besitzen:

$$A_1 = \frac{A^2}{c^2} + \frac{C^2}{a^2}, \quad B_1 = \frac{B^2}{c^2} + \frac{C^2}{b^2}, \quad C_1 = \frac{AB}{c^2},$$

$$D_1 = -\frac{AD}{c^2}, \quad E_1 = -\frac{BD}{c^2}, \quad F_1 = \frac{D^2}{c^2} - C^2.$$

Demzufolge ist

$$C_1^2 - A_1B_1 = -\frac{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}{a^2b^2c^2}\,C^2$$

und da der Ausdruck rechter Hand, mithin auch $C_1^2 - A_1B_1$ jederzeit negativ bleibt, so charakterisiert die Gleichung 3) im allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$4)\qquad x_0 = \frac{B_1D_1 - C_1E_1}{C_1^2 - A_1B_1}, \quad y_0 = \frac{A_1E_1 - C_1D_1}{C_1^2 - A_1B_1}$$

besitzt. Die Halbachsen dieser Ellipse sind nach einem bekannten Satze reell, wenn der Ausdruck

$$5)\qquad A_1E_1^2 + B_1D_1^2 + (C_1^2 - A_1B_1)F_1 - 2C_1D_1E_1$$

positiv ist; hat der vorstehende Ausdruck den Wert Null, so verschwinden die Halbachsen der Ellipse und es reduziert sich die Kurve auf ihren durch die Gleichungen 4) bestimmten Mittelpunkt; ist endlich der erwähnte Ausdruck negativ, so werden die Halbachsen der Ellipse imaginär und die Gleichung 3) verliert ihre geometrische Bedeutung. Vermöge der Werte von $A_1, B_1, C_1 \ldots F_1$ geben die Formeln 4)

$$x_0 = \frac{ADa^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}, \quad y_0 = \frac{BDb^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}$$

als ebene Koordinaten des Mittelpunktes der Schnittprojektion; die Koordinaten des Mittelpunktes der Schnittellipse selber sind die

nämlichen x_0, y_0 und das ihnen vermöge der Gleichung 2) entsprechende

$$z_0 = \frac{CDc^2}{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2}.$$

Ferner wird der in Nr. 5) verzeichnete Ausdruck gleich dem folgenden

$$\frac{C^4}{a^2b^2c^2}(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2),$$

dessen Vorzeichen lediglich von dem Inhalte der Parenthese abhängt. Unter Rücksicht auf den Umstand, dass die Schnittkurve immer derselben Natur wie ihre Projektion sein muss, haben wir als Gesamtresultat der vorigen Erörterungen den Satz: wenn der Ausdruck

$$6) \qquad \varDelta = A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2$$

einen positiven Wert erhält, so schneidet die Ebene 2) das Ellipsoid 1) in einer Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Koordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 + \varDelta}, \quad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 + \varDelta}, \quad z_0 = \frac{CDc^2}{D^2 + \varDelta}$$

bestimmt ist; für $\varDelta = 0$ hat die Ebene mit der Fläche nur den einen durch die Koordinaten

$$x_0 = \frac{Aa^2}{D}, \quad y_0 = \frac{Bb^2}{D}, \quad z_0 = \frac{Cc^2}{D}$$

bestimmten Punkt gemein; bei negativen $\varDelta$ besitzen beide Flächen keinen gemeinschaftlichen Punkt.

Von Interesse ist noch die Frage, ob es solche Lagen der schneidenden Ebene giebt, dass die entstehenden Schnittellipsen auch bei dem dreiachsigen Ellipsoid zu Kreisen werden, wie dies bei den Rotationsellipsoiden der Fall ist. Um hinsichtlich der Achsenverhältnisse eine bestimmte Vorstellung zu haben, setzen wir $a > b > c$ voraus, worin keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit liegt, weil es jederzeit freisteht, die grösste der Halbachsen zur x-Achse, die mittlere zur y-Achse und die kleinste zur z-Achse zu wählen. Wir schneiden ferner das Ellipsoid durch eine Ebene, deren Horizontalspur mit der x-Achse den Winkel ψ einschliesst und deren Neigungswinkel gegen die xy-Ebene ϑ heissen möge. Der Durchschnitt dieser Ebene mit der x-Achse sei der Anfangspunkt

eines neuen Koordinatensystems und seine Entfernung vom Mittelpunkte des Ellipsoides $= k$; die Horizontalspur der Ebene nehmen wir zur Achse der x' und senkrecht darauf die Achse der y' in der Ebene selbst. Die Gleichung des Durchschnittes beider Flächen ergiebt sich aus Nr. 1 durch Substitution der Werte (§ 22, Nr. 8):

$$\begin{aligned} x &= k + x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= \phantom{k + {}} x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= \phantom{k + x' \sin\psi + {}} y' \sin\vartheta, \end{aligned}$$

und zwar ist das Resultat von der Form

$$7)\qquad A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

worin A', B', C', auf die es nur ankommt, folgende Werte haben:

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\cos\psi \sin\psi \cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Die Gleichung 7) repräsentiert einen Kreis, wenn die Bedingungen $C' = 0$ und $A' = B'$ gleichzeitig erfüllt sind; die erste giebt entweder

$$\cos\vartheta = 0 \quad \text{oder} \quad \sin\psi = 0 \quad \text{oder} \quad \cos\psi = 0;$$

die zweite Bedingung

$$8)\qquad \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

liefert im Falle $\cos\vartheta = 0$ für $\cos\psi$ den (wegen $b < a$) unmöglichen Wert

$$\cos\psi = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{c\sqrt{b^2 - a^2}};$$

der zweite Fall $\sin\psi = 0$ führt zu dem Ausdrucke

$$\sin\vartheta = \frac{c\sqrt{b^2 - a^2}}{a\sqrt{b^2 - c^2}},$$

welcher gleichfalls imaginär ist; für $\cos\psi = 0$ endlich erhält man aus Nr. 8):

$$9)\qquad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck ist reell und jederzeit < 1, weil er als Produkt zweier echten Brüche dargestellt werden konnte.

Die Formel 9) giebt für ϑ zwei verschiedene Werte, es existieren daher im allgemeinen zwei verschiedene Systeme paralleler Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; wegen $\psi = 90^0$ stehen alle derartigen Ebenen senkrecht auf der xz-Ebene, d. h. auf der Ebene der grössten und kleinsten Achse, ihre Gleichungen (oder auch die ihrer xz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (x - k) \tan \vartheta,$$

d. h. zufolge des Wertes von $\tan \vartheta$

$$c\sqrt{a^2 - b^2}(x - k) \pm a\sqrt{b^2 - c^2} \,.\, z = 0$$

oder

$$10) \qquad c\sqrt{a^2 - b^2} \,.\, x \pm a\sqrt{b^2 - c^2} \,.\, z = ck\sqrt{a^2 - b^2}.$$

Die Schnitte sind reell, solange

$$\varDelta = c^2\{a^2(a^2 - c^2) - (a^2 - b^2)k^2\}$$

positiv ist, d. h. solange

$$k^2 < \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2}$$

bleibt; sie werden für

$$k^2 = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2 - b^2}$$

zu Punkten, deren Koordinaten sind:

$$\pm \frac{a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}}, \quad 0, \quad \pm \frac{c\sqrt{b^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2}},$$

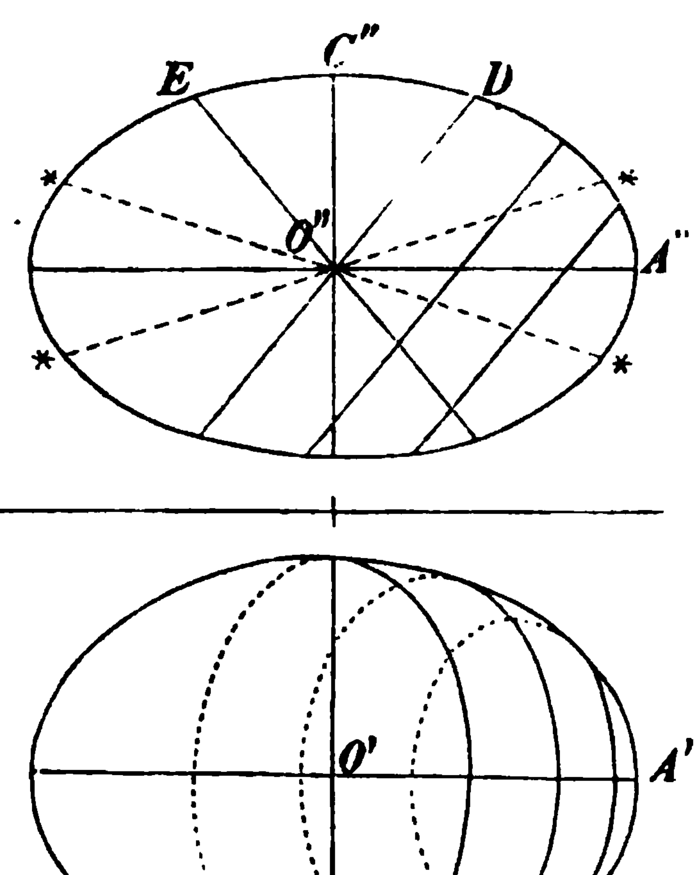
wobei alle Kombinationen der Vorzeichen gelten; endlich hören die Kreisschnitte auf zu existieren, wenn k^2 die angegebene Grösse überschreitet. Die vier erwähnten Punkte, welche als Kreise mit annullierten Halbmessern zu betrachten sind, pflegt man die vier **Kreispunkte** des Ellipsoides zu nennen.

Diese Ergebnisse sind übrigens leicht graphisch darzustellen, wenn man die Fläche auf zwei den Koordinatenebenen xy und xz parallele Ebenen projiziert; in der Horizontalprojektion hat man die beiden Halbachsen $O'A' = a$, $O'B' = b$, in der Vertikalprojektion die Halbachsen $O''A'' = a$, $O''C'' = c$; beschreibt man aus O'' mit b als Halbmesser einen Kreis, welcher die Vertikalellipse u. a. in D schneidet, so ist

$$\sin A''O''D = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{b^2 - c^2}},$$

mithin ϑ entweder $= \angle A''O''D$ oder gleich dessen Nebenwinkel $A''O''E$. Alle auf der Ebene der Vertikalprojektion (Bildebene) senkrechten und zu $O''D$ oder $O''E$ parallelen Ebenen schneiden das Ellipsoid in Kreisen (drei derselben sind in der Figur angegeben und erscheinen in der Horizontalprojektion als Ellipsen); die Halbmesser der Kreise werden um so kleiner, je weiter sich die Schnitte vom Mittelpunkte der Fläche entfernen, und gehen zuletzt in Null über. Die Mittelpunkte aller erwähnten Kreise liegen auf denjenigen Durchmessern der Vertikalellipse, welche entweder zur Sehnenrichtung OD oder zur Richtung OE gehören; die Endpunkte der Durchmesser sind die vier Kreispunkte der Fläche und in der Figur durch Asterisken bezeichnet.

Fig. 49.



Berührungsebenen und Normalen. Wir betrachten endlich den Fall, wo die Ebene nur einen Punkt mit der Fläche gemein hat, d. h. letztere in diesem Punkte berührt, und lösen die hieran sich knüpfende Aufgabe, „durch einen gegebenen Punkt xyz des Ellipsoides eine Tangentialebene an letzteres zu legen“. Nennen wir

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D \tag{11}$$

die Gleichung der gesuchten Ebene, so müssen nach dem vorigen die Bedingungen

$$A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 = D^2,$$

$$x = \frac{Aa^2}{D}, \quad y = \frac{Bb^2}{D}, \quad z = \frac{Cc^2}{D}$$

erfüllt sein; aus den letzten Gleichungen folgen die Werte

$$A = \frac{Dx}{a^2}, \quad B = \frac{Dy}{b^2}, \quad C = \frac{Dz}{c^2},$$

welche der ersten Bedingung genügen, weil der Punkt xyz, vermöge der gemachten Voraussetzung, auf der Fläche liegt. Nach Substitution der Werte von A, B, C erhalten wir aus Nr. 11):

$$12)\qquad \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

als Gleichung der Berührungsebene am Punkte xyz; ihre Spuren schneiden von den Koordinatenachsen die Strecken $\frac{a^2}{x}$, $\frac{b^2}{y}$, $\frac{c^2}{z}$ ab und sind hiernach sehr leicht zu konstruieren.

Eine auf der Berührungsebene im Berührungspunkte errichtete Senkrechte hat die Gleichungen

$$\frac{a^2}{x}(\xi - x) = \frac{b^2}{y}(\eta - y) = \frac{c^2}{z}(\zeta - z),$$

womit die durch den Punkt xyz gehende Normale der Fläche bestimmt ist.

1895 Dec 17

§ 35.

Das einfache Hyperboloid.

Gestalt der Fläche. Setzt man in der Gleichung der zweiten zentrischen Fläche

$$1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, so erhält man als Gleichungen der Spuren oder Hauptschnitte:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Demgemäss ist der Hauptschnitt mit der xy-Ebene eine aus den Halbachsen a und b gebildete Ellipse, die sogenannte Kehlellipse; der xz-Schnitt ist eine Hyperbel, welche a zur Haupt- und c zur Nebenhalbachse hat; der yz-Schnitt ist gleichfalls eine Hyperbel mit der Haupthalbachse b und der Nebenhalbachse c. Für eine in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte Ebene hat z den konstanten Wert $z = h$ und es ist folglich die Gleichung ihres Schnittes mit der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} = 1,$$

oder

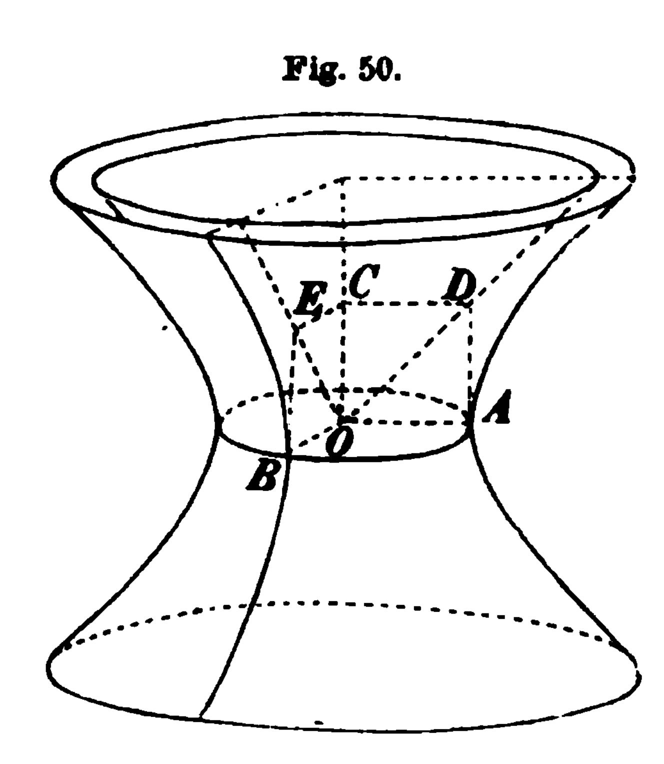
$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}}\right)^2=1;$$

der Schnitt ist folglich eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2} \quad \text{und} \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}.$$

Letztere erhalten für $h = 0$ ihre kleinsten Werte und wachsen mit h gleichzeitig ins Unendliche. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei festen Hyperbeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den Halbachsen $OA = CD = a$, $OC = AD = c$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OB = CE = b$, $OC = BE = c$ konstruiert ist, wobei c für beide Hyperbeln als Nebenhalbachse dient. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein **dreiachsiges Hyperboloid**. Für $b = a$ verwandelt sich dasselbe in das einfache Rotationshyperboloid, für $a > b$ und $c = \infty$ geht es in denselben elliptischen Cylinder über, wie unter gleichen Umständen das dreiachsige Ellipsoid. Endlich ist noch die Veränderung zu erwähnen, welche die Fläche in dem Falle erleidet, wo die Asymptotenwinkel $AOD = \alpha'$ und $BOE = \beta'$ konstant bleiben, aber die Halbachsen bis zu Null vermindert werden; giebt man der Gleichung 1) für diesen Zweck die Form

Fig. 50.



$$x^2 \tan^2 \alpha' + y^2 \tan^2 \beta' - z^2 = c^2$$

und lässt nachher c in Null übergehen, so bleibt

$$x^2 \tan^2 \alpha' + y^2 \tan^2 \beta' - z^2 = 0$$

als Gleichung der resultierenden Fläche; diese ist ein elliptischer Kegel, wie schon in § 25, 3) bemerkt wurde. Die Gleichung desselben kann auch in der Form

$$2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

dargestellt werden und führt zu einer nahen Beziehung beider Flächen. Der in der Höhe $z = h$ parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt des Kegels ist eine Ellipse mit den Halbachsen $\frac{ah}{c}$ und $\frac{bh}{c}$, mithin sind die Differenzen zwischen den Halbachsen der durch das Hyperboloid und durch den Kegel in gleicher Höhe gelegten Schnitte

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2} - \frac{a}{c}h = \frac{ac}{\sqrt{c^2+h^2}+h},$$
$$\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2} - \frac{b}{c}h = \frac{bc}{\sqrt{c^2+h^2}+h};$$

für unendlich wachsende h haben die beiden Differenzen die Null zur Grenze, d. h. je entfernter von der xy-Ebene eine Parallelebene zu dieser gelegt wird, destoweniger differieren die Querschnitte der beiden Flächen voneinander. Zufolge dieser Eigenschaft heisst die durch Nr. 2) charakterisierte Fläche der Asymptotenkegel des einfachen Hyperboloides.

Ebene Schnitte. Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$3)\qquad Ax + By + Cz = D$$

sein möge, schneidet das Hyperboloid in einer Linie zweiten Grades, für welche die Gleichung der Horizontalprojektion durch Elimination von z gefunden wird; sie hat die Form

$$4)\qquad A_1x^2 + B_1y^2 + 2C_1xy + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0$$

und zwar ist:

$$A_1 = -\frac{A^2}{c^2} + \frac{C^2}{a^2},\quad B_1 = -\frac{B^2}{c^2} + \frac{C^2}{b^2},\quad C_1 = -\frac{AB}{c^2},$$
$$D_1 = \frac{AD}{c^2},\qquad E_1 = \frac{BD}{c^2},\qquad F_1 = -\frac{D^2}{c^2} - C^2.$$

Hieraus ergeben sich die Werte

$$C_1^2 - A_1B_1 = \frac{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2}{a^2b^2c^2}\,C^2,$$
$$A_1E_1^2 + B_1D_1^2 + (C_1^2 - A_1B_1)F_1 - 2C_1D_1E_1$$
$$= \frac{-A^2a^2 - B^2b^2 + C^2c^2 + D^2}{a^2b^2c^2}\,C^4,$$

mittels deren Vorzeichen bekanntlich die Natur der betreffenden Linie zweiten Grades beurteilt werden kann. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Ist $C_1^2 - A_1 B_1$ negativ, also

$$A^2a^2 + B^2b^2 < C^2c^2,$$

so wird A_1 positiv* und dasselbe gilt von dem Ausdrucke

$$\varDelta = - A^2a^2 - B^2b^2 + C^2c^2 + D^2;$$

die Gleichung 4) bedeutet in diesem Falle eine Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Koordinaten

$$\frac{ADa^2}{D^2 - \varDelta}, \quad \frac{BDb^2}{D^2 - \varDelta}$$

bestimmt wird.

Im zweiten Falle $C_1^2 - A_1 B_1 = 0$ oder

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2$$

ist A_1 wiederum positiv und die Gleichung 4) repräsentiert eine Parabel, wenigstens solange, als $\varDelta$ nicht verschwindet, d. h. $D \gtrless 0$ ist; für $D = 0$ degeneriert die Parabel zu zwei parallelen Geraden, deren Gleichungen unmittelbar angegeben werden können Die Gleichung 4) lautet nämlich für $D = 0$

$$\frac{C^2c^2 - A^2a^2}{a^2c^2} x^2 + \frac{C^2c^2 - B^2b^2}{b^2c^2} y^2 - 2\frac{AB}{c^2} xy - C^2 = 0,$$

d. i. wegen der vorher erwähnten Bedingung

$$\frac{B^2b^2}{a^2c^2} x^2 + \frac{A^2a^2}{b^2c^2} y^2 - 2\frac{AB}{c^2} xy = C^2$$

oder

$$\left(\frac{Bb}{a} x - \frac{Aa}{b} y\right)^2 = C^2c^2,$$

woraus

$$\frac{Bb}{a} x - \frac{Aa}{b} y = \pm Cc.$$

Ist endlich drittens $C_1^2 - A_1 B_1$ positiv, also

$$A^2a^2 + B^2b^2 > C^2c^2,$$

so bedeutet die Gleichung 4) im allgemeinen eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$\frac{ADa^2}{D^2 - \varDelta}, \quad \frac{BDb^2}{D^2 - \varDelta}$$

* Diese Bemerkung ist deswegen nicht überflüssig, weil das zweite Unterscheidungszeichen für die Kegelschnitte ein positives A_1 voraussetzt.

besitzt. Für $\Delta = 0$ reduziert sich dieselbe auf ihre Asymptoten, denn wenn man in Nr. 4) die für diesen Fall giltigen Werte

$$A_1 = \frac{B^2 b^2 - D^2}{a^2 c^2}, \quad B_1 = \frac{A^2 a^2 - D^2}{b^2 c^2}, \quad F_1 = -\frac{A^2 a^2 + B^2 b^2}{c^2}$$

einsetzt, so erhält man

$$\left(\frac{Bb}{a}x - \frac{Aa}{b}y\right)^2 - \left(\frac{D}{a}x - Aa\right)^2 - \left(\frac{D}{b}y - Bb\right)^2 = 0,$$

oder für

$$x = \frac{Aa^2}{D} + x_1, \quad y = \frac{Bb^2}{D} + y_1,$$

$$\left(\frac{Bb}{a}x_1 - \frac{Aa}{b}y_1\right)^2 - x_1^2 - y_1^2 = 0;$$

diese Gleichung repräsentiert, wie ihre Reduktion auf x_1 zeigt, zwei Gerade, welche den durch die Koordinaten

$$\frac{Aa^2}{D} \quad \text{und} \quad \frac{Bb^2}{D}$$

bestimmten Punkt gemein haben. Diese Ergebnisse sind leicht auf den Schnitt selber zu übertragen und sehr gut in Worte zu fassen, wenn man den geometrischen Sinn der Unterscheidung $A^2a^2 + B^2b^2 \lesseqgtr C^2c^2$ berücksichtigt. Legt man nämlich durch den Koordinatenanfang parallel zur Schnittebene die Hilfsebene

$$Ax + By + Cz = 0,$$

so kann letztere gegen den Asymptotenkegel drei verschiedene Lagen einnehmen; sie hat mit demselben entweder nur den Kegelmittelpunkt gemein, oder sie berührt ihn, oder sie schneidet ihn in zwei Geraden, und diese drei Fälle sind es, welche nach § 26 den oben gemachten Unterscheidungen entsprechen. Hiernach lässt sich das Gesamtresultat der Untersuchung auf folgende Weise zusammenstellen: Um die Natur des Schnittes zu beurteilen, den eine beliebige durch die Gleichung 3) ausgedrückte Ebene mit dem einfachen Hyperboloid bildet, lege man durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu dieser Ebene eine Hilfsebene; wenn letztere mit dem Asymptotenkegel nur den Mittelpunkt gemein hat, so ist der entstandene Schnitt eine Ellipse, deren Mittelpunkt durch die Koordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 - \Delta}, \quad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 - \Delta}, \quad z_0 = -\frac{CDc^2}{D^2 - \Delta},$$

5) $$\Delta = -A^2a^2 - B^2b^2 + C^2c^2 + D^2$$

bestimmt wird; wenn zweitens die Hilfsebene den Asymptotenkegel berührt, so ist der Schnitt eine Parabel, welche in dem speziellen Falle, wo die Hilfsebene mit der ursprünglichen Ebene identisch wird, zu einem System von zwei parallelen Geraden degeneriert; schneidet endlich die Hilfsebene den Asymptotenkegel in zwei Geraden, so ist der Schnitt der ersten Ebene mit der Fläche eine Hyperbel, deren Mittelpunktskoordinaten

$$x_0 = \frac{ADa^2}{D^2 - \Delta}, \quad y_0 = \frac{BDb^2}{D^2 - \Delta}, \quad z_0 = -\frac{CDc^2}{D^2 - \Delta}$$

sind. Dieser Punkt liegt ausserhalb des von der Fläche umschlossenen Raumes, wenn

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{z_0}{c}\right)^2 > 1,$$

d. h. wenn Δ positiv ist, er liegt innerhalb desselben bei negativen Δ, endlich für $\Delta = 0$ befindet er sich auf der Fläche selbst, seine Koordinaten sind dann

$$x_0 = \frac{Aa^2}{D}, \quad y_0 = \frac{Bb^2}{D}, \quad z_0 = -\frac{Cc^2}{D},$$

und die Hyperbel wird in diesem Falle zu zwei durch diesen Punkt gehenden Geraden.

Von den hiermit erschöpften möglichen Lagen einer Ebene gegen das einfache Hyperboloid wollen wir einige noch etwas spezieller betrachten.

a) Zunächst mag untersucht werden, ob der elliptische Schnitt der Fläche zu einem Kreise werden kann. Denken wir uns die Lage der schneidenden Ebene durch den Abschnitt k, welchen sie auf der y-Achse bildet, durch ihren Neigungswinkel ϑ gegen die xy-Ebene und durch den Winkel ψ bestimmt, welchen ihre Horizontalspur mit der x-Achse einschliesst, so haben wir zur Transformation der Koordinaten die Formeln

$$\begin{aligned} x &= \phantom{k + {}} x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= \phantom{k + x' \sin\psi + {}} y' \sin\vartheta, \end{aligned}$$

und zwar ist der Durchschnitt der Ebene mit der y-Achse der Anfang des neuen rechtwinkligen Koordinatensystemes der $x'y'$, sowie die Ho-

rizontalspur der Ebene dessen x'-Achse. Nach Substitution der obigen Ausdrücke erhalten wir aus Nr. 1) als Gleichung des Schnittes

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

und zwar ist darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{a^2 b^2}.$$

Dieser Schnitt wird zu einem Kreise, wenn $A' = B'$ und zugleich $C' = 0$ ist. Die letztere Bedingung giebt entweder $\vartheta = 90^0$, oder $\psi = 90^0$, oder $\psi = 0^0$. Setzen wir voraus, dass $a > b$ sei, wodurch die Allgemeinheit insofern nicht beeinträchtigt wird, als es freisteht, die x-Achse durch die grössere der beiden Halbachsen a und b zu legen, so erhalten wir aus der ersten Bedingung

$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

sowohl für $\vartheta = 90^0$ als für $\psi = 90^0$ unmögliche Resultate; dagegen giebt die Supposition $\psi = 0^0$

$$6) \qquad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Der rechter Hand stehende Ausdruck ist immer reell und ein Produkt zweier echten Brüche, mithin < 1; daraus folgt, dass ein Kreisschnitt der Fläche bei zwei verschiedenen Neigungswinkeln, nämlich ϑ und $180^0 - \vartheta$, möglich ist. Die Ebenen aller derartigen Schnitte sind parallel und stehen wegen $\psi = 0^0$ senkrecht auf der yz-Ebene; mit Rücksicht auf die in § 26 (S. 147) erhaltenen Resultate kann man überhaupt den bemerkenswerten Satz aussprechen, dass alle Ebenen, welche den Asymptotenkegel in Kreisen schneiden, auch mit dem einfachen Hyperboloid kreisförmige Schnitte bilden. Die Gleichungen dieser Ebenen (oder auch die ihrer yz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (y - k)\tan\vartheta$$

d. i. zufolge des Wertes von $\tan\vartheta$

$$7) \qquad c\sqrt{a^2 - b^2}(y - k) \pm b\sqrt{a^2 + c^2} \,.\, z = 0.$$

Die Mittelpunkte der Kreisschnitte liegen auf zwei Durchmessern der aus den Halbachsen b und c konstruierten Hyperbel, diese Durch-

messer schneiden aber die Kurve nicht; das einfache Hyperboloid besitzt demnach keine Kreispunkte. Man kann diese Verhältnisse ebenso leicht wie bei dem Ellipsoid graphisch zur Anschauung bringen, wenn man die Fläche auf zwei Ebenen projiziert, von denen die eine der xy-Ebene und die andere der yz-Ebene parallel ist.

b) Wir wollen zweitens untersuchen, ob die hyperbolischen Schnitte der Fläche zu gleichseitigen Hyperbeln werden können Hierzu ist bekanntlich die Bedingung $A' + B' = 0$ erforderlich, aus welcher man vermöge der Werte von A' und B' leicht die Formel

$$8) \qquad \tan^2 \vartheta = \frac{(a^2 + b^2) c^2}{a^2 (b^2 - c^2) \sin^2 \psi + b^2 (a^2 - c^2) \cos^2 \psi}$$

herleitet. Um den geometrischen Sinn derselben zu finden, gehen wir auf die Gleichung der Schnittebene, nämlich

$$Ax + By + Cz = D$$

zurück und geben ihr die Form

$$9) \qquad A(x - f) + B(y - g) + C(z - h) = 0,$$

womit nur gesagt ist, dass die erwähnte Ebene einen festen Punkt fgh enthalten soll; zufolge der bekannten Werte

$$\tan^2 \vartheta = \frac{A^2 + B^2}{C^2}, \quad \cos^2 \psi = \frac{B^2}{A^2 + B^2}, \quad \sin^2 \psi = \frac{A^2}{A^2 + B^2}$$

ergiebt sich dann aus Nr. 8) als Bedingungsgleichung für die in Nr. 9) vorkommenden Koeffizienten

$$10) \qquad A^2 a^2 (b^2 - c^2) + B^2 b^2 (a^2 - c^2) = C^2 c^2 (a^2 + b^2).$$

Dieselbe Bedingungsgleichung erhält man auch bei einer anderen Gelegenheit. Soll nämlich die Ebene 9) den elliptischen Kegel

$$\left(\frac{x - f}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y - g}{b_1}\right)^2 = \left(\frac{z - h}{c_1}\right)^2$$

berühren, so ist hierzu, wenn der Punkt fgh als neuer Koordinatenanfang genommen wird, die Bedingung

$$A^2 a_1^2 + B^2 b_1^2 = C^2 c_1^2$$

erforderlich (S. 149), welche für

$$a_1^2 = \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{c^2}, \quad b_1^2 = \frac{b^2 (a^2 - c^2)}{c^2}, \quad c_1^2 = a^2 + b^2$$

mit Nr. 10) zusammenfällt. Durch einen festen Punkt fgh lassen sich also unendlich viele Ebenen legen, welche das einfache Hyper-

boloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, und zwar berühren alle jene Ebenen den elliptischen Kegel

$$11)\qquad \frac{(x-f)^2}{a^2(b^2-c^2)}+\frac{(y-g)^2}{b^2(a^2-c^2)}=\frac{(z-h)^2}{c^2(a^2+b^2)}.$$

Unmöglich werden diese Schnitte nur in dem Falle, wo c die grösste der drei Halbachsen ist.

c) Aus dem Früheren ergab sich, dass ein einfaches Hyperboloid von einer Ebene in geraden Linien geschnitten werden kann, oder, was dasselbe ist, dass sich auf der Fläche gerade Linien ziehen lassen; diese Eigenschaft, welche das Hyperboloid mit dem Kegel und Cylinder gemein hat, wollen wir direkt betrachten, indem wir die Bedingungen aufsuchen, unter welchen eine durch die Gleichungen ihrer beiden Vertikalprojektionen

$$12)\qquad x=Mz+u,\qquad y=Nz+v$$

bestimmte Gerade auf der Fläche liegt. Dies würde nun der Fall sein, wenn alle den vorstehenden Gleichungen genügenden x, y, z ausserdem noch die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

befriedigen; nach Substitution der Werte von x, y, z wird aus der letzteren Gleichung

$$\left(\frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{Mu}{a^2}+\frac{Nv}{b^2}\right)z+\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,$$

und diese kann für alle z nur dann bestehen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{Mu}{a^2}+\frac{Nv}{b^2}=0,\qquad \frac{M^2}{a^2}+\frac{N^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0.$$

Von diesen Gleichungen sagt die erste, dass die Horizontalspur der verlangten Geraden auf der Horizontalspur der Fläche liegen muss, was geometrisch unmittelbar vorausgesehen werden konnte. Denken wir uns diese Bedingung dadurch befriedigt, dass wir den Punkt uv willkürlich auf der Kehlellipse wählen, so enthalten die übrigen zwei Gleichungen die beiden Unbekannten M und N; als deren Werte finden wir:

$$M = \pm \frac{av}{bc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}} = \pm \frac{av}{bc},$$

$$N = \pm \frac{bu}{ac} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}}} = \pm \frac{bu}{ac},$$

wobei sich die Vorzeichen aufeinander beziehen. Vermöge der Realität von M, N, u, v haben wir nun zwei Systeme von geraden Linien auf dem Hyperboloid; für irgend eine Gerade des ersten Systemes gelten die Gleichungen

$$13) \qquad x = +\frac{av}{bc} z + u, \qquad y = -\frac{bu}{ac} z + v,$$

und für jede Gerade des anderen Systemes:

$$14) \qquad x = -\frac{av}{bc} z + u, \qquad y = +\frac{bu}{ac} z + v.$$

Legen wir eine Gerade des zweiten Systemes durch einen anderen Punkt $u_1 v_1$ der Kehlellipse, so ist für sie

$$15) \qquad x = -\frac{av_1}{bc} z + u_1, \qquad y = +\frac{bu_1}{ac} z + v_1;$$

aus der ersten Gleichung von 13) und der ersten Gleichung in 15) folgt

$$z = -\frac{bc}{a} \cdot \frac{u - u_1}{v + v_1},$$

aus der zweiten Gleichung in 13) verbunden mit der zweiten Gleichung in 15)

$$z = +\frac{ac}{b} \cdot \frac{v - v_1}{u + u_1}.$$

Da beide Punkte uv und $u_1 v_1$ auf der Kehlellipse liegen, so ist gleichzeitig

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{u_1^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{b^2} = 1,$$

mithin durch Subtraktion und Zerlegung der Quadratdifferenzen

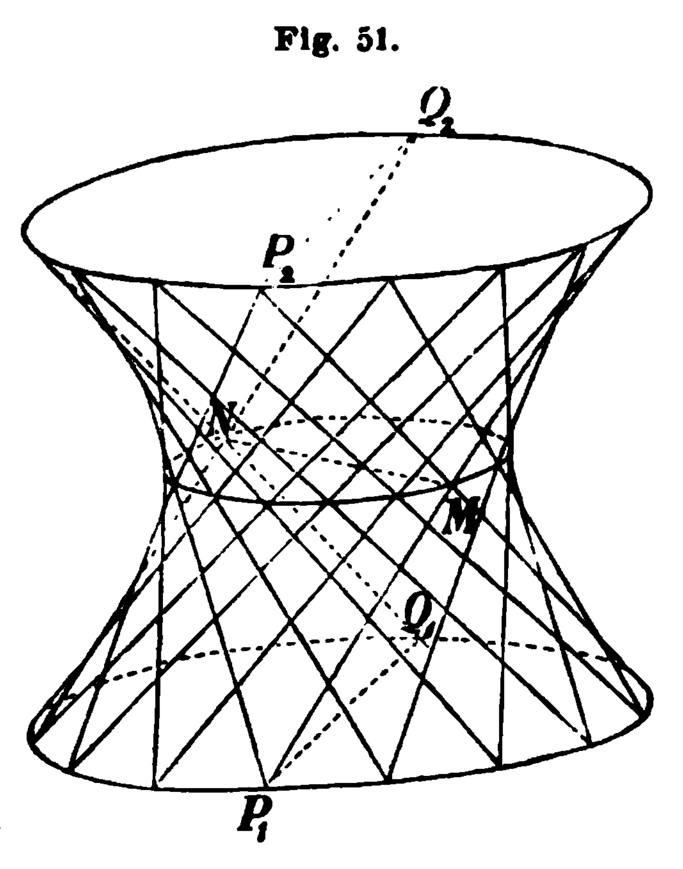
$$\frac{(u - u_1)(u + u_1)}{a^2} + \frac{(v - v_1)(v + v_1)}{b^2} = 0;$$

giebt man dieser Gleichung die Form

$$-\frac{b}{a} \cdot \frac{u - u_1}{v + v_1} = + \frac{a}{b} \cdot \frac{v - v_1}{u + u_1},$$

so erkennt man die Identität der vorigen beiden Werte von z; geometrisch heisst dies: jede Gerade des einen Systemes schneidet alle Geraden des zweiten Systemes. Der Durchschnitt kann ebensowohl auf der unteren als auf der oberen Hälfte der Fläche stattfinden; der erste Fall tritt bei negativen z ein, d. i. wenn $u + u_1$ und $v - v_1$ entgegengesetzte Vorzeichen haben, der zweite Fall, wenn $u + u_1$ und $v - v_1$ gleiche Vorzeichen besitzen. Der Übergang von der einen Lage des Durchschnittes zur anderen ist an den beiden Stellen $u_1 = u$, $v_1 = v$ und $u_1 = -u$, $v_1 = -v$; bei der ersten liegt der Durchschnitt auf der Kehlellipse, bei der zweiten im Unendlichen, weil dann die Geraden 13) und 15) parallel werden. In der Figur ist der Punkt uv mit M, der ihm diametral gegenüberliegende mit N bezeichnet; MP_1 und NQ_1 sind die durch die Punkte M und N gehenden Geraden des ersten, MP_2, NQ_2 die des zweiten Systemes. Die Gerade MP_1 schneidet auf der unteren Hälfte der Fläche alle Geraden des zweiten Systemes, deren Horizontalspuren links zwischen M und N liegen, auf der oberen Hälfte der Fläche alle Geraden des zweiten Systemes, deren Horizontalspuren rechts zwischen M und N liegen; endlich ist $MP_1 /\!/ NQ_2$ und ebenso $MP_2 /\!/ NQ_1$.

Fig. 51.



Aus den Gleichungen 13) erhält man noch durch Elimination von z

$$\frac{u}{a^2} x + \frac{v}{b^2} y = \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$$

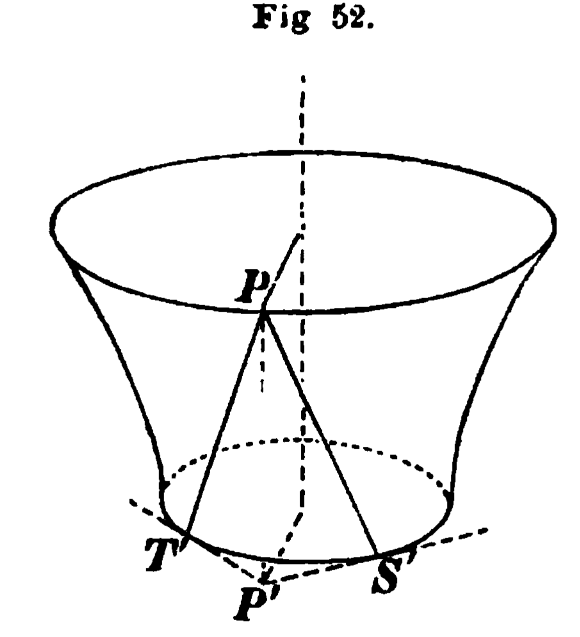
und ebenso aus Nr. 15)

$$\frac{u_1}{a^2} x + \frac{v_1}{b^2} y = 1,$$

d. h. geometrisch: die Horizontalprojektionen aller auf der Fläche liegenden Geraden berühren die Kehlellipse. Dies giebt ein ein-

faches Mittel zur Konstruktion der beiden durch einen gegebenen Punkt P der Fläche gehenden Geraden; von der Horizontalprojektion P' des Punktes aus legt man nämlich an die Kehlellipse zwei Tangenten, deren Berührungspunkte S' und T' heissen mögen; die Geraden PS' und PT' sind dann die verlangten Linien.

Fig 52.



Berührungsebenen und Normalen. Legt man durch irgend eine Gerade des einen und durch eine sie schneidende Gerade des anderen Systemes eine Ebene, so erhält man eine von den Ebenen, welche die Fläche in zwei Geraden schneiden; für die Koeffizienten ihrer Gleichung

$$16)\qquad Ax + By + Cz = D$$

gilt dann die Eigenschaft

$$17)\qquad A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 = D^2,$$

und die Koordinaten des Punktes, welcher als Durchschnitt der beiden Geraden sowohl der Ebene als der Fläche angehört, sind wie früher

$$\frac{Aa^2}{D}, \quad \frac{Bb^2}{D}, \quad -\frac{Cc^2}{D}.$$

Wir legen weiter in der Höhe $z = -\frac{Cc^2}{D}$ parallel zur xy-Ebene eine neue Ebene; sie schneidet das Hyperboloid in einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{C^2c^2}{D^2} = \frac{A^2a^2 + B^2b^2}{D^2}$$

ist, wofür wir schreiben

$$18)\qquad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,$$

$$a_1 = \frac{a\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2}}{D}, \qquad b_1 = \frac{b\sqrt{A^2a^2 + B^2b^2}}{D};$$

die nämliche Ebene schneidet ferner die durch 16) dargestellte Ebene in einer Geraden, deren Gleichung ist

$$Ax + By = D + \frac{C^2c^2}{D} = \frac{A^2a^2 + B^2b^2}{D},$$

wofür wir schreiben

$$19) \qquad A_1x + B_1y = 1,$$

$$A_1 = \frac{AD}{A^2a^2 + B^2b^2}, \quad B_1 = \frac{BD}{A^2a^2 + B^2b^2}.$$

Vermöge dieser Werte ergiebt sich

$$A_1^2a_1^2 + B_1^2b_1^2 = 1,$$

woraus folgt, dass die Gerade 19) die Ellipse 18) berührt. Auf ähnliche Weise kann man eine noch allgemeinere Eigenschaft der Ebene 16) entdecken; legt man nämlich durch den vorhin genannten Punkt irgend einen Schnitt s der Fläche, dessen Ebene von selbst die Ebene 16) in einer Geraden g schneidet, so ist letztere jedesmal Tangente an s. Demgemäss muss die betrachtete Ebene als Inbegriff aller durch den genannten Punkt gehenden Tangenten der Fläche, d. h. als die Berührungsebene in diesem Punkte angesehen werden, wie sich später noch auf anderem Wege ergeben wird.

Daran knüpft sich die Bestimmung der Berührungsebene für einen gegebenen Punkt xyz der Fläche. Bezeichnen wir die Gleichung der verlangten Ebene mit

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen dem Vorigen zufolge die Bedingungen

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 = D^2$$

und

$$x = \frac{Aa^2}{D}, \quad y = \frac{Bb^2}{D}, \quad z = -\frac{Cc^2}{D}$$

erfüllt sein. Aus den letzten Gleichungen ergeben sich die Werte von A, B, C, sie genügen der ersten Gleichung und daher ist

$$20) \qquad \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta - \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz.

Hieraus folgen noch die Gleichungen der Normalen in diesem Punkte; sie sind

$$\eta - y = \frac{a^2y}{b^2x}(\xi - x), \quad \zeta - z = -\frac{a^2z}{c^2x}(\xi - x)$$

oder, auf die beiden Vertikalebenen bezogen,

$$21) \quad \xi - x = -\frac{c^2x}{a^2z}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{c^2y}{b^2z}(\zeta - z).$$

§ 36.

Das geteilte Hyperboloid.

Gestalt der Fläche. Die Gleichung der dritten centrischen Fläche war

$$1)\qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

setzt man der Reihe nach $z=0$, $y=0$, $x=0$, so ergeben sich als Gleichungen der Spuren oder Hauptschnitte der Fläche

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad -\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

die erste dieser Gleichungen charakterisiert keine reelle Kurve, die Fläche hat demnach mit der xy-Ebene keinen Punkt gemein; die beiden anderen Gleichungen gehören zu Hyperbeln und zwar besitzt der xz-Schnitt die Hauptbalbachse c und die Nebenhalbachse a, der yz-Schnitt die nämliche Haupthalbachse und die Nebenhalbachse b. Für eine in der Entfernung h parallel zur xy-Ebene gelegte Schnittebene ist $z=h$, mithin die Gleichung des Schnittes

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$$

oder

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{c}\sqrt{h^2-c^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{b}{c}\sqrt{h^2-c^2}}\right)^2=1,$$

folglich der Schnitt im allgemeinen eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{h^2-c^2},\quad \frac{b}{c}\sqrt{h^2-c^2}.$$

Letztere sind solange imaginär als $h^2<c^2$, d. h. h zwischen $-c$ und $+c$ enthalten ist; alle zu solchen h gehörenden Ebenen schneiden mithin die Fläche nicht; für $h^2=c^2$ besteht jene Ellipse aus einem blossen Punkte, die Ebenen, für welche $z=+h$ oder $z=-h$, berühren daher die Fläche; ist aber $h^2>c^2$, so werden die Achsen der Ellipse reell und wachsen mit h gleichzeitig ins Unendliche. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei festen Hyperbeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene aus den

Halbachsen $OC = c$, $OA = CD = a$, und deren andere in der yz-Ebene aus den Halbachsen $OC = c$, $OB = CE = b$ konstruiert ist, wobei c für beide Hyperbeln als Haupthalbachse dient. Die Linien a, b, c nennt man die Halbachsen der Fläche und letztere ein **dreiachsiges geteiltes Hyperboloid.** Für $b = a$ verwandelt sich dasselbe in das geteilte Rotationshyperboloid. Erteilt man der Gleichung 1) durch Einführung der Asymptotenwinkel $COD = \alpha$ und $COE = \beta$ die Form

Fig. 53.

$$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta - z^2 = -c^2$$

und lässt nachher, ohne Änderung von α und β, c in Null übergehen, so ergiebt sich

$$x^2 \cot^2 \alpha + y^2 \cot^2 \beta - z^2 = 0;$$

das Hyperboloid degeneriert dann zu einer elliptischen Kegelfläche. Die Gleichung derselben kann auch in der Form



$$2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

dargestellt werden, aus welcher durch fast wörtlich dieselben Schlüsse wie in § 35 folgt, dass dieser elliptische Kegel der **Asymptotenkegel** des geteilten Hyperboloides ist.

Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$3) \qquad Ax + By + Cz = D$$

sein möge, schneidet die Fläche in einer Linie zweiten Grades, für deren Horizontalprojektion folgende Gleichung gilt

$$4) \qquad A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2 C_1 xy + 2 D_1 x + 2 E_1 y + F_1 = 0;$$

worin

$$A_1 = -\frac{A^2}{c^2} + \frac{C^2}{a^2}, \quad B_1 = -\frac{B^2}{c^2} + \frac{C^2}{b^2}, \quad C_1 = -\frac{AB}{c^2},$$

$$D_1 = \frac{AD}{c^2}, \quad E_1 = \frac{BD}{c^2}, \quad F_1 = -\frac{D^2}{c^2} + C^2.$$

Hieraus ergeben sich die Werte

$$C_1^2 - A_1 B_1 = \frac{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2}{a^2b^2c^2}\, C^2,$$

$$A_1 E_1^2 + B_1 D_1^2 + (C_1^2 - A_1 B_1) F_1 - 2 C_1 D_1 E_1$$

$$= \frac{A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 + D^2}{a^2b^2c^2}\, C^4,$$

mittels deren Vorzeichen die Natur des Schnittes beurteilt werden kann. Dabei sind folgende Fälle zu unterscheiden.

Wenn erstens $C_1^2 - A_1 B_1$ negativ, also

$$A^2a^2 + B^2b^2 < C^2c^2$$

und mithin A_1 positiv ist, so bedeutet die Gleichung 4) im allgemeinen eine Ellipse, deren Achsen ebensowohl reell, als $= 0$, als imaginär sein können. Das erste findet unter der Bedingung statt, dass der Ausdruck

$$\Delta = A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 + D^2$$

einen positiven Wert hat; die Mittelpunktskoordinaten der Schnittprojektion sind dann

$$\frac{ADa^2}{-D^2 + \Delta} \quad \text{und} \quad \frac{BDb^2}{-D^2 + \Delta}.$$

Für $\Delta = 0$ reduziert sich diese Ellipse auf ihren Mittelpunkt, dessen Koordinaten

$$-\frac{Aa^2}{D}, \quad -\frac{Bb^2}{D}$$

sind; endlich für negative Δ wird die Kurve imaginär.

Im zweiten Hauptfalle $C_1^2 - A_1 B_1 = 0$ oder

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2c^2$$

bedeutet die Gleichung 4) eine Parabel, solange Δ nicht verschwindet, d. h. $D \lessgtr 0$ ist. Für $D = 0$ dagegen bringt man die Gleichung durch eine ähnliche Transformation wie im vorigen Paragraphen auf die Form

$$\left(\frac{Bb}{a}\, x - \frac{Aa}{b}\, y\right)^2 = -\, C^2c^2,$$

welcher keine geometrische Bedeutung zukommt.

Im dritten Hauptfalle $C_1^2 - A_1 B_1 > 0$ oder

$$A^2a^2 + B^2b^2 > C^2c^2$$

ist die Projektion des Schnittes jederzeit eine Hyperbel, deren Mittelpunkt die Koordinaten

$$\frac{ADa^2}{-D^2+\Delta} \quad \text{und} \quad \frac{BDb^2}{-D^2+\Delta}$$

besitzt. Die Erörterungen über die Projektion des Schnittes sind leicht auf den letzteren zu übertragen, wobei zu berücksichtigen ist, dass den drei Hauptfällen $A^2a^2+B^2b^2 \lesseqgtr C^2c^2$ hier dieselbe geometrische Bedeutung wie im vorigen Paragraphen zukommt. Das Gesamtergebnis lautet dann folgendermassen: Um die Natur des Schnittes beurteilen zu können, den eine beliebige durch die Gleichung 3) ausgedrückte Ebene mit dem geteilten Hyperboloid bildet, lege man durch den Mittelpunkt der Fläche parallel zu dieser Ebene eine Hilfsebene; wenn letztere mit dem Asymptotenkegel nur den Mittelpunkt gemein hat, so ist der Schnitt im allgemeinen eine Ellipse, deren Mittelpunktskoordinaten sind

$$x_0 = -\frac{ADa^2}{D^2-\Delta}, \quad y_0 = -\frac{BDb^2}{D^2-\Delta}, \quad z_0 = \frac{CDc^2}{D^2-\Delta},$$

$$5) \qquad \Delta = A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2+D^2;$$

die Achsen dieser Ellipse sind reell für positive Δ, bei $\Delta = 0$ degeneriert die Ellipse zu einem Punkte, dessen Koordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{D}, \quad y_0 = -\frac{Bb^2}{D}, \quad z_0 = \frac{Cc^2}{D}$$

sind und in welchem die Ebene die Fläche berührt; für negative Δ hat die Ebene keinen Punkt mit dem Hyperboloid gemein. Wenn zweitens die Hilfsebene den Asymptotenkegel berührt, so ist der Schnitt eine Parabel, welche nur in dem Falle $D = 0$ zu existieren aufhört; schneidet endlich die Hilfsebene den Asymptotenkegel in zwei Geraden, so ist der Schnitt der Fläche jederzeit eine Hyperbel, deren Mittelpunktskoordinaten durch die Formeln

$$x_0 = -\frac{ADa^2}{D^2-\Delta}, \quad y_0 = -\frac{BDb^2}{D^2-\Delta}, \quad z_0 = \frac{CDc^2}{D^2-\Delta}$$

bestimmt werden. Geradlinige Schnitte der Fläche sind nicht vorhanden.

Wir untersuchen noch einige spezielle Fälle der elliptischen und hyperbolischen Schnitte.

a) Die Horizontalspur der schneidenden Ebene möge mit der x-Achse den Winkel ψ bilden, der Neigungswinkel der Schnittebene gegen die xy-Ebene sei ϑ, endlich k das Stück, welches sie von der y-Achse abschneidet. Nehmen wir die Horizontalspur der Schnittebene zur Achse der x' und den Punkt, in welchem sie der y-Achse begegnet, zum Anfangspunkte eines neuen ebenen recht winkligen Systemes, so ergiebt sich die Gleichung des Schnittes durch Substitution der Werte

$$\begin{aligned} x &= \qquad x' \cos\psi - y'.\sin\psi\cos\vartheta, \\ y &= k + x'\sin\psi + y'\cos\psi\cos\vartheta, \\ z &= \qquad\qquad y'\sin\vartheta; \end{aligned}$$

das Resultat ist von der Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + 2F' = 0$$

und darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2},$$

$$C' = \frac{(a^2 - b^2)\cos\psi\sin\psi\cos\vartheta}{a^2b^2}.$$

Diese Gleichung repräsentiert einen Kreis für $C' = 0$ und $A' = B'$. Die erste Bedingung giebt entweder $\vartheta = 90^0$ oder $\psi = 90^0$ oder $\psi = 0^0$. Setzen wir $a > b$ voraus, wodurch die Allgemeinheit der Betrachtung nicht alteriert wird, so liefert die Bedingung $A' = B'$, d. h.

$$\frac{\cos^2\psi}{a^2} + \frac{\sin^2\psi}{b^2} = \left(\frac{\sin^2\psi}{a^2} + \frac{\cos^2\psi}{b^2}\right)\cos^2\vartheta - \frac{\sin^2\vartheta}{c^2}$$

sowohl für $\vartheta = 90^0$ als für $\psi = 90^0$ unmögliche Resultate; dagegen findet sich für $\psi = 0^0$

$$6)\qquad \sin\vartheta = \frac{c\sqrt{a^2 - b^2}}{a\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}.$$

Da der Wert von $\sin\vartheta$ jederzeit reell und zugleich ein echter Bruch ist, so existieren zwei Systeme von Kreisschnitten, deren Ebenen auf der yz-Ebene senkrecht stehen und entweder unter dem Winkel ϑ oder unter $180^0 - \vartheta$ gegen die xy-Ebene geneigt sind. Aus der Übereinstimmung der Formel 6) mit Nr. 9) in § 26 und mit Nr. 6) in § 35 ergiebt sich ferner, dass alle Ebenen, welche den Asymptotenkegel in Kreisen und zugleich beide Hyperboloide schneiden, auch mit letzteren Flächen kreisförmige Schnitte

bilden Die Gleichungen der Kreisschnittebenen (oder deren yz-Spuren) haben die gemeinschaftliche Form

$$z = (y - k) \tan \vartheta,$$

d i. zufolge des Wertes von $\tan \vartheta$

$$7) \qquad c\sqrt{a^2 - b^2}\,(y - k) \pm b\sqrt{a^2 + c^2} \,.\, z = 0;$$

die Schnitte sind reell, solange

$$\Delta = c^2 \{-b^2(b^2 + c^2) + (a^2 - b^2) k^2\}$$

positiv ist, d. h. für alle der Ungleichung

$$k^2 > \frac{b^2(b^2 + c^2)}{a^2 - b^2}$$

genügenden k; wenn dagegen

$$k^2 = \frac{b^2(b^2 + c^2)}{a^2 - b^2},$$

so degenerieren die Kreisschnitte zu Punkten, deren Koordinaten sind

$$0, \quad \pm\frac{b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}}, \quad \pm\frac{c\sqrt{a^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2}},$$

wobei alle Kombinationen der Vorzeichen gelten; für

$$k^2 < \frac{b^2(b^2 + c^2)}{a^2 - b^2}$$

existieren keine Kreisschnitte mehr. Die erwähnten vier Punkte heissen die Kreispunkte des geteilten Hyperboloides; man kann sie und die Spuren der Kreisschnittebenen leicht dadurch zur Anschauung bringen, dass man die Fläche auf zwei den Ebenen xy und yz parallele Ebenen projiziert.

b) Der Schnitt des geteilten Hyperboloides mit der vorigen Ebene wird eine gleichseitige Hyperbel, wenn $A' + B' = 0$ ist. Da nun A' und B' hier ganz dieselben Werte haben, wie bei dem einfachen Hyperboloide (S. 207), so bleiben auch die Folgerungen ungeändert, d. h. alle Ebenen, welche durch den festen Punkt fgh gehen und den elliptischen Kegel

$$\frac{(x - f)^2}{a^2(b^2 - c^2)} + \frac{(y - g)^2}{b^2(a^2 - c^2)} = \frac{(z - h)^2}{c^2(a^2 + b^2)}$$

berühren, schneiden beide Hyperboloide und deren gemeinschaftlichen Asymptotenkegel in gleichseitigen Hyperbeln. Unmöglich werden diese Schnitte nur, wenn c die grösste der Halbachsen ist.

Berührungsebenen und Normalen. Bezeichnet

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D$$

die Gleichung der durch den Punkt xyz der Fläche gehenden Tangentialebene, so müssen, dem früheren zufolge, nachstehende Bedingungen erfüllt sein:

$$x = -\frac{Aa^2}{D}, \quad y = -\frac{Bb^2}{D}, \quad z = \frac{Cc^2}{D},$$

$$\varDelta = A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 + D^2 = 0.$$

Aus den ersten drei Gleichungen ergeben sich die Werte von A, B, C und diese genügen der letzten Gleichung, weil der Punkt xyz auf der Fläche liegt; demnach ist

$$8) \qquad -\frac{x}{a^2}\xi - \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = 1$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz. Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$9) \qquad \xi - x = -\frac{c^2x}{a^2z}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{c^2y}{b^2z}(\zeta - z)$$

als Gleichungen der Normalen im Punkte xyz.

§ 37.

Das elliptische Paraboloid.

Gestalt der Fläche. Die erste von den nichtcentrischen Flächen zweiten Grades wird durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

dargestellt, worin a und b wesentlich positive Grössen bezeichnen. Als Gleichungen der Hauptschnitte oder Spuren der Fläche erhalten wir der Reihe nach

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 0, \quad \frac{x^2}{2a} = z, \quad \frac{y^2}{2b} = z;$$

der ersten Gleichung genügen nur die Werte $x = 0$, $y = 0$, die Fläche wird also von der xy-Ebene nicht geschnitten, sondern im Anfangspunkte der Koordinaten berührt; die zweite Gleichung bedeutet eine Parabel, deren Halbparameter $= a$, deren Scheitel der Koordinatenanfang und deren Achse die z-Achse ist; die letzte Gleichung charakterisiert gleichfalls eine Parabel mit dem Halbparameter b, mit demselben Scheitel und der nämlichen Achse. Für einen in der Höhe $z = h$ parallel zur xy-Ebene gelegten Schnitt erhält man als Gleichung

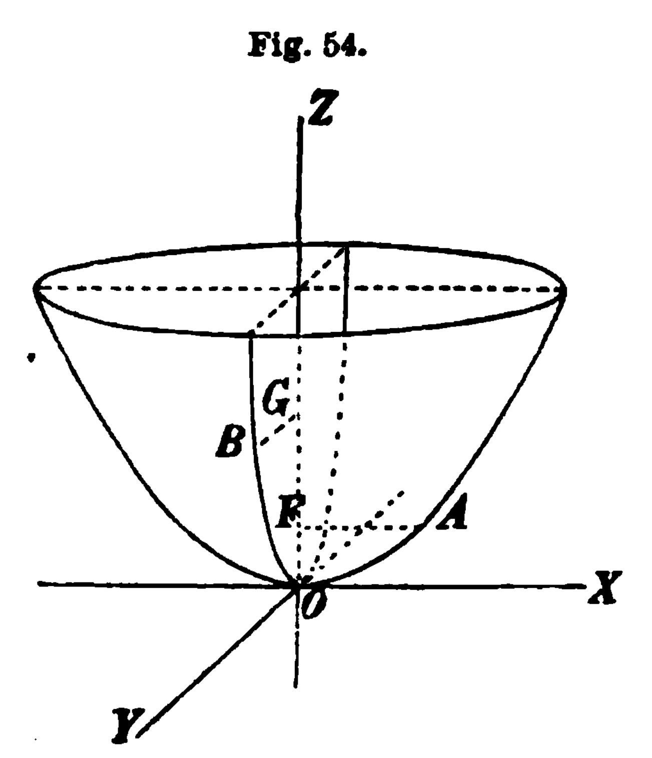
$$\frac{x^2}{2ah}+\frac{y^2}{2bh}=1;$$

der Schnitt ist bei positiven h eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\sqrt{2ah} \quad \text{und} \quad \sqrt{2bh},$$

für $h=0$ wird derselbe zu einem Punkte, für negative h imaginär. Demzufolge kann man sich die Fläche durch die Peripherie einer veränderlichen Ellipse erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei Parabeln fortrücken, deren eine in der xz-Ebene mit dem Halbparameter a und deren andere in der yz-Ebene mit dem Halbparameter b konstruiert ist, wobei für beide Parabeln die z-Achse als Achse und der Koordinatenanfang als Scheitel gilt. Die Linien $a=FA$ und $b=GB$ heissen die Halbparameter der Fläche, O ihr Scheitel und die Fläche selbst ein elliptisches Paraboloid. Für $b=a$ wird dasselbe zu einem Rotationsparaboloid, für $a=\infty$ oder $b=\infty$ zu einem parabolischen Cylinder.

Fig. 54.



Ebene Schnitte. Eine beliebige Ebene, deren Gleichung

$$2) \qquad Ax+By+Cz=D$$

heissen möge, schneidet die Fläche in einer Kurve, von welcher die Horizontalprojektion durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2\,\frac{D-Ax-By}{C}$$

bestimmt ist; erteilt man letzterer die bessere Form

$$\frac{1}{a}\left(x+\frac{Aa}{C}\right)^2+\frac{1}{b}\left(y+\frac{Bb}{C}\right)^2=\frac{A^2a+B^2b+2CD}{C^2},$$

so erkennt man in der Kurve eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{\sqrt{a(A^2a+B^2b+2CD)}}{C}, \quad \frac{\sqrt{b(A^2a+B^2b+2CD)}}{C}.$$

Hierbei unterscheiden wir die zwei Hauptfälle, ob C von Null verschieden oder $=0$ ist. Im ersten Falle sind die Hauptachsen reell und endlich, solange der Ausdruck

3) $$\Delta = A^2a + B^2b + 2CD$$

positiv bleibt, die Koordinaten des Mittelpunktes der Schnittprojektion bestimmen sich durch die Formeln

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \quad y_0 = -\frac{Bb}{C};$$

für $\Delta = 0$ verschwinden die Halbachsen der Ellipse, letztere zieht sich dann auf ihren Mittelpunkt zusammen; für negative Δ wird die Kurve imaginär. Im zweiten Hauptfalle $C = 0$, d. h. wenn die Schnittebene parallel zur z-Achse liegt, kann die Elimination von z nicht vorgenommen werden, weil dann die Gleichung der Schnittebene

4) $$Ax + By = D$$

zugleich auch die Gleichung der Schnittprojektion ist; eliminiert man in diesem Falle y, so erhält man die Gleichung der Vertikalprojektion des Schnittes, nämlich

$$\frac{x^2}{a} + \frac{(D - Ax)^2}{B^2b} = 2z$$

oder bei besserer Anordnung und unter Rücksicht auf den Umstand, dass für $C = 0$ die Grösse Δ in $A^2a + B^2b$ übergeht,

$$z - \frac{D^2}{2\Delta} = \frac{\Delta}{2B^2ab}\left(x - \frac{ADa}{\Delta}\right)^2.$$

Diese Gleichung repräsentiert eine **Parabel**, deren Scheitel durch die Koordinaten

$$\frac{ADa}{\Delta} \quad \text{und} \quad \frac{D^2}{2\Delta}$$

bestimmt wird, und deren Halbparameter

$$= \frac{B^2ab}{\Delta}$$

ist. Wenden wir diese für die Projektionen des Schnittes gegebenen Entscheidungen auf den Schnitt selber an, so gelangen wir zu folgendem Gesamtresultate: Die zur Achse des Paraboloides nicht parallele Ebene 2) schneidet die Fläche in einer Ellipse, deren Mittelpunktskoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \quad y_0 = -\frac{Bb}{C}, \quad z_0 = \frac{\Delta - CD}{C^2}$$

sind; der Schnitt ist reell für $\Delta > 0$, reduziert sich für $\Delta = 0$ auf einen durch die Koordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \quad y_0 = -\frac{Bb}{C}, \quad z_0 = -\frac{D}{C}$$

bestimmten Punkt, und wird für $\Delta < 0$ imaginär; eine zur Flächenachse parallele Ebene schneidet das Paraboloid jederzeit in einer Parabel. Hyperbolische und geradlinige Schnitte existieren nicht.

Wie bei allen elliptischen Schnitten, entsteht auch hier die Frage, ob dieselben Kreise werden können. Die Horizontalspur der schneidenden Ebene nehmen wir zur x'-Achse eines neuen in der Ebene enthaltenen rechtwinkligen Koordinatensystemes, $\angle (xx')$ sei $= \psi$, der Neigungswinkel der Ebene gegen die xy-Ebene heisse ϑ, der Durchschnitt der Ebene mit der y-Achse liege in der Entfernung k vom ursprünglichen Koordinatenanfange und sei der Anfangspunkt des neuen Systemes; die Gleichung des Schnittes erhalten wir jetzt aus Nr. 1) durch Substitution der Werte

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= y' \sin\vartheta. \end{aligned}$$

Das Resultat dieser Operation ist von der Form

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0,$$

und darin

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a} + \frac{\sin^2\psi}{b}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a} + \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta,$$

$$C' = \frac{(a-b)\sin\psi\cos\psi\cos\vartheta}{ab}.$$

Der Schnitt wird zu einem Kreise für $C' = 0$ und $A' = B'$; die erste Bedingung kann unter der nicht beschränkenden Annahme $a > b$ nur durch $\vartheta = 90^0$ oder $\psi = 90^0$ oder $\psi = 0^0$ erfüllt werden; die zweite Bedingung

$$\frac{\cos^2\psi}{a} + \frac{\sin^2\psi}{b} = \left(\frac{\sin^2\psi}{b} + \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta$$

liefert für $\vartheta = 90^0$ und für $\psi = 90^0$ unmögliche Ergebnisse, dagegen für $\psi = 0^0$

5) $$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

was, wegen $b < a$ und wegen des doppelten Vorzeichens der Wurzel, zwei reelle Bestimmungen von ϑ giebt Demnach existieren zwei Systeme von Kreisschnitten, deren Ebenen auf der yz-Ebene senkrecht stehen und mit der xy-Ebene die Winkel ϑ und $180^0 - \vartheta$

einschliessen. Die Gleichungen der Kreisschnittebenen (oder deren yz-Spuren) stehen unter der allgemeineren Form

$$z = (y - k) \tan\vartheta$$

oder zufolge des Wertes von $\tan\vartheta$

$$\pm (y - k)\sqrt{\frac{a-b}{b}} - z = 0,$$

wofür wir schreiben

$$6)\qquad \sqrt{a-b}\,.\,y \mp \sqrt{b}\,.\,z = k\sqrt{a-b}.$$

Der Kreisschnitt, den diese Ebene mit dem Paraboloid bildet, ist reell, wenn die Grösse

$$\varDelta = (a - b)\,b \mp 2k\sqrt{(a-b)\,b}$$

positiv ausfällt, also unter Benutzung des oberen Zeichens für

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b} > k > -\infty$$

und in Beziehung auf das untere Zeichen für

$$+\infty > k > -\tfrac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}.$$

Die Kreisschnitte des einen Systemes werden folglich erhalten, wenn man k von $\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$ bis $-\infty$ abnehmen lässt, die des anderen, wenn k von $-\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$ bis $+\infty$ wächst. Der Schnitt degeneriert zu einem Punkte, wenn $\varDelta = 0$ also bei dem ersten Systeme $k = \frac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$, beim zweiten $k = -\frac{1}{2}\sqrt{(a-b)\,b}$ ist; die Koordinaten dieser Punkte sind im ersten Falle

$$0, \quad +\sqrt{(a-b)\,b}, \quad \tfrac{1}{2}(a-b),$$

und im zweiten

$$0, \quad -\sqrt{(a-b)\,b}, \quad \tfrac{1}{2}(a-b);$$

dies sind die zwei Kreispunkte der Fläche. Jenseit der angegebenen Grenzen, d. h. für negative $\varDelta$, existieren keine Kreisschnitte. Diese Ergebnisse können leicht graphisch veranschaulicht werden, wenn man das Paraboloid auf zwei Ebenen projiziert, von denen die eine der xy-Ebene und die andere der yz-Ebene parallel liegt.

Berührungsebenen und Normalen. Wenn irgend ein elliptischer Schnitt sich auf seinen Mittelpunkt reduziert, so wird die schneidende Ebene zur Berührungsebene und jener Punkt zum Berührungspunkte; daraus entspringt wie früher die Aufgabe, durch einen gegebenen Punkt xyz des Paraboloides eine Tangentialebene an das letztere zu legen. Die Gleichung der verlangten Ebene sei

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen die im vorigen bewiesenen Relationen

$$\Delta = A^2a + B^2b + 2CD = 0,$$
$$x = -\frac{Aa}{C}, \quad y = -\frac{Bb}{C}, \quad z = -\frac{D}{C}$$

stattfinden; aus den letzten drei Gleichungen ergeben sich die Werte von A, B, D, ausgedrückt durch C, deren Substitution in die erste Bedingung diese identisch macht, weil der Punkt xyz auf der Fläche liegt. Vermöge der Werte von A, B, D findet sich

$$-\frac{x}{a}\xi + \frac{y}{b}\eta + \zeta = -z$$

oder besser

$$7) \qquad \frac{x}{az}\xi + \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1,$$

als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz.

Hieraus zieht man noch die beiden Gleichungen

$$8) \qquad \xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{y}{b}(\zeta - z),$$

welche für die im Punkte xyz errichtete Normale gelten.

§ 38.
Das hyperbolische Paraboloid.

Gestalt der Fläche. Die letzte individuelle Fläche zweiten Grades, deren Untersuchung uns noch obliegt, wird durch die Gleichung

$$1) \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisiert; daraus folgen als Gleichungen der Hauptschnitte

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0, \quad \frac{x^2}{2a} = z, \quad -\frac{y^2}{2b} = z.$$

Giebt man der ersten die Form

$$y = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}\,x$$

und bezeichnet mit α den spitzen Winkel, dessen Tangente $= \sqrt{\frac{b}{a}}$ ist, so erkennt man in der xy-Spur der Fläche ein System von zwei durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden, deren eine mit der x-Achse den Winkel α und deren andere mit derselben Achse den Winkel $180^0 - \alpha$ einschliesst. Die xz-Spur der Fläche bildet eine Parabel mit dem Halbparameter a, der Koordinaten-

anfang ist ihr Scheitel und der positive Teil der z-Achse ihre Achse; die yz-Spur besteht gleichfalls aus einer Parabel, welche b zum Halbparameter, den Koordinatenanfang zum Scheitel und den negativen Teil der z-Achse zur Achse hat, weil der betreffenden Gleichung nur bei negativen z eine geometrische Bedeutung zukommt. Legt man ferner in der Höhe h eine zur xy-Ebene parallele Ebene, so schneidet letztere die Fläche in der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2h$$

bestimmten Kurve; der Schnitt ist jedenfalls eine Hyperbel, wobei aber die beiden Fälle eines positiven und negativen h zu unterscheiden sind. Für $h > 0$ giebt man der Gleichung die Form

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2ah}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{2bh}}\right)^2 = 1,$$

die Halbachsen sind dann $\sqrt{2ah}$, $\sqrt{2bh}$ und für den Asymptotenwinkel β hat man

$$\tan\beta = \frac{\sqrt{2bh}}{\sqrt{2ah}} = \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ mithin } \beta = \alpha,$$

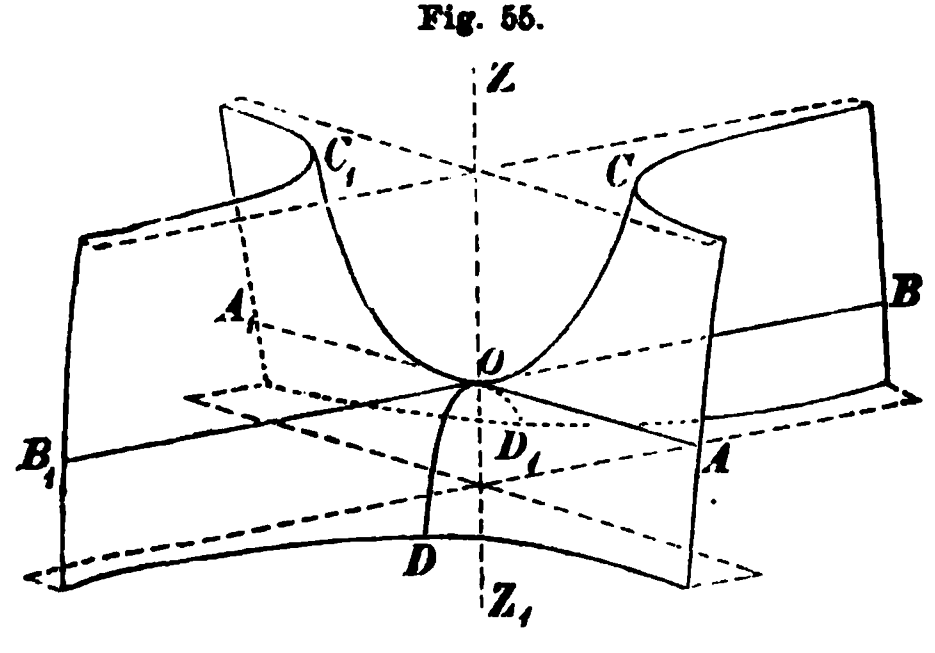
im zweiten Falle $h = -h_1$ ist zu schreiben

$$\left(\frac{y}{\sqrt{2bh_1}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2ah_1}}\right)^2 = 1,$$

es wird dann $\sqrt{2bh_1}$ zur Haupt-, $\sqrt{2ah_1}$ zur Nebenhalbachse und für den Asymptotenwinkel β_1 hat man

$$\tan\beta_1 = \frac{\sqrt{2ah_1}}{\sqrt{2bh_1}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, \text{ mithin } \beta_1 = 90^0 - \alpha.$$

Fig. 55.



Demgemäss kann man sich die Fläche durch eine veränderliche Hyperbel erzeugt denken, wenn letztere parallel zur xy-Ebene verschoben wird und ihre Scheitel auf zwei festen Parabeln fortrücken; der gemeinschaftliche Scheitel beider Parabeln ist der Koordinatenanfang, die eine liegt in der xz-Ebene und hat ihre Achse in der Richtung der positiven

z, die andere befindet sich in der yz-Ebene und erstreckt ihre Achse in der Richtung der negativen z; endlich ist noch zu bemerken, dass alle auf der positiven Seite der z konstruierten Hyperbeln denselben Asymptotenwinkel besitzen und dass ebenso alle auf der entgegengesetzten Seite befindlichen Hyperbeln einen gemeinschaftlichen Asymptotenwinkel haben, welcher den erstgenannten zu 90^0 ergänzt. Die Figur zeigt die aus den Geraden AOA_1 und BOB_1 bestehende Horizontalspur der Fläche, die beiden parabolischen Vertikalspuren COC_1, DOD_1 und zwei zur xy-Ebene parallele hyperbolische Schnitte, deren Asymptoten den Geraden AA_1 und BB_1 parallel liegen; die Koordinatenachsen der x und der y sind (um einer Überladung der Figur zu entgehen) weggelassen, man hat sich dieselben als die Halbierungslinien der Winkel AOB und AOB_1 zu denken. Die hiermit bestimmte sattelförmige Fläche heisst ein hyperbolisches Paraboloid, a und b ihre Halbparameter, O ihr Scheitel, ZZ_1 ihre Achse.

Ebene Schnitte. Eine beliebige durch die Gleichung

$$2) \qquad Ax + By + Cz = D$$

dargestellte Ebene schneidet die Fläche in einer Kurve, für deren Horizontalprojektion sich die Gleichung findet

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2\,\frac{D - Ax - By}{C};$$

erteilt man dieser die bessere Form

$$\frac{1}{a}\left(x + \frac{Aa}{C}\right)^2 - \frac{1}{b}\left(y - \frac{Bb}{C}\right)^2 = \frac{A^2a - B^2b + 2CD}{C^2},$$

so bemerkt man augenblicklich, dass die Schnittprojektion im allgemeinen eine Hyperbel darstellt; doch sind dabei die Fälle $C \gtrless 0$ und $C = 0$ zu unterscheiden. Wenn erstens C nicht verschwindet und der Ausdruck

$$3) \qquad \varDelta = A^2a - B^2b + 2CD$$

irgend einen von Null verschiedenen Wert besitzt, so ist die Kurve sicher eine Hyperbel, deren Mittelpunktskoordinaten

$$x_0 = -\frac{Aa}{C}, \quad y_0 = +\frac{Bb}{C}$$

sind; ihre Haupthalbachse liegt bei positiven $\varDelta$ in der Richtung der x, bei negativen in der Richtung der y. Verschwindet aber

$\varDelta$, so degeneriert die Hyperbel in ein System von zwei sich schneidenden Geraden (die Aymptoten); die Koordinaten des Durchschnittes der letzteren sind dieselben x_0 und y_0 wie vorhin. Wenn zweitens C verschwindet, so kann z aus der Gleichung 1) und aus der Gleichung der Schnittebene

$$4) \qquad Ax + By = D$$

nicht eliminiert werden; durch Elimination von y erhält man in diesem Falle als Gleichung der Vertikalprojektion des Schnittes

$$\frac{x^2}{a} - \frac{(D - Ax)^2}{B^2 b} = 2z$$

oder bei besserer Anordnung und unter Rücksicht auf den Umstand, dass $\varDelta$ für $C = 0$ in $A^2 a - B^2 b$ übergeht:

$$z - \frac{D^2}{2\varDelta} = - \frac{\varDelta}{2B^2 ab}\left(x - \frac{ADa}{\varDelta}\right)^2.$$

Diese Gleichung repräsentiert eine Parabel, so lange $\varDelta$ nicht verschwindet; dagegen für $\varDelta = 0$ ergiebt sich aus der vorhergehenden Form der Gleichung

$$z = \frac{ADa}{B^2 b} x - \frac{Da^2}{2B^2 b},$$

d. h. die Gleichung einer Geraden. Der Fall $\varDelta = 0$ tritt ein, für $A^2 a = B^2 b$ oder

$$\frac{A}{B} = \pm \sqrt{\frac{b}{a}},$$

d. h. wenn die Ebene 4) parallel zu einer von den Geraden liegt, welche die Horizontalspur der Fläche bilden. Übertragen wir nun diese für die Projektionen des Schnittes gegebenen Entscheidungen auf den Schnitt selber, so gelangen wir zu folgendem Gesamtresultat: Die zur Achse der Fläche nicht parallele Ebene 2) schneidet die Fläche in einer Hyperbel, deren Mittelpunktskoordinaten

$$x_0 = - \frac{Aa}{C}, \quad y_0 = + \frac{Ba}{C}, \quad z_0 = \frac{\varDelta - CD}{C^2}$$

sind, für $\varDelta = 0$ degeneriert dieselbe in ein System von zwei Geraden, die sich im Punkte

$$x_0 = - \frac{Aa}{C}, \quad y_0 = + \frac{Bb}{C}, \quad z_0 = - \frac{D}{C}$$

schneiden. Eine zur Flächenachse parallele (vertikale) Ebene schneidet das Paraboloid in einer Parabel, welche zu einer Geraden wird, wenn die Schnittebene eine parallele Lage zu der

einen oder anderen von den Geraden erhält, die zusammen die Horizontalspur der Fläche ausmachen. Elliptische Schnitte des hyperbolischen Paraboloides sind nicht vorhanden.

Zwei spezielle Fälle der hyperbolischen Schnitte wollen wir noch genauer untersuchen.

a) Die Horizontalspur der schneidenden Ebene sei die Achse der x', ferner $\angle(xx') = \psi$, der Neigungswinkel der Schnittebene gegen die xy-Ebene heisse ϑ, endlich sei k der Abschnitt, welchen die Ebene auf der y-Achse bildet, und der Endpunkt von k der Anfang des neuen rechtwinkligen Systemes der x' und y'; wie gewöhnlich gelten dann die Formeln

$$\begin{aligned} x &= \phantom{k + {}} x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta, \\ y &= k + x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta, \\ z &= \phantom{k + x' \sin\psi + {}} y' \sin\vartheta. \end{aligned}$$

Durch Substitution derselben in Nr. 1) erhält man als Gleichung der Schnittkurve

$$A'x'^2 + B'y'^2 + 2C'x'y' + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

und zwar ist

$$A' = \frac{\cos^2\psi}{a} - \frac{\sin^2\psi}{b}, \quad B' = \left(\frac{\sin^2\psi}{a} - \frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta.$$

Soll der Schnitt eine g l e i c h s e i t i g e H y p e r b e l darstellen, so muss $A' + B' = 0$ sein und daraus folgt

$$5) \qquad \cos^2\vartheta = \frac{b - a\tan^2\psi}{a - b\tan^2\psi} = \tan(\alpha + \psi)\tan(\alpha - \psi).$$

Andererseits kann man die Gleichung der Schnittebene in der Form 2) oder auch unter der Form

$$6) \qquad A(x - f) + B(y - g) + C(z - h) = 0$$

darstellen, womit gesagt ist, dass dieselbe durch den festen Punkt fgh gehen soll; man hat dann

$$\cos^2\vartheta = \frac{C^2}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \tan^2\psi = \frac{A^2}{B^2},$$

und durch Substitution dieser Werte erhält man aus Nr. 5)

$$A^2a - B^2b = C^2(b - a)$$

als Bedingungsgleichung für die Koeffizienten der Gleichung 6). Diese ist, wie man leicht findet, zugleich die Bedingung dafür, dass die Ebene 6) den elliptischen Kegel

$$7) \qquad \frac{(x-f)^2}{a} - \frac{(y-g)^2}{b} + \frac{(z-h)^2}{a-b} = 0$$

berührt, dessen Achse sich in der Richtung der x oder der y erstreckt, jenachdem $a < b$ oder $a > b$ ist. Durch einen festen Punkt können also unendlich viele Ebenen gelegt werden, welche das hyperbolische Paraboloid in gleichseitigen Hyperbeln schneiden; alle jene Ebenen berühren zugleich den durch Nr. 7) charakterisierten elliptischen Kegel.

b) Die Eigentümlichkeit, dass die Fläche in geraden Linien geschnitten werden kann, oder mit anderen Worten, dass sich auf der Fläche Gerade ziehen lassen, möge noch einer besonderen direkten Erörterung unterworfen werden. Wenn eine durch die Gleichungen

$$8) \qquad x = Mz + u, \qquad y = Nz + v$$

charakterisierte Gerade ganz in der Fläche enthalten sein soll, so müssen alle den vorstehenden Gleichungen genügenden x, y, z auch die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - 2z = 0$$

befriedigen und demnach muss für alle z

$$\frac{(Mz+u)^2}{a} - \frac{(Nz+v)^2}{b} - 2z = 0$$

oder

$$\left(\frac{M^2}{a} - \frac{N^2}{b}\right) z^2 + 2\left(\frac{Mu}{a} - \frac{Nv}{b} - 1\right) z + \frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{b} = 0$$

sein. Dies ist nur möglich unter den Bedingungen

$$\frac{u^2}{a} - \frac{v^2}{b} = 0,$$

$$\frac{Mu}{a} - \frac{Nv}{b} - 1 = 0, \qquad \frac{M^2}{a} - \frac{N^2}{b} = 0;$$

durch die erste derselben wird ausgedrückt, dass die fragliche Linie eine von den beiden Geraden schneiden muss, welche die Horizontalspur der Fläche bilden, was vorauszusehen war. Substituieren wir die sich ergebenden Werte

$$v = u\sqrt{\frac{b}{a}} \quad \text{oder} \quad v = -u\sqrt{\frac{b}{a}}$$

in die beiden übrigen Bedingungsgleichungen, so erhalten wir entweder

$$M = \frac{a}{2u}, \qquad N = -\frac{\sqrt{ab}}{2u},$$

oder

$$M = \frac{a}{2u}, \quad N = +\frac{\sqrt{ab}}{2u}.$$

Wegen des willkürlich bleibenden u existieren demnach zwei verschiedene Systeme von Geraden auf der Fläche; die Gleichungen der Geraden des einen Systemes stehen unter der Form

$$9) \qquad x = \frac{a}{2u} z + u, \quad y = -\frac{\sqrt{ab}}{2u} z + u\sqrt{\frac{b}{a}},$$

die des anderen Systemes dagegen unter der Form

$$10) \qquad x = \frac{a}{2u} z + u, \quad y = +\frac{\sqrt{ab}}{2u} z - u\sqrt{\frac{b}{a}}$$

oder auch, wenn man zur besseren Unterscheidung u_1 für u setzt:

$$11) \qquad x = \frac{a}{2u_1} z + u_1, \quad y = +\frac{\sqrt{ab}}{2u_1} z - u_1\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Aus den Gleichungen 9) und 11) leitet man ohne Mühe den bemerkenswerten Satz ab, dass jede Gerade des einen Systemes alle Geraden des anderen Systemes schneidet, und dass keine Gerade des einen Systemes einer Geraden des anderen Systemes parallel ist. Die Gleichungen 9) geben ferner durch Elimination von z

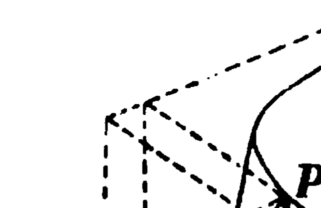
$$y = -\sqrt{\frac{b}{a}}\,(x - 2u)$$

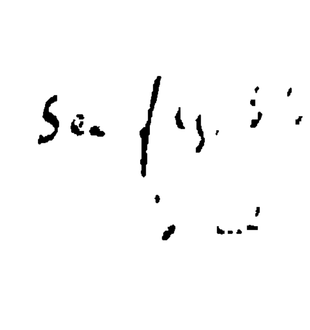
und die Gleichungen 11)

$$y = +\sqrt{\frac{b}{a}}\,(x - 2u_1);$$

dies heisst geometrisch: die Horizontalprojektionen der Geraden des einen Systemes sind parallel zu der einen von den beiden Geraden, welche die Horizontalspur der Fläche bilden; in gleicher Weise liegen die Horizontalprojektionen der Geraden des anderen Systemes parallel zur anderen jener Geraden. Will man demnach durch irgend einen Punkt P der Fläche die zwei in P sich schneidenden Geraden der Fläche ziehen, so braucht man nur durch P zwei vertikale Ebenen zu legen, deren Horizontalspuren parallel zu AB und A_1B_1 sind; diese Ebenen schneiden das hyperbolische Paraboloid in den beiden verlangten Geraden (in der Figur PS' und PT').

Fig. 56.





Zu demselben Resultate gelangt man durch eine Transformation der Gleichung 1). Wählt man nämlich die Geraden OA, OB, OZ zu Koordinatenachsen eines neuen Systemes der x', y', z', so geschieht der Übergang zu demselben mittels der Formeln

$$x = (x' + y') \cos\alpha, \quad y = (x' - y') \sin\alpha, \quad z = z',$$

und die Gleichung 1) verwandelt sich hierbei in

$$\frac{(x' + y')^2 \cos^2\alpha}{a} - \frac{(x' - y')^2 \sin^2\alpha}{b} = z.$$

Vermöge der Werte von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, welche aus der Formel

$$\tan\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

leicht herzuleiten sind, verschwinden die Koeffizienten von x'^2 und y'^2, so dass nur übrig bleibt

$$\frac{2x'y'}{a+b} = z'$$

oder, wenn das arithmetische Mittel zwischen den Halbparametern mit c bezeichnet wird,

12) $$x'y' = cz'.$$

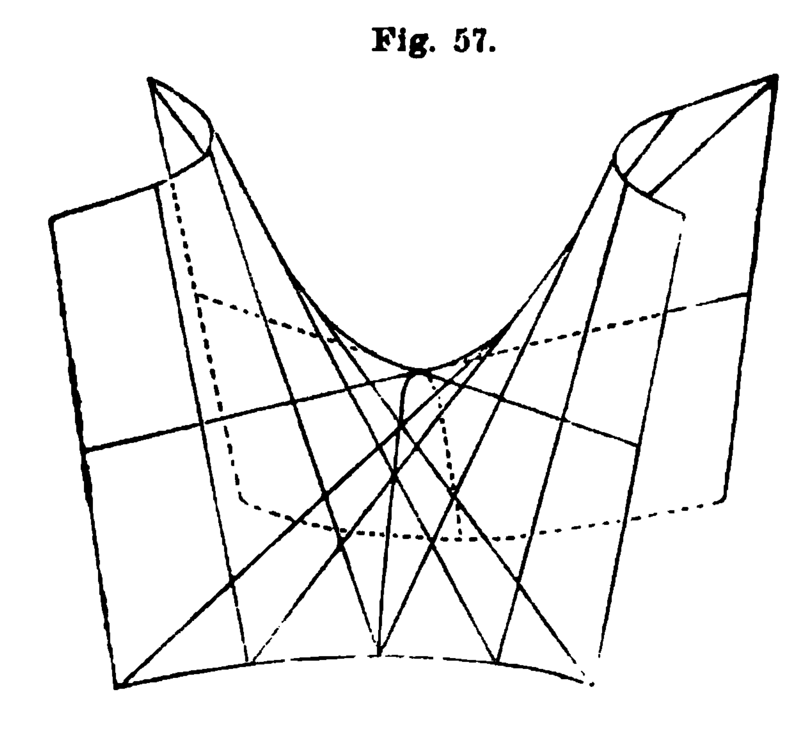


Fig. 57.

Giebt man entweder dem y' oder dem x' einen konstanten Wert, so erhält man jedesmal die Gleichung einer Geraden, was geometrisch bedeutet, dass die Fläche von jeder Ebene geradlinig geschnitten wird, welche einer der Koordinatenebenen AOZ und BOZ parallel liegt. Die Figur zeigt eine Partie derartiger Schnitte.

Berührungsebenen und Normalen. Eine Ebene, welche zwei durch einen Punkt gehende Gerade der Fläche enthält, ist eine von den Ebenen, deren Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D$$

der Bedingung

$$A^2a - B^2b + 2CD = 0$$

genügen, wobei die Koordinaten jenes Punktes durch

$$-\frac{Aa}{C}, \quad +\frac{Bb}{C}, \quad -\frac{D}{C}$$

ausgedrückt werden können. Legt man ferner eine Ebene in der Entfernung $-\frac{D}{C}$ parallel zur xy-Ebene, so schneidet sie die Fläche in einer durch die Gleichung

$$13) \qquad \frac{y^2}{b_1^2} - \frac{x^2}{a_1^2} = 1, \quad b_1 = \sqrt{\frac{2bD}{C}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{2aD}{C}}$$

repräsentierten Hyperbel und die vorige Ebene in einer Geraden, deren Gleichung ist

$$Ax + By - D = D$$

oder

$$14) \qquad B_1 y + A_1 x = 1, \quad B_1 = \frac{B}{2D}, \quad A_1 = \frac{A}{2D};$$

vermöge dieser Werte ergiebt sich

$$B_1^2 b_1^2 - A_1^2 a_1^2 = 1,$$

und diese Relation lässt erkennen, dass die Gerade 14) den hyperbolischen Querschnitt 13) berührt. Auf ähnliche Weise kann man eine noch allgemeinere Eigenschaft der Ebene finden, welche zwei Gerade der Fläche enthält; legt man nämlich durch denselben Punkt wie vorhin einen beliebigen Schnitt s der Fläche, dessen Ebene von selbst die genannte Ebene in einer Geraden g schneidet, so ist letztere jedesmal Tangente an s. Demgemäss muss die Ebene zweier in P zusammentreffender Geraden der Fläche als Inbegriff aller durch P gehenden Tangenten der Fläche, d. h. als **Berührungsebene** in diesem Punkte gelten.

Daran knüpft sich die Bestimmung der Berührungsebene für einen gegebenen Punkt xyz der Fläche. Bezeichnen wir die Gleichung der verlangten Ebene mit

$$A\xi + B\eta + C\zeta = D,$$

so müssen, dem Vorigen zufolge die Bedingungen

$$A^2 a - B^2 b + 2CD = 0,$$

$$x = -\frac{Aa}{C}, \quad y = +\frac{Bb}{C}, \quad z = -\frac{D}{C}$$

erfüllt sein. Die letzten drei Gleichungen geben A, B, D durch C ausgedrückt und diese Werte genügen der ersten Bedingung vermöge des Umstandes, dass der Punkt xyz auf der Fläche liegt. Demnach erhalten wir als Gleichung der **Tangentialebene**

$$-\frac{x}{a}\xi + \frac{y}{b}\eta + \zeta = -z$$

oder

15)
$$\frac{x}{az}\xi - \frac{y}{bz}\eta - \frac{1}{z}\zeta = 1.$$

Daraus folgen noch die beiden Gleichungen

16)
$$\xi - x = -\frac{x}{a}(\zeta - z), \qquad \eta - y = +\frac{y}{b}(\zeta - z),$$

welche für die im Punkte xyz errichtete Normale gelten.

§ 39.

Unterscheidungszeichen für die Flächen zweiten Grades.

Nachdem wir die Gestalten der verschiedenen Flächen zweiten Grades näher kennen gelernt haben, kehren wir zu der allgemeinen Gleichung

1)
$$\begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy \\ \quad + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0 \end{cases}$$

zurück, um die Mittel zu erörtern, wodurch man rasch entscheiden kann, welche individuelle Fläche zweiten Grades in jedem speziellen Falle (d. h. bei gegebenen Werten von A, $B, \ldots K$) durch die vorige Gleichung charakterisiert wird. Diese Mittel sind zwar in den vier §§ 30 bis 33 vollständig enthalten und man würde in der That durch Ausführung aller dort angedeuteten Rechnungen auf eine der fünf in Nr. 54) und 55) in § 33 aufgestellten Normalformen kommen, wodurch sich die Lage und Grösse der Achsen oder Parameter und die Natur der Fläche unmittelbar ergeben; dagegen ist aber nicht zu leugnen, dass dieser Kalkul fast immer, und namentlich wenn die Gleichung 1) auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem bezogen ist, nicht geringe Weitläufigkeiten verursacht. Um diesen zu entgehen, vereinfachen wir die Untersuchung dadurch, dass wir auf die Angabe der Lage und Grösse der Achsen oder Parameter verzichten und nur eine kurze Entscheidung über die Natur der Fläche verlangen. Zufolge der bereits bekannten Eigenschaften der einzelnen Flächen zweiten Grades lässt sich eine solche Diskussion auf folgende schematische Zusammenstellung gründen; eine Fläche zweiten Grades kann sein:

I. Eine centrische Fläche.

1. eine geschlossene Fläche:
   das Ellipsoid,
2. eine nicht geschlossene Fläche und zwar:
   a) eine geradlinige Fläche:
      das einfache Hyperboloid,
      der elliptische Kegel,
      der elliptische Cylinder,
      der hyperbolische Cylinder,
   b) eine nicht geradlinige Fläche:
      das geteilte Hyperboloid.

II. Eine nichtcentrische Fläche.

a) eine geradlinige Fläche:
   das hyperbolische Paraboloid,
   der parabolische Cylinder,
b) eine nicht geradlinige Fläche:
   das elliptische Paraboloid.

Demgemäss hat man erstens zu untersuchen, ob sich ein Punkt finden lässt, welcher die durch ihn gehenden Sehnen der Fläche halbiert; die Existenz oder Nichtexistenz desselben entscheidet, ob die Fläche zur Klasse I oder zur Klasse II gehört. Findet das erste statt, so kann immer leicht ermittelt werden, ob ohne Ausnahme jede durch den Mittelpunkt gelegte Gerade die Fläche zweimal in endlichen Entfernungen schneidet oder nicht; im ersten Falle ist die Fläche ein Ellipsoid, im zweiten Falle gehört sie zur Unterabteilung 2. Um hier weiter zu trennen, untersucht man, ob es gerade Linien giebt, von denen jeder Punkt auf der Fläche liegt; das Vorhandensein derartiger Geraden zeigt, dass die Fläche zur Abteilung *a* gehört; sind die Geraden parallel, so ist die Fläche ein Cylinder, über dessen Natur irgend ein Querschnitt Auskunft giebt, vereinigen sich die Geraden in einem Punkte, so ist die Fläche ein elliptischer Kegel, findet keine dieser Lagen statt, so ist die Fläche ein einfaches Hyperboloid; das Nichtvorhandensein jener Geraden beweist, dass die Fläche ein geteiltes Hyperboloid ist. Wenn ferner die Fläche keinen Mittelpunkt besitzt, so bedarf es nur der Untersuchung, ob gerade Linien auf ihr gezogen werden können oder nicht; im ersten Falle sind die-

selben entweder parallel, und dann ist die Fläche ein parabolischer Cylinder, oder nicht parallel, mithin die Fläche ein hyperbolisches Paraboloid; wenn dagegen keine Geraden auf der Fläche liegen, so ist letztere ein elliptisches Paraboloid.

Wie man diese Untersuchung auszuführen hat, wollen wir erst im allgemeinen und dann an einigen Gleichungen zeigen. — Verschieben wir den Anfangspunkt der Koordinaten nach einem Punkte, dessen primitive Koordinaten u, v, w sind, so haben wir in der Gleichung 1)

$$x = x' + u, \quad y = y' + v, \quad z = z' + w$$

zu setzen und erhalten dann

$$2)\quad \begin{cases} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dy'z' + 2Ez'x' + 2Fx'y' \\ \quad + 2(Au + Fv + Ew + G)x' \\ \quad + 2(Fu + Bv + Dw + H)y' \\ \quad + 2(Eu + Dv + Cw + J)z' \\ + Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Dvw + 2Ewu + 2Fuv \\ \quad + 2Gu + 2Hv + 2Jw + K = 0. \end{cases}$$

Die vor der Hand noch beliebigen Grössen u, v, w bestimmen wir so, dass sie den drei Gleichungen

$$3)\quad \begin{cases} Au + Fv + Ew + G = 0, \\ Fu + Bv + Dw + H = 0, \\ Eu + Dv + Cw + J = 0 \end{cases}$$

genügen, woraus für u, v, w die Werte folgen

$$4)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{G(D^2 - BC) + H(CF - DE) + J(BE - FD)}{AD^2 + BE^2 + CF^2 - ABC - 2DEF}, \\ v = -\dfrac{G(CF - DE) + H(E^2 - CA) + J(AD - EF)}{AD^2 + BE^2 + CF^2 - ABC - 2DEF}, \\ w = -\dfrac{G(BE - FD) + H(AD - EF) + J(F^2 - AB)}{AD^2 + BE^2 + CF^2 - ABC - 2DEF}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung 2) fallen jetzt die mit x', y', z' multiplizierten Glieder weg, und auch der von x', y', z' freie Teil $Au^2 + Bv^2 +$ etc., den wir kurz Σ nennen wollen, gestattet noch eine Vereinfachung. Es ist nämlich identisch

$$\begin{aligned} \Sigma = {} & (Au + Fv + Ew + G)u \\ & + (Fu + Bv + Dw + H)v \\ & + (Eu + Dv + Cw + J)w \\ & + Gu + Hv + Jw + K, \end{aligned}$$

d. i. wegen der Gleichungen 3)

$$\Sigma = Gu + Hv + Jw + K;$$

substituiert man hier die Werte von u, v, w, bezeichnet deren gemeinschaftlichen Nenner mit

$$5)\qquad \Delta = AD^2 + BE^2 + CF^2 - ABC - 2DEF$$

und setzt zur Abkürzung

$$6)\ \Gamma = G^2(D^2 - BC) + H^2(E^2 - CA) + J^2(F^2 - AB) \\ + 2HJ(AD - EF) + 2JG(BE - FD) + 2GH(CF - DE) \\ - K\Delta,$$

so erhält man

$$\Sigma = -\frac{\Gamma}{\Delta}.$$

In Beziehung auf das neue Koordinatensystem ist also die Gleichung der Fläche:

$$7)\quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dy'z' + 2Ez'x' + 2Fx'y' = \frac{\Gamma}{\Delta}.$$

Die Möglichkeit der soeben ausgeführten Transformation beruht übrigens auf der Voraussetzung, dass Δ von Null verschieden ist, denn nur in diesem Falle erhalten u, v, w bestimmte endliche Werte. Für $\Delta = 0$ dagegen werden u, v, w entweder unendlich oder, falls auch die Zähler verschwinden, $= \frac{0}{0}$ d. h. unbestimmt, und dann muss jene Transformation unterbleiben.

Wir gehen nun an die Untersuchung der einzelnen möglichen Fälle.

I. Erster Hauptfall: $\Delta \gtrless 0$. Legen wir durch den neuen Anfangspunkt eine Gerade, deren Gleichungen

$$8)\qquad x' = \alpha z', \quad y' = \beta z'$$

sein mögen, so finden wir die Koordinaten ihres Durchschnittes mit der Fläche durch Verbindung der Gleichungen 7) und 8), und zwar ergeben sich, wenn zur Abkürzung

$$9)\qquad \Omega = A\alpha^2 + B\beta^2 + C + 2D\beta + 2E\alpha + 2F\alpha\beta$$

gesetzt wird, für jene Koordinaten die Werte

$$10)\quad x' = \pm\alpha\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}}, \quad y' = \pm\beta\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}}, \quad z' = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}}.$$

Aus den doppelten Vorzeichen von x', y', z' erkennt man, dass die Gerade und die Fläche sich im allgemeinen zweimal schneiden, und dass die Entfernungen der Durchschnittspunkte vom neuen Ko-

ordinatenanfange gleich gross und entgegengesetzten Vorzeichens sind. Der neue Koordinatenanfang, d. h. der primitive Punkt uvw ist folglich der **Mittelpunkt** der Fläche, und der Hauptfall $\varDelta \gtrless 0$ umfasst demnach alle centrischen Flächen.

Denkt man sich in den Gleichungen 8), 9) und 10) die Koeffizienten α und β als veränderlich, so erhält die durch den Mittelpunkt gehende Gerade alle möglichen verschiedenen Lagen, und es muss nun entschieden werden, ob sie die Fläche unter allen Umständen schneidet oder nicht. Die fraglichen Durchschnitte sind aber reell, solange $\frac{\Gamma}{\varDelta \Omega}$ nicht negativ wird, und da jetzt Ω eine veränderliche Grösse ist, so bedarf es einer Untersuchung über das Vorzeichen von Ω. Hierbei sind nur zwei Fälle möglich: entweder behält Ω für alle α und β das nämliche Zeichen, oder es wechselt dasselbe in der Weise, dass Ω für gewisse α und β positiv, für andere α und β negativ ist. Nach einem bekannten Satze* findet das erste statt, wenn gleichzeitig

---

* Derselbe ergiebt sich u. a. aus folgender geometrischer Betrachtung. Sind ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes, so charakterisiert die Gleichung
$$A\xi^2 + B\eta^2 + C + 2D\eta + 2E\xi + 2F\xi\eta = \zeta$$
eine Fläche zweiten Grades, welche keinen Mittelpunkt besitzt, weil ζ nur in der ersten Potenz vorkommt. Diese Fläche kann entweder ganz auf der einen Seite der $\xi\eta$-Ebene liegen oder letztere schneiden; im ersten Falle behält ζ für alle ξ und η das nämliche Vorzeichen, im zweiten Falle giebt es sowohl positive als negative ζ. Soll nun das erste stattfinden, so muss die $\xi\eta$-Spur der Fläche imaginär, mithin die Gleichung
$$A\xi^2 + B\eta^2 + C + 2D\eta + 2E\xi + 2F\xi\eta = 0$$
so beschaffen sein, dass sie durch reelle ξ und η unerfüllbar ist. Man erhält nun aus vorstehender Gleichung
$$A\xi = -(E + E\eta) \pm \sqrt{(E + F\eta)^2 - A(C + 2D\eta + B\eta^2)},$$
wobei man dem Radikanden folgende Form geben kann:
$$(F^2 - AB)\left\{\left(\eta + \frac{EF - AD}{F^2 - AB}\right)^2 + \frac{(F^2 - AB)(E^2 - CA) - (EF - AD)^2}{(F^2 - AB^2)}\right\}.$$
Dieser Ausdruck bleibt für jedes η negativ, wenn der Faktor $F^2 - AB$ negativ und der Parentheseninhalt positiv ausfällt, was letzteres unter der Bedingung
$$(F^2 - AB)(E^2 - CA) - (EF - AD)^2 > 0$$
der Fall ist. Finden beide Umstände statt, so entspricht jedem reellen η ein imaginäres ξ; die Fläche schneidet dann die Ebene $\xi\eta$ nicht, und ζ behält stets das nämliche Vorzeichen. Dieses Resultat stimmt mit der obigen Angabe überein, wenn man ξ, η, ζ durch α, β, Ω ersetzt.

$$F^2 - AB \text{ negativ}$$

und

$$(F^2 - AB)(E^2 - CA) - (EF - AD)^2 \text{ positiv}$$

ist, wobei bemerkt werden möge, dass die zweite Bedingung auf $-A\varDelta > 0$ hinauskommt. Denken wir uns künftig A immer als positiv, wodurch die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beschränkt wird, so sind

$$11) \qquad F^2 - AB < 0 \text{ und zugleich } \varDelta < 0$$

die Bedingungen dafür, dass Ω sein Vorzeichen behält. Wir untersuchen nun die Fälle einzeln, ob die unter Nr. 10) aufgeführten Ungleichungen zusammen stattfinden oder nicht.

1. Sind die Bedingungen

$$F^2 - AB < 0 \text{ und } \varDelta < 0$$

gleichzeitig erfüllt, so behält Ω immer dasselbe Vorzeichen, und zwar ist letzteres einerlei mit dem Vorzeichen von

$$\frac{\Omega}{\alpha^2} = A + \frac{B\beta^2}{\alpha^2} + \frac{C}{\alpha^2} + \frac{2D\beta}{\alpha^2} + \frac{2E}{\alpha} + \frac{2F\beta}{\alpha};$$

dieser Ausdruck reduziert sich für $\beta = 0$ und $\alpha = \infty$ auf das als positiv vorausgesetzte A, mithin ist hier Ω immer positiv. Bezeichnet ferner δ den absoluten Wert von $\varDelta$, so hat man $\varDelta = -\delta$ und

$$x' = \pm\alpha\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}}, \quad y' = \pm\beta\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}}, \quad z' = \pm\sqrt{\frac{\Gamma}{-\delta\Omega}}.$$

Wegen der positiven Ω und δ folgt nun augenblicklich, dass bei positiven Γ kein reeller Durchschnitt existiert, wie man auch α und β wählen möge, dass zweitens für $\Gamma = 0$ beide Durchschnitte in den neuen Koordinatenanfang zusammenfallen, dass endlich für negative Γ jederzeit zwei in endlichen Entfernungen liegende Durchschnitte vorhanden sind. Die Gleichung 7) oder 1) bedeutet daher

für $\Gamma > 0$ kein geometrisches Gebild,
„ $\Gamma = 0$ einen einzelnen Punkt (uvw),
„ $\Gamma < 0$ ein Ellipsoid.

2. Wenn die Bedingungen

$$F^2 - AB < 0 \text{ und } \varDelta < 0$$

nicht gleichzeitig erfüllt sind, so wechselt Ω sein Vorzeichen, indem es durch Null hindurchgeht. Es giebt dann eine Reihenfolge

von α und β, für welche $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}$ positiv ausfällt, ferner gewisse Wertepaare von α und β, bei denen $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega} = \frac{\Gamma}{0} = \infty$ wird, und dann unendlich viele Werte von α und β, welche $\frac{\Gamma}{\Delta\Omega}$ negativ machen. Die Fläche erstreckt sich daher jedenfalls ins Unendliche und gehört folglich unter die Hyperboloide.

Um zu unterscheiden, ob die Fläche ein einfaches oder ein geteiltes Hyperboloid ist, versuchen wir eine durch die Gleichungen

$$x' = Mz' + p, \quad y' = Nz' + q$$

dargestellte Gerade so zu legen, dass jeder ihrer Punkte mit einem Punkte der Fläche zusammenfällt. Die Substitution der vorliegenden Werte von x' und y' in Nr. 7) giebt

$$\begin{aligned}(AM^2 + BN^2 + C + 2DN + 2EM + 2FMN)z'^2 \\ + 2\{(AM + FN + E)p + (BN + FM + D)q\}z' \\ + Ap^2 + Bq^2 + Fpq = \frac{\Gamma}{\Delta},\end{aligned}$$

und wenn diese Gleichung für alle z' bestehen soll, so gehören dazu die drei Bedingungen

$$12)\quad \begin{cases} AM^2 + BN^2 + C + 2DN + 2EM + 2FMN = 0, \\ (AM + FN + E)p + (BN + FM + D)q = 0, \\ Ap^2 + Bq^2 + 2Fpq = \frac{\Gamma}{\Delta}. \end{cases}$$

Der zweiten Gleichung entnehmen wir den Wert von q und substituieren ihn in die dritte, wobei zur Abkürzung

$$13)\quad AM + FN + E = P, \quad BN + FM + D = Q$$

sein möge; es ergiebt sich

$$14)\quad (AQ^2 + BP^2 - 2FPQ)p^2 = \frac{\Gamma}{\Delta} Q^2,$$

und auf gleiche Weise, wenn der Wert von p aus der zweiten Gleichung in die dritte eingesetzt wird:

$$15)\quad (AQ^2 + BP^2 - 2FPQ)q^2 = \frac{\Gamma}{\Delta} P^2.$$

Vermöge der Bedeutung von P und Q findet man leicht durch gewöhnliche Ausrechnung

$$
\begin{aligned}
&AQ^2 + BP^2 - 2FPQ \\
&= (A^2B - AF^2)M^2 + (AB^2 - BF^2)N^2 + 2(ABF - F^3)MN \\
&\quad + 2(ABE - EF^2)M + 2(ABD - DF^2)N \\
&\quad + AD^2 + BE^2 - 2DEF,
\end{aligned}
$$

d. i. wenn man die positiven und negativen Glieder in der ersten und zweiten Reihe rechter Hand zusammenfasst:

$$
\begin{aligned}
&AQ^2 + BP^2 - FPQ \\
&= (AB - F^2)(AM^2 + BN^2 + 2DN + 2EM + 2FMN) \\
&\quad + AD^2 + BE^2 - 2DEF.
\end{aligned}
$$

Nach der ersten Gleichung in Nr. 12) und zufolge von Nr. 5) hat man weiter

$$
\begin{aligned}
&AQ^2 + BP^2 + 2FPQ \\
&= (AB - F^2)(-C) + (\varDelta + ABC - CF^2) = \varDelta.
\end{aligned}
$$

Hierdurch vereinfachen sich die Gleichungen 14) und 15); sie werden nämlich bei umgekehrter Anordnung

$$
16) \qquad \Gamma P^2 = \varDelta^2 q^2, \quad \Gamma Q^2 = \varDelta^2 p^2.
$$

Denkt man sich p und q so gewählt, dass sie der dritten Gleichung in Nr. 12) genügen, d. h. geometrisch, nimmt man irgend einen Punkt pq der Horizontalspur unserer Fläche als Horizontalspur der verlangten Geraden, so dienen die Gleichungen 16) zur Bestimmung von P und Q, woraus dann M und N mittels der Gleichungen 13) folgen. Dabei sind wieder die Fälle $\Gamma > 0$, $\Gamma = 0$ und $\Gamma < 0$ zu unterscheiden. Im ersten Falle könnte der aus der dritten Gleichung in Nr. 12) gezogene Wert

$$
Ap = -Fq \pm \sqrt{\frac{\Gamma}{\varDelta} + (F^2 - AB)q^2}
$$

nur dann imaginär werden, wenn $F^2 - AB$ und $\varDelta$ gleichzeitig negativ wären; dieses Zusammentreffen ist aber durch die anfangs gemachte Voraussetzung ausgeschlossen, mithin besteht jetzt die Horizontalspur der Fläche aus einer reellen Kurve. Ferner sind bei $\Gamma > 0$ die Werte von P und Q, sowie die nachherigen von M und N reell und zweideutig; es können also in diesem Falle durch jeden Punkt der Horizontalspur unserer Fläche zwei Gerade auf letzterer gezogen werden. Ist zweitens $\Gamma = 0$, so folgt aus Nr. 16) $p = 0$, $q = 0$, während M und N an die Gleichungen 13) gebunden bleiben; in diesem Falle sind auf der Fläche wiederum

unendlich viel gerade Linien möglich, die aber sämtlich durch den Koordinatenanfang gehen. Endlich für $\Gamma < 0$ werden nach Nr. 16) P und Q, mithin auch M und N imaginär. Diesen Erörterungen zufolge bedeutet die Gleichung 7) oder 1)

für $\Gamma > 0$ ein einfaches Hyperboloid,
„ $\Gamma = 0$ einen elliptischen Kegel,
„ $\Gamma < 0$ ein geteiltes Hyperboloid.

Noch möge bemerkt werden, dass bei einem rechtwinkligen Koordinatensysteme die drei Achsen einer centrischen Fläche zweiten Grades durch eine sehr einfache Formel gefunden werden können. Jene Achsen sind nämlich nichts anderes als die durch den Mittelpunkt parallel zu den drei Hauptrichtungen gelegten Sehnen der Fläche. Bezeichnen wir demgemäss mit α, β, γ die Winkel, welche eine der Hauptrichtungen mit den Koordinatenachsen einschliesst, und setzen in Nr. 7) $x' = r\cos\alpha$, $y' = r\cos\beta$, $z' = r\cos\gamma$, d. h. in Nr. 1):

$$x = r\cos\alpha + u, \quad y = r\cos\beta + v, \quad z = r\cos\gamma + w,$$

so erhalten wir wie in § 30, S. 166 für r die quadratische Gleichung

$$sr^2 + 2mr + n = 0;$$

hierin ist aber wegen der Gleichungen 3)

$$m = 0, \quad n = \Sigma = -\frac{\Gamma}{\Delta},$$

mithin

$$r^2 = \frac{\Gamma}{s\Delta}.$$

Den drei Werten von s, welche aus der kubischen Gleichung für s folgen, entsprechen drei Werte von r^2, und diese sind die Werte von $\pm a^2$, $\pm b^2$ und $\pm c^2$.

II. Zweiter Hauptfall: $\Delta = 0$. Wir müssen hier unterscheiden, ob die Zähler der Werte von u, v, w, nämlich die Grössen

$$17)\quad \begin{cases} \Delta_1 = G(D^2 - BC) + H(CF - DE) + J(BE - FD), \\ \Delta_2 = G(CF - DE) + H(E^2 - CA) + J(AD - EF), \\ \Delta_3 = G(BE - FD) + H(AD - EF) + J(F^2 - AB), \end{cases}$$

von Null verschieden sind, oder ob eine oder mehrere derselben verschwinden.

1. Wenn keiner der Ausdrücke $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\varDelta_3$ den Wert Null hat, so werden die Koordinaten des Mittelpunktes unendlich, und es lässt sich dann die im Falle I ausgeführte Transformation nicht anwenden. Wir versuchen jetzt die Gleichung 2) dadurch zu vereinfachen, dass wir die Koeffizienten von x', y' und den von x', y', z' freien Ausdruck wegschaffen, indem wir

$$18)\quad \begin{cases} Au + Fv + Ew + G = 0, \\ Fu + Bv + Dw + H = 0, \\ Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Dvw + 2Ewu + 2Fuv \\ \quad + 2Gu + 2Hv + 2Jw + K = 0 \end{cases}$$

setzen und hieraus u, v, w bestimmen. Dies geschieht auf folgende Weise. Wir geben der letzten Gleichung die Form

$$(Au + Fv + Ew + G)u + (Fu + Bv + Dw + H)v$$
$$+ Cw^2 + Dvw + Ewu + Gu + Hv + 2Jw + K = 0,$$

welche, den beiden ersten Gleichungen zufolge, auf

$$Cw^2 + Dvw + Ewu + Gu + Hv + 2Jw + K = 0$$

zurückkommt, und setzen hier statt u und v ihre aus den beiden ersten Gleichungen in Nr. 18) fliessenden Werte

$$19)\quad u = \frac{(BE - FD)w + BG - FH}{F^2 - AB}, \quad v = \frac{(AD - EF)w + AH - FG}{F^2 - AB};$$

nach gehöriger Reduktion erhalten wir für w die quadratische Gleichung

$$[C(F^2 - AB) + D(AD - EF) + E(BE - ED)]w^2$$
$$+ 2[G(BE - FD) + H(AD - EF) + J(F^2 - AB)]w$$
$$+ AH^2 + BG^2 - 2FGH + K(F^2 - AB) = 0.$$

Der Koeffizient von w^2 ist einerlei mit $\varDelta$ und ebendeswegen $= 0$; der Koeffizient von $2w$ ist $= \varDelta_3$; das Übrige heisse zur Abkürzung $\varkappa$; die vorstehende Gleichung liefert also für w den bestimmten endlichen Wert

$$20)\quad w = -\frac{\varkappa}{2\varDelta_3},$$

und daraus ergeben sich nach Nr. 19) bestimmte endliche Werte für u und v, wofern $F^2 - AB$ von Null verschieden ist, was wir für jetzt voraussetzen. Die Gleichung 2) wird hiernach zur folgenden

$$21)\quad \begin{cases} Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + 2Dy'z' + 2Ez'x' \\ \quad + 2Fx'y' + 2Lz' = 0, \end{cases}$$

worin

$$Eu + Dv + Cw + J = L$$

gesetzt worden ist, und es bedarf nun der Untersuchung, ob dieselbe ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid bedeutet.

Zu diesem Zwecke versuchen wir, eine durch die Gleichungen

$$x' = Mz' + p, \quad y' = Nz' + p$$

charakterisierte Gerade so zu legen, dass jeder ihrer Punkte zugleich ein Punkt der Fläche ist. Nach Substitution der vorliegenden Werte von x' und y' geht die Gleichung 21) über in

$$\begin{gathered}(AM^2 + BN^2 + C + 2DN + 2EM + 2FMN)z'^2 \\ + 2[(AM + FN + E)p + (BN + FM + D)q + L]z' \\ + Ap^2 + Bq^2 + 2Fpq = 0,\end{gathered}$$

welche für alle möglichen z' nur dann bestehen kann, wenn die Bedingungen

$$22)\quad \begin{cases} AM^2 + BN^2 + C + 2DN + 2EM + 2FMN = 0, \\ (AM + FN + E)p + (BN + FM + D)q + L = 0, \\ Ap^2 + Bq^2 + 2Fpq = 0 \end{cases}$$

zusammen erfüllt sind. Die letzte Gleichung giebt

$$Ap = (-F \pm \sqrt{F^2 - AB})q.$$

Ist nun erstens $F^2 - AB$ negativ, so genügt der vorstehenden Gleichung nur das eine reelle Wertepaar $p = 0$, $q = 0$, vermöge dessen die zweite Gleichung in Nr. 22) zu $L = 0$ wird; dieses Resultat widerspricht aber der Voraussetzung $\Delta = 0$ insofern, als die Gleichung 21) für $L = 0$ eine centrische Fläche (einen elliptischen Kegel) bedeutet. Für $F^2 - AB < 0$ giebt es also keine reellen Werte von p und q, mithin auch keine Geraden auf der Fläche. Im zweiten Falle $F^2 - AB > 0$ genügen der dritten Gleichung in Nr. 22) unendlich viel reelle Wertepaare von p und q, und es fragt sich dann noch, ob denselben reelle Werte von M und N entsprechen. Um dies zu entscheiden, substituieren wir den aus der zweiten Gleichung in Nr. 22) gezogenen Wert von q in die dritte Gleichung und benutzen die schon in Nr. 13) angegebenen Abkürzungen; wir erhalten

$$(AQ^2 + BP^2 - 2FPQ)p^2 + 2L(BP - FQ)p + BL^2 = 0.$$

Wie im Falle I, 2 ist der Koeffizient von p^2 einerlei mit Δ, d. h. $= 0$, also bleibt

$$FQ - BP = \frac{BL}{2p}$$

oder zufolge der Werte von P und Q:

$$(F^2 - AB)M = BE - FD + \frac{BL}{2p}.$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich, wenn p aus der zweiten und dritten Gleichung in Nr. 22) eliminiert wird,

$$(F^2 - AB)N = AD - EF + \frac{AL}{2q}.$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern, wegen $F^2 - AB > 0$, endliche bestimmte Werte für M und N, d. h. durch jeden Punkt der Horizontalspur unserer Fläche können auf letzterer zwei Gerade gezogen werden. Nach diesen Erörterungen bedeutet die Gleichung 21) oder 1)

für $F^2 - AB < 0$ ein elliptisches Paraboloid,
„ $F^2 - AB > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid.

Dasselbe Resultat findet man rascher mittels der Bemerkung, dass ein elliptisches Paraboloid nicht in Hyperbeln und ein hyperbolisches nicht in Ellipsen geschnitten werden kann, dass also bei einer nicht centrischen Fläche ein einziger elliptischer Schnitt für das elliptische Paraboloid, und ein einziger hyperbolischer Schnitt für das hyperbolische Paraboloid entscheidet. Legt man nun in der Entfernung $z' = h$ eine Ebene parallel zur Ebene $x'y'$, so erhält man als Gleichung ihres Schnittes mit der Fläche 21)

$$Ax'^2 + By'^2 + 2Fx'y' + 2Ehx' + 2Dhy' + Ch^2 + 2Lh = 0;$$

hier lässt sich das beliebige h immer so wählen, dass der Schnitt reell wird, und er bildet dann eine Ellipse oder Hyperbel, jenachdem $F^2 - AB$ negativ oder positiv ist.

Mittels der soeben gemachten Bemerkung kann man auch den Fall $F^2 - AB = 0$ leicht behandeln. Die vorige Transformation würde dann wegen $u = \infty$ und $v = \infty$ (Nr. 19) unausführbar werden, aber es bedarf derselben überhaupt nicht, wenn man gleich die Schnitte der Fläche mit verschiedenen zu den Koordinatenebenen parallelen Ebenen betrachtet. Für $F^2 - AB = 0$ giebt zwar der Schnitt parallel zur xy-Ebene keine Entscheidung (weil parabolische Schnitte in beiden Paraboloiden vorkommen), dagegen sind die Schnitte parallel zur xy-Ebene Ellipsen für $E^2 - CA < 0$ und Hyperbeln für $E^2 - CA > 0$; die Gleichung bedeutet daher

für $E^2 - CA < 0$ ein elliptisches Paraboloid,
„ $E^2 - CA > 0$ ein hyperbolisches Paraboloid.

Auch dieses Kennzeichen würde seine Anwendbarkeit verlieren, wenn $E^2 - CA = 0$, mithin gleichzeitig $F^2 = AB$ und $E^2 = CA$ wäre; man hat in diesem Falle

$$\begin{aligned} \varDelta &= AD^2 + BAC - 2\sqrt{AB}.\sqrt{AC}.D \\ &= A(D^2 + BC - 2D\sqrt{BC}) = A(D - \sqrt{BC})^2 \end{aligned}$$

und weil $\varDelta = 0$, A aber > 0 vorausgesetzt ist,

$$D - \sqrt{BC} = 0, \quad \text{woraus} \quad D^2 - BC = 0.$$

Schneidet man jetzt die Fläche durch eine der yz-Ebene parallele Ebene, so erhält man wegen der vorstehenden Gleichung einen parabolischen Schnitt und es sind folglich alle den Koordinatenebenen parallelen Schnitte Parabeln. Dies entscheidet bereits die Natur der Fläche; in beiden Paraboloiden sind nämlich nur die zur Achse parallelen Schnitte Parabeln, alle drei Koordinatenebenen können aber nicht gleichzeitig der Achse parallel sein, es ist folglich die Fläche kein Paraboloid, sondern ein parabolischer Cylinder, der in speziellen Fällen zu einer Ebene degenerieren kann. Das Resultat dieser Untersuchung lässt sich demnach so aussprechen: wenn die Differenzen

$$F^2 - AB, \quad E^2 - CA, \quad D^2 - BC$$

nicht gleichzeitig Null sind, so bedeutet die Gleichung 1) ein elliptisches oder ein hyperbolisches Paraboloid, jenachdem die nicht verschwindenden Differenzen das negative oder positive Vorzeichen besitzen; sind aber jene Differenzen gleichzeitig Null, so ist die entsprechende Fläche im allgemeinen ein parabolischer Cylinder.

2. Wenn zweitens eine oder mehrere der Grössen A_1, A_2, A_3 verschwinden, so erhalten die Mittelpunktskoordinaten, welche früher aus den Gleichungen 3) entwickelt wurden, keine völlig bestimmten Werte und es ist dies ein Zeichen, dass die Gleichungen 3) nicht sämtlich voneinander verschieden sind; die Fläche besitzt dann unendlich viele Mittelpunkte. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Die genannten drei Gleichungen können entweder auf zwei Gleichungen zurückkommen (wenn nämlich eine Gleichung eine Folge der beiden übrigen ist); sie repräsentieren dann zwei Ebenen und jeder Punkt auf der Durchschnittslinie der letzteren kann als Mittelpunkt betrachtet werden. Die Fläche ist in diesem Falle entweder ein elliptischer oder ein hyperbolischer Cylinder oder ein

System von zwei sich schneidenden Ebenen. Hierüber geben die Schnitte der Fläche leicht Auskunft; ein einziger elliptischer Schnitt entscheidet für den elliptischen Cylinder, ein einziger hyperbolischer Schnitt für den hyperbolischen Cylinder; ist weder der eine noch der andere Schnitt möglich, so besteht die Fläche aus zwei sich schneidenden Ebenen. Ausserdem ist noch der zweite Fall möglich, dass die Gleichungen 3) auf eine Gleichung zurückkommen; sie repräsentieren dann eine Ebene, von welcher jeder Punkt als Mittelpunkt gelten kann. Die Fläche besteht in diesem Falle entweder aus zwei parallelen Ebenen, welche von der Ebene der Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, oder aus einer einzigen Ebene (der Mittelpunktsebene selber); der letztere Umstand tritt ein, wenn die linke Seite das vollständige Quadrat eines Ausdruckes von der Form $A'x + B'y + C'z + D'$ ist.

Beispiele zu derartigen Untersuchungen enthält der nächste Paragraph.

§ 40.

Geometrische Orte.

Nicht selten erzeugt man eine Fläche dadurch, dass man einen Punkt oder eine Gerade sich nach einem bestimmten Gesetze bewegen lässt; die Fläche ist dann der geometrische Ort des veränderlichen Punktes oder der Geraden. Einige bemerkenswerte derartige Entstehungsweisen von Flächen zweiten Grades sind folgende.

1. Welche Fläche beschreibt ein Punkt, dessen Abstände von einer festen Ebene und von einer bestimmten Geraden in gegebenem Verhältnisse stehen?

Die feste Ebene sei die Koordinatenebene der xy, ihr Durchschnitt mit der Geraden werde zum Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten, und die Ebene des Neigungswinkels der Geraden gegen die Ebene zur xz-Ebene genommen; die Gleichungen der Geraden sind unter dieser Voraussetzung

$$y = 0, \quad z = Cx,$$

wo C die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels bedeutet. Ferner hat man für den Abstand p des beweglichen Punktes xyz von der Geraden nach Formel 14) auf Seite 36

$$p = \sqrt{\frac{y^2 + (Cx - z)^2 + (Cy)^2}{1 + C^2}},$$

und z als Abstand des Punktes xyz von der festen Ebene. Bezeichnet nun λ das konstante Verhältnis $\frac{p}{z}$, so lautet die Gleichung der Fläche

$$\sqrt{\frac{y^2 + (Cx - z)^2 + (Cy)^2}{1 + C^2}} = \lambda z,$$

oder nach Wegschaffung des Wurzelzeichens und bei anderer Anordnung

$$C^2 x^2 + (1 + C^2) y^2 + [1 - \lambda^2 (1 + C^2)] z^2 - 2Cxz = 0$$

Dieselbe erhält eine bessere Gestalt, wenn man den Neigungswinkel ϑ einführt, also $C = \tan\vartheta$ setzt, und nachher mit $\cos^2\vartheta$ multipliziert; es ergiebt sich

$$1) \quad \sin^2\vartheta \,.\, x^2 + y^2 + (\cos^2\vartheta - \lambda^2) z^2 - 2 \sin\vartheta \cos\vartheta \,.\, xz = 0.$$

Aus dem im vorigen Paragraphen unter I. 2 angeführten Kennzeichen folgt augenblicklich, dass der fragliche Ort eine elliptische Kegelfläche ist. Will man ihre Gleichung auf die gewöhnliche Form bringen, so muss man das mit xz behaftete Glied wegschaffen; dies geschieht dadurch, dass man das Koordinatensystem um die y-Achse dreht, also

$$x = x' \cos\omega - z' \sin\omega,$$
$$z = x' \sin\omega + z' \cos\omega$$

setzt, wo ω den Drehungswinkel bezeichnet, und nacher ω so bestimmt, dass der Koeffizient von $x'z'$ verschwindet; man findet

$$2) \qquad \tan 2\omega = \frac{\sin 2\vartheta}{\cos 2\vartheta - \lambda^2}$$

und als Gleichung der Fläche

$$3) \quad [\sin^2(\vartheta - \omega) - \lambda^2 \sin^2\omega] x'^2 + y^2 + [\cos^2(\vartheta - \omega) - \lambda^2 \cos^2\omega] z'^2 = 0.$$

Da schon bekannt ist, dass diese Gleichung eine Kegelfläche charakterisiert, so müssen die Koeffizienten von x'^2 und z'^2 entgegengesetzte Vorzeichen haben; ist der erste Koeffizient positiv, mithin der zweite negativ, so fällt die Kegelachse mit der z'-Achse zusammen; im entgegengesetzten Falle ist die x'-Achse die Kegelachse.

2. Ein Punkt bewegt sich so, dass seine Abstände von zwei festen nicht in einer Ebene liegenden Geraden ein bestimmtes Verhältnis zueinander haben; welcher ist der geometrische Ort des Punktes?

Die gemeinschaftliche Normale beider Geraden nehmen wir zur z-Achse und den Mittelpunkt ihrer Entfernung zum Koor-

dinatenanfang; durch letzteren legen wir Parallelen zu den gegebenen Geraden, halbieren die Winkel zwischen diesen Parallelen und nehmen die aufeinander und auf der z-Achse senkrechten Halbierungslinien zu Achsen der x und der y. In Beziehung auf dieses rechtwinklige Koordinatensystem sind (wie auf Seite 41) die Gleichungen der beiden Geraden

$$y = Bx, \quad z = c; \qquad y = -Bx, \quad z = -c;$$

die Abstände des beweglichen Punktes xyz von beiden Geraden erhalten wir nach Formel 14) S. 36:

$$p = \sqrt{\frac{(Bx - y)^2 + (c - z)^2 + [B(c - z)^2]}{1 + B^2}},$$

$$q = \sqrt{\frac{(Bx + y)^2 + (c + z)^2 + [B(c + z)^2]}{1 + B^2}};$$

bezeichnet nun λ das konstante Verhältnis $\frac{q}{p}$, so ist $q^2 = \lambda^2 p^2$, mithin nach Substitution der Werte von p und q, sowie bei Zusammenfassung der gleichartigen Grössen:

$$(1 - \lambda^2) B^2 x^2 + (1 - \lambda^2) y^2 + (1 - \lambda^2)(1 + B^2) z^2$$
$$+ 2(1 + \lambda^2) Bxy + 2(1 + \lambda^2)(1 + B^2) cz + (1 - \lambda^2)(1 + B^2) c^2 = 0.$$

Für $B = \tan\alpha$ und nach Multiplikation mit $\cos^2\alpha$ ergiebt sich hieraus als Gleichung des gesuchten Ortes:

$$4) \qquad (1 - \lambda^2)[\sin^2\alpha \,.\, x^2 + \cos^2\alpha \,.\, y^2 + z^2]$$
$$+ 2(1 + \lambda^2)[\sin\alpha\cos\alpha \,.\, xy + cz] + (1 - \lambda^2) c^2 = 0.$$

Hierbei sind zunächst die Fälle $\lambda = 1$ und $\lambda \gtrless 1$ zu unterscheiden. Für $\lambda = 1$ erhält man

$$\sin\alpha\cos\alpha \,.\, xy + cz = 0$$

oder für $z = -z'$

$$5) \qquad xy = \frac{2c}{\sin 2\alpha} z';$$

die Fläche ist dann ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid. Für $\lambda \gtrless 1$ giebt man der Gleichung 4) die Form:

$$6) \qquad \sin^2\alpha \,.\, x^2 + \cos^2\alpha \,.\, y^2 + z^2$$
$$+ 2\frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} \sin\alpha\cos\alpha \,.\, xy + 2\frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} cz + c^2 = 0,$$

sie drückt in diesem Falle ein einfaches Hyperboloid aus. Will man die Gleichung desselben in der gewöhnlichen Form darstellen,

so muss man das rechtwinklige Koordinatensystem um die z-Achse drehen und gleichzeitig längs der z-Achse verschieben, indem man setzt:

$$x = x' \cos\omega - y' \sin\omega,$$
$$y = x' \sin\omega + y' \cos\omega,$$
$$z = z' + k,$$

wobei ω und k so zu wählen sind, dass die Koeffizienten von x', y' und z' verschwinden. Die hierzu nötigen Werte bestimmen sich durch die Formeln

$$7)\qquad \tan 2\omega = -\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}\tan 2\alpha, \qquad k = -\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}c.$$

Im Fall sich beide Gerade schneiden, wird das hyperbolische Paraboloid zu zwei Ebenen und das einfache Hyperboloid zu einem elliptischen Kegel.

3. Eine Gerade bewegt sich so, dass drei gegebene Punkte derselben auf drei festen in einem Punkte zusammentreffenden Ebenen bleiben; welche Fläche beschreibt ein vierter Punkt der Geraden?

Die vier gegebenen Punkte mögen der Reihe nach A, B, C, P heissen und ihre Abstände durch $AP = a$, $BP = b$, $CP = c$ bestimmt sein; die gegebenen Ebenen wählen wir zu Koordinatenebenen und zwar in der Weise, dass der Punkt A auf der Ebene yz, B auf zx und C auf xy bleibt. Heissen ferner ξ, η, ζ die Koordinaten irgend eines Punktes der beweglichen Geraden (die sogenannten laufenden Koordinaten), und x, y, z die des Punktes P, so können die Gleichungen der Geraden in der Form

$$8)\qquad \eta - y = M(\xi - x), \quad \zeta - z = N(\xi - x)$$

dargestellt werden, und die Punkte A, B, C sind nichts anderes als die Spuren dieser Geraden. Wir bezeichnen demgemäss

die Koordinaten von A mit $x''' = 0$, y''', z''',
" " " B " x'', $y'' = 0$, z'',
" " " C " x', y', $z' = 0$,

und haben, weil sie den Gleichungen 8) genügen müssen:

$$9)\qquad \begin{cases} y''' - y = -Mx, & z''' - z = -Nx, \\ x'' - x = -\frac{1}{M}y, & z'' - z = -\frac{N}{M}y, \\ x' - x = -\frac{1}{N}z, & y' - y = -\frac{M}{N}z. \end{cases}$$

Für die Entfernung der Punkte A und P, d. h. $x'''y'''z'''$ und xyz, gilt nun der Aufgabe zufolge die Gleichung

$$(x'''-x)^2+(y'''-y)^2+(z'''-z)^2+2(x'''-x)(y'''-y)\cos(xy)$$
$$+2(x'''-x)(z'''-z)\cos(xz)+2(y'''-y)(z'''-z)\cos(yz)=a^2,$$

oder, wenn die Cosinus der Koordinatenwinkel xy, xz, yz mit γ, β, α bezeichnet und die in Nr. 9) verzeichneten Werte substituiert werden:

$$(1+M^2+N^2+2M\gamma+2N\beta+2MN\alpha)x^2=a^2;$$

auf analoge Weise gelangt man zu den Relationen

$$(1+M^2+N^2+2M\gamma+2N\beta+2MN\alpha)\frac{y^2}{M^2}=b^2,$$

$$(1+M^2+N^2+2M\gamma+2N\beta+2MN\alpha)\frac{z^2}{N^2}=c^2.$$

Aus diesen Gleichungen zieht man durch Division

$$\frac{x^2M^2}{y^2}=\frac{a^2}{b^2},\quad \frac{x^2N^2}{z^2}=\frac{a^2}{c^2}$$

oder

$$M=\frac{ay}{bx},\quad N=\frac{az}{cx},$$

und wenn man diese Werte in die für a^2 geltende Gleichung substituiert, so erhält man nach Division mit a^2:

$$10)\quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \\ +2\frac{\alpha}{bc}yz+2\frac{\beta}{ca}zx+2\frac{\gamma}{ab}xy=1 \end{cases}$$

als Gleichung des gesuchten Ortes. Letzterer ist ein dreiachsiges Ellipsoid.

Wenn die gegebenen Ebenen senkrecht aufeinander stehen, wird $\alpha=\beta=\gamma=0$, und a, b, c sind die Halbachsen der Fläche.

4. Zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade sind gegeben; um jede derselben dreht sich eine Ebene und zwar so, dass beide Ebenen immer senkrecht aufeinander bleiben. Welche Fläche beschreibt ihre Durchschnittslinie?

Unter Benutzung desselben rechtwinkligen Koordinatensystemes, wie bei der zweiten Aufgabe, sind die Gleichungen der beiden festen Geraden

$$y=Bx,\quad z=c;\qquad y=-Bx,\quad z=-c.$$

Ist nun
$$L_1 x + M_1 y + N_1 z = 1$$
die Gleichung der einen beweglichen Ebene, so gelten, weil sie die erste Gerade in sich enthalten soll, die Bedingungen
$$L_1 + M_1 B = 0, \quad N_1 c = 1,$$
und man kann daher die Gleichung jener Ebene in der Form
$$11) \qquad - M_1 B x + M_1 y + \frac{1}{c} z = 1$$
darstellen. Auf analoge Weise findet sich als Gleichung einer zweiten Ebene, welche die zweite Gerade enthält,
$$12) \qquad + M_2 B x + M_2 y - \frac{1}{c} z = 1,$$
endlich liefert die vorausgesetzte senkrechte Lage der Ebenen 11) und 12) die Bedingung
$$- M_1 M_2 B^2 + M_1 M_2 - \frac{1}{c^2} = 0.$$
Durch Elimination von M_1 und M_2 aus den drei letzten Gleichungen erhält man
$$- B^2 x^2 + y^2 + (1 - B^2) z^2 = (1 - B^2) c^2$$
oder für $B = \tan \alpha$ und durch Multiplikation mit $\cos^2 \alpha$
$$13) \qquad - \sin^2 \alpha \,.\, x^2 + \cos^2 \alpha \,.\, y^2 + \cos 2\alpha \,.\, z^2 = \cos^2 \alpha \,.\, c^2$$
als Gleichung der Fläche. Letztere ist für $c \gtrless 0$ ein einfaches Hyperboloid; für $c = 0$, d. h. bei zwei sich schneidenden Geraden, wird sie zu einem elliptischen Kegel. Eine nähere Untersuchung über die Lage der Fläche hat die Fälle zu unterscheiden, ob $\cos^2 \alpha$ positiv oder negativ, d. h. ob $\alpha < 45^0$ oder $> 45^0$ ist; wir überlassen dies dem Leser.

5. Von einem Punkte sind Senkrechte auf die sechs Seitenebenen eines gegebenen Parallelepipedes herabgelassen; welche Fläche beschreibt jener Punkt, wenn er sich so bewegt, dass das Produkt aus den Perpendikeln auf drei in einer bestimmten Ecke zusammentreffende Seitenflächen gleich dem Produkte aus den drei übrigen Perpendikeln bleiben soll?

Die drei Kanten des Parallelepipedes mögen $2a$, $2b$, $2c$ heissen; durch den Mittelpunkt desselben legen wir parallel zu den Seitenflächen drei Ebenen und nehmen diese zu Koordinatenebenen.

Drei in einer Ecke zusammenstossende Seitenflächen sind jetzt durch die Gleichungen

$$x = +a, \quad y = +b, \quad z = +c,$$

und die gegenüberliegenden durch

$$x = -a, \quad y = -b, \quad z = -c$$

bestimmt. Die von dem beweglichen Punkte xyz auf die Seitenflächen herabgelassenen Senkrechten ergeben sich aus Formel 17) auf S. 105, wenn man die Cosinus der Koordinatenwinkel xy, xz, yz wieder mit γ, β, α und den Ausdruck

$$1 + 2\alpha\beta\gamma - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$$

mit δ^2 bezeichnet; jene sechs Entfernungen sind nämlich

$$\frac{+a-x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\delta, \quad \frac{+b-y}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\delta, \quad \frac{+c-z}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,\delta,$$

$$\frac{-a-x}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,\delta, \quad \frac{-b-y}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\delta, \quad \frac{-c-z}{\sqrt{1-\gamma^2}}\,\delta.$$

Der Aufgabe zufolge muss nun die Gleichung

$$14) \quad (x+a)(y+b)(z+c) = (x-a)(y-b)(z-c)$$

gelten und aus dieser wird nach gehöriger Hebung:

$$cxy + bzx + ayz + abc = 0$$

oder

$$15) \quad \frac{xy}{ab} + \frac{zx}{ca} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

Der gesuchte Ort ist demnach ein einfaches Hyperboloid, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkte des Parallelepipedes zusammenfällt.

Bezeichnen wir diejenigen Eckpunkte des Parallelepipedes, deren Koordinaten sind

$$\begin{array}{llll} -a, & +b, & +c, & \text{mit } A, \\ +a, & -b, & +c, & \;\;\text{"}\;\; B, \\ +a, & +b, & -c, & \;\;\text{"}\;\; C, \\ +a, & +b, & +c, & \;\;\text{"}\;\; D, \end{array}$$

und die gegenüberliegenden Punkte

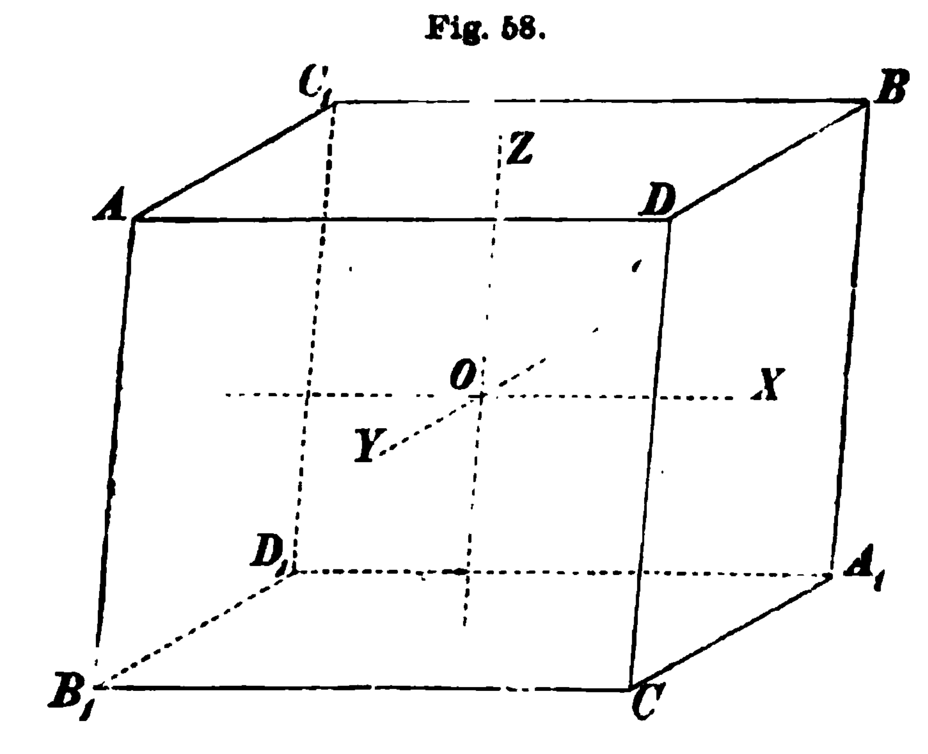
$$\begin{array}{llll} +a, & -b, & -c, & \text{mit } A_1, \\ -a, & +b, & -c, & \;\;\text{"}\;\; B_1, \\ -a, & -b, & +c, & \;\;\text{"}\;\; C_1, \\ -a, & -b, & -c, & \;\;\text{"}\;\; D_1, \end{array}$$

so gelten folgende Gleichungen von geraden Linien:

für die Kante AB_1: $x = -a$, $y = +b$,
" " " A_1B: $x = +a$, $y = -b$;
" " " AC_1: $x = -a$, $z = +c$,
" " " A_1C: $x = +a$, $z = -c$;
" " " BC_1: $y = -b$, $z = +c$,
" " " B_1C: $y = +b$, $z = -c$;

jedes dieser sechs Gleichungssysteme erfüllt die Gleichung 14), mithin auch die Gleichung 15), d. h. die sechs entsprechenden Kanten liegen auf der Fläche und bilden dort das schiefe Sechseck $AB_1CA_1BC_1A$; die übrigen sechs Kanten: AD, BD, CD, A_1D_1, B_1D_1, C_1D_1 liegen nicht auf der Fläche.

Fig. 58.



6. **Welche Fläche beschreibt eine gerade Linie, wenn sie an drei festen Geraden hingleitet, von denen kein Paar in einer Ebene liegt?**

Durch jede der drei gegebenen Geraden legen wir zwei Ebenen parallel zu den zwei übrigen Geraden, nehmen den Mittelpunkt des von den entstandenen sechs Ebenen begrenzten Parallelepipedes zum Koordinatenanfang und ziehen durch ihn die Koordinatenachsen parallel zu den gegebenen Geraden. Letztere können bei diesem Koordinatensysteme durch die Gleichungen

$$16)\qquad \begin{cases} y = +b, & z = -c, \\ z = +c, & x = -a, \\ x = +a, & y = -b \end{cases}$$

dargestellt werden und sind der Reihe nach identisch mit den in der vorigen Aufgabe erwähnten Kanten B_1C, C_1A, A_1B. Die bewegliche Gerade sei durch die Gleichungen

$$17)\qquad y = Px + p, \quad z = Qx + q$$

ausgedrückt; sie schneidet die erste feste Gerade, sobald die Bedingung

$$\frac{p-b}{q+c} = \frac{P}{Q}$$

erfüllt ist; soll sie die zweite Gerade schneiden, so muss ihre xz-Projektion durch die gleichnamige Spur der zweiten Geraden gehen, also

$$c = -Qa + q$$

sein; endlich ist auf ähnliche Weise die Bedingung für ihren Durchschnitt mit der dritten Geraden:

$$-b = Pa + p.$$

Durch Substitution der aus den beiden letzten Gleichungen folgenden Werte

$$p = -Pa - b, \quad q = Qa + c$$

verwandeln sich die vorigen drei Gleichungen in

$$y = (x - a)P - b, \quad z = (x + a)Q + c,$$
$$aPQ + bQ + cP = 0,$$

und wenn man die Werte von P und Q aus den zwei ersten dieser Gleichungen in die letzte einsetzt, so bleibt nach Division mit abc

$$18) \qquad \frac{xy}{ab} + \frac{zx}{ca} + \frac{yz}{bc} + 1 = 0.$$

Hierin liegt der bemerkenswerte Satz, dass eine an drei festen Geraden gleitende Gerade ein einfaches Hyperboloid beschreibt; dabei gehören die gegebenen Geraden zu dem einen Systeme von geraden Linien, welche sich auf der Fläche ziehen lassen, und die bewegliche Gerade wird der Reihe nach mit allen Geraden des zweiten Systemes identisch.*

7. Welche Fläche beschreibt eine gerade Linie, wenn dieselbe an zwei festen nicht in einer Ebene liegenden Geraden hingleitet und zugleich einer gegebenen Ebene parallel bleibt?

* Aus dem obigen folgt noch eine elegante Konstruktion der Transversalen zu vier gegebenen Geraden a, b, c, d. Die ersten drei derselben bestimmen nämlich, wenn man eine bewegliche Gerade daran hingleiten lässt, ein einfaches Hyperboloid, auf welchem a, b, c zu dem einen System von Geraden gehören; die vierte Gerade d schneidet die entstandene Fläche im allgemeinen zweimal in gewissen Punkten D_1 und D_2; legt man durch jeden derselben die zum anderen Systeme gehörende Gerade g_1 resp. g_2, so schneidet sowohl g_1 als g_2 alle Geraden des ersten Systemes, mithin auch a, b, c und zugleich d, es sind daher g_1 und g_2 die beiden gesuchten Transversalen. Die zweite Hälfte der Konstruktion lässt sich insofern abkürzen, als man durch D_1 und D_2 nur diejenigen Geraden zu ziehen braucht, welche irgend zwei der Geraden a, b, c schneiden.

Wenn die Ebene den beiden Geraden nicht parallel ist, was wir deswegen voraussetzen müssen, weil sonst die geforderte Bewegung unmöglich sein würde, so schneiden die Geraden die Ebene in zwei Punkten A und B; wir verbinden diese durch eine Gerade, nehmen ihren Mittelpunkt O zum Koordinatenanfang, OA zur Achse der positiven y und die gegebene Ebene zur yz-Ebene. Durch O legen wir ferner zwei Parallelen zu den festen Geraden, nämlich $OC''/\!/AC$, $OD''/\!/BD$ und erhalten hierdurch eine jenen Geraden parallele (in der Figur vertikale) Ebene $C''OD''$; diese wählen wir zur Ebene xz. Sie schneidet die feste Ebene in einer Geraden, nämlich der z-Achse. In der Ebene xz ziehen wir endlich irgend eine zur z-Achse parallele Gerade, welche die Hilfslinien OC'' und OD'' in zwei Punkten C'', D'' trifft, verbinden den Mittelpunkt L der Transversale $C''D''$ mit O durch eine Gerade und nehmen OL zur Achse der positiven x. Das Koordinatensystem hat jetzt gegen die Geraden AC und BD eine insofern symmetrische Lage, als jedem $x = OL$ zwei gleiche und entgegengesetzte y $(LC' = +y,$ $LD' = -y)$, sowie zwei gleiche und entgegengesetzte z $(LC'' = C'C = +z,$ $LD'' = D'D = -z)$ entsprechen. Für $OA = b$, $\tan CAC' = \tan\alpha = C$ sind die Gleichungen der gegebenen Geraden

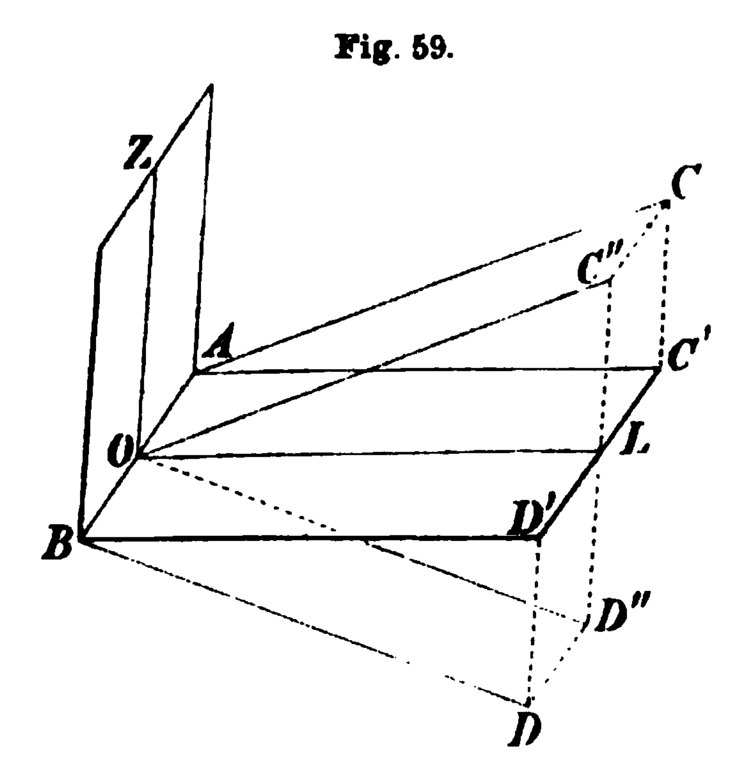


Fig. 59.

$$y = b, \quad z = Cx, \quad y = -b, \quad z = -Cx;$$

irgend eine der festen Ebene (yz) parallele Gerade wird durch die Gleichungen

$$19) \qquad x = m, \quad y = Nz + p$$

ausgedrückt und schneidet jene Geraden, wenn die Bedingungen

$$b = NCm + p, \quad -b = -NCm + p$$

erfüllt sind. Hieraus ergeben sich die Werte

$$p = 0, \quad N = \frac{b}{Cm} = \frac{b}{Cx}$$

und durch Substitution in die zweite Gleichung unter Nr. 18)

$$20) \qquad xy = \frac{b}{C} z = b \cot\alpha \,.\, z.$$

Hierin liegt der bemerkenswerte Satz, dass eine Gerade, welche parallel einer unveränderlichen Ebene an zwei festen Geraden hingleitet, ein hyperbolisches Paraboloid beschreibt.

§ 41.

Tangenten, Berührungsebenen und Normalen.

Wir betrachten noch einmal die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades

$$1)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy \\ \qquad + 2Gx + 2Hy + 2Jz + K = 0, \end{cases}$$

um die Bedingungen zu erörtern, unter welchen eine Gerade die vorstehend charakterisierte Fläche berührt. Zu diesem Zwecke transformieren wir die Gleichung 1), indem wir einen bestimmten, der Fläche angehörigen Punkt $x_0 y_0 z_0$, nämlich den künftigen Berührungspunkt zum Anfange eines neuen Koordinatensystemes wählen, welches dem ursprünglichen Systeme parallel ist. Mit Hilfe der Substitutionen

$$x = \xi + x_0, \quad y = \eta + y_0, \quad z = \zeta + z_0$$

erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta \\ \quad + 2(Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G)\xi \\ \quad + 2(Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H)\eta \\ \quad + 2(Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J)\zeta \\ + Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dy_0z_0 + 2Ez_0x_0 + 2Fx_0y_0 \\ \quad + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Jz_0 + K \end{array}\right\} = 0;$$

weil aber der Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche angehört, so ist für ihn

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dy_0z_0 + 2Ez_0x_0 + 2Fx_0y_0$$
$$+ 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Jz_0 + K = 0,$$

mithin verschwindet aus der vorigen Gleichung der von ξ, η, ζ freie Teil und es bleibt

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta \\ \quad + 2(Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G)\xi \\ \quad + 2(Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H)\eta \\ \quad + 2(Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J)\zeta \end{array}\right\} = 0.$$

Durch den neuen Koordinatenanfang legen wir die Gerade

$$3)\quad \eta = P\xi, \quad \zeta = Q\xi$$

und suchen ihre Durchschnitte mit der Fläche. Die Elimination von η und ζ giebt für die Koordinate ξ eine Gleichung von der Form

$$4)\qquad \xi(S\xi + T) = 0,$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\begin{aligned} S &= A + BP^2 + CQ^2 + 2DPQ + 2EQ + 2FP, \\ T &= Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G \\ &\quad + (Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H)P \\ &\quad + (Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J)Q, \end{aligned}$$

und die Koordinaten der beiden vorhandenen Durchschnitte sind nach Nr. 4) und Nr. 3):

$$\xi = 0; \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0;$$
$$\xi = -\frac{2T}{S}, \quad \eta = -\frac{2PT}{S}, \quad \zeta = -\frac{2QT}{S}.$$

Wenn aber die Gerade 3) die Fläche 2) berühren soll, so müssen beide Durchschnitte zu einem einzigen Punkte zusammenfallen, und dazu ist die Bedingung $T = 0$ erforderlich und ausreichend. Indem wir nun zu dem ursprünglichen Koordinatensysteme zurückkehren, also in Nr. 3) ξ, η, ζ durch $\xi - x_0$, $\eta - y_0$, $\zeta - z_0$ ersetzen, erhalten wir den Satz: die durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$ der Fläche 1) gehende Gerade

$$5)\qquad \eta - y_0 = P(\xi - x_0), \quad \zeta - z_0 = Q(\xi - x_0)$$

ist eine Tangente an derselben Fläche, wenn die Koeffizienten P und Q der Bedingung

$$6)\qquad \left\{\begin{aligned} &Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G \\ &+ (Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H)P \\ &+ (Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J)Q \end{aligned}\right\} = 0$$

Genüge leisten. Von den Grössen P und Q bleibt hier eine vollkommen beliebig, d. h. durch einen gegebenen Punkt der Fläche können unendlich viel Tangenten an letztere gelegt werden.

Diese Bemerkung führt weiter auf die Frage nach dem geometrischen Orte der Tangenten, d. i. nach der Fläche, welche von den durch $x_0 y_0 z_0$ gehenden Tangenten in deren stetiger Aufeinanderfolge gebildet wird, und die im allgemeinen eine gewisse Kegelfläche sein muss. Beachtet man nun, dass ξ, η, ζ in Nr. 5) die Koordinaten irgend eines Punktes irgend einer solchen Tangente bedeuten, so sieht man augenblicklich, dass es nur darauf ankommt, die Veränderlichen P und Q aus den Gleichungen 5) und 6) auszuscheiden, was einfach durch Substitution der Werte

$$P = \frac{\eta - y_0}{\xi - x_0}, \quad Q = \frac{\zeta - z_0}{\xi - x_0}$$

in Nr. 6) geschieht. Es ergiebt sich so die Gleichung

$$7) \quad \left.\begin{array}{l} (Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G)\,(\xi - x_0) \\ + (Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H)\,(\eta - y_0) \\ + (Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J)\,(\zeta - z_0) \end{array}\right\} = 0,$$

und diese ist die Gleichung des gesuchten Ortes. Man erkennt hieraus, dass alle durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$ gehenden Tangenten in einer Ebene liegen, welche daher mit Recht den Namen Tangentialebene führt.

Die Gleichung der Berührungsebene vereinfacht sich etwas, wenn man ihr zunächst die Form

$$\begin{gathered} (Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G)\,\xi \\ + (Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H)\,\eta \\ + (Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J)\,\zeta \\ - (Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dy_0z_0 + 2Ez_0x_0 + 2Fx_0y_0) \\ - (Gx_0 + Hy_0 + Jz_0) = 0 \end{gathered}$$

erteilt und hierzu die Gleichung

$$\begin{gathered} Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dy_0z_0 + 2Ez_0x_0 + 2Fx_0y_0 \\ + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Jz_0 + K = 0 \end{gathered}$$

addiert, welche sagt, dass der Punkt $x_0 y_0 z_0$ auf der Fläche liegt; man erhält:

$$8) \quad \left.\begin{array}{l} (Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G)\,\xi \\ + (Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H)\,\eta \\ + (Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J)\,\zeta \\ + \;Gx_0 + Hy_0 + Jz_0 + K \end{array}\right\} = 0.$$

Daraus kann man leicht die früheren speziellen Gleichungen ableiten, welche in den §§ 34...38 für Berührungsebenen entwickelt wurden.

Die Gleichungen der im Punkte $x_0 y_0 z_0$ auf der Tangentialebene errichteten Senkrechten, d. h. die Gleichungen der Normale lassen sich nach § 15 Formel 14) sehr leicht entwickeln; sie sind unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Koordinatensystems

$$9) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\xi - x_0}{Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G} \\ = \dfrac{\eta - y_0}{Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H} \\ = \dfrac{\zeta - z_0}{Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J}. \end{array}\right.$$

Bei einem schiefwinkligen Koordinatensysteme hat man die auf S. 103 angegebenen Formeln zu benutzen. Setzt man zur Abkürzung

$$A_0 = Ax_0 + Fy_0 + Ez_0 + G,$$
$$B_0 = Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H,$$
$$C_0 = Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J,$$
$$\mathfrak{A} = (1 - \alpha^2) A_0 - (\gamma - \alpha\beta) B_0 - (\beta - \gamma\alpha) C_0,$$
$$\mathfrak{B} = (1 - \beta^2) B_0 - (\alpha - \beta\gamma) C_0 - (\gamma - \alpha\beta) A_0,$$
$$\mathfrak{C} = (1 - \gamma^2) C_0 - (\beta - \gamma\alpha) A_0 - (\alpha - \beta\gamma) B_0,$$

worin α, β, γ die Cosinus der Koordinatenwinkel yz, zx, xy bedeuten, so erhält man

10) $$\frac{\xi - x_0}{\mathfrak{A}} = \frac{\eta - y_0}{\mathfrak{B}} = \frac{\zeta - z_0}{\mathfrak{C}}$$

als Gleichungen der Normale durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$.

Wir knüpfen hieran einige allgemeine Erörterungen über die Bestimmung der Tangenten, Berührungsebenen und Normalen an beliebigen Flächen.

α) Tangenten. Bezeichnen wir einen auf irgend welche Weise aus x, y, z und konstanten Grössen zusammengesetzten Ausdruck durch $\varphi(x, y, z)$, so charakterisiert die Gleichung

11) $$\varphi(x, y, z) = 0$$

irgend eine Fläche; ein beliebiger Punkt derselben sei $x_0 y_0 z_0$ und durch diesen soll eine Tangente an die Fläche gelegt werden. Zu diesem Zwecke verbinden wir den Punkt $x_0 y_0 z_0$ mit einem zweiten Punkte $x_1 y_1 z_1$ der nämlichen Fläche und suchen zunächst die Gleichungen der so konstruierten Sekante; wir erhalten

12) $$\eta - y = M(\xi - x), \quad \zeta - z = N(\xi - x),$$

worin

13) $$M = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad N = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}.$$

Da beide Punkte $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ auf der Fläche 11) liegen, so gelten die Gleichungen

14) $$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \varphi(x_1, y_1, z_1) = 0;$$

diese können wir so miteinander kombinieren, dass eine neue Gleichung entsteht, worin M und N vorkommen; letztere Gleichung enthält dann die Bedingung, unter welcher die Gerade 12) die Fläche in den Punkten $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ schneidet. Lassen wir nun den Punkt $x_1 y_1 z_1$ dem Punkte $x_0 y_0 z_0$ näher rücken, so dreht sich die

Sekante um den Punkt $x_0 y_0 z_0$ und geht für $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_1 = z_0$ in die Tangente über. Dieser Grenzlage der Sekante entsprechen gewisse Grenzwerte von M und N, welche sich zwar in Nr. 14) unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen, jedenfalls aber irgend welche endliche Grössen sind, die wir durch P und Q bezeichnen wollen. Nehmen wir auch in der vorhin erwähnten aus Nr. 15) abgeleiteten Bedingungsgleichung $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$ und $z_1 = z_0$, indem wir zugleich P für M und Q für N setzen, so erhalten wir diejenige neue Bedingungsgleichung, welche für den Fall gilt, wo die Gerade

$$15) \qquad \eta - y_0 = P(\xi - x_0), \quad \zeta - z_0 = Q(\xi - x_0)$$

die gegebene Fläche im Punkte $x_0 y_0 z_0$ berührt.

Bei der Anwendung auf die Flächen zweiten Grades haben wir für $x_0 y_0 z_0$ und $x_1 y_1 z_1$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} &Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dy_0 z_0 + 2Ez_0 x_0 + 2Fx_0 y_0 \\ &\qquad + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Jz_0 + K = 0, \\ &Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 + 2Dy_1 z_1 + 2Ez_1 x_1 + 2Fx_1 y_1 \\ &\qquad + 2Gx_1 + 2Hy_1 + 2Jz_1 + K = 0, \end{aligned}$$

und um hieraus eine Kombination zu bilden, welche nachher die Einführung von M und N gestattet, ziehen wir die erste Gleichung von der zweiten ab, benutzen in den ersten drei Gliedern die identische Gleichung

$$t_1^2 - t_0^2 = (t_1 + t_0)(t_1 - t_0),$$

in den drei folgenden die gleichfalls identische Gleichung

$$u_1 v_1 - uv = u_1(v_1 - v_0) + v_0(u_1 - u_0),$$

und erhalten auf diesem Wege

$$\begin{aligned} &A(x_1 + x_0)(x_1 - x_0) + B(y_1 + y_0)(y_1 - y_0) + C(z_1 + z_0)(z_1 - z_0) \\ &\quad + 2D[y_1(z_1 - z_0) + z_0(y_1 - y_0)] \\ &\quad + 2E[z_1(x_1 - x_0) + x_0(z_1 - z_0)] \\ &\quad + 2F[x_1(y_1 - y_0) + y_0(x_1 - x_0)] \\ &\quad + 2G(x_1 - x_0) + 2H(y_1 - y_0) + 2J(z_1 - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Die Division mit $x_1 - x_0$ bietet hier Gelegenheit zur Substitution von M und N; es wird nämlich

$$\begin{aligned} &A(x_1 + x_0) + B(y_1 + y_0)M + C(z_1 + z_0)N \\ &+ 2D(y_1 N + z_0 M) + 2E(z_1 + x_0 N) + 2F(x_1 M + y_0) \\ &\qquad + 2G + 2HM + 2JN = 0. \end{aligned}$$

Für $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$, $M = P$, $N = Q$ verwandelt sich diese Gleichung nach Hebung von 2 in

$$\begin{gathered} Ax_0 + By_0P + Cz_0Q \\ + D(y_0Q + z_0P) + E(z_0 + x_0Q) + F(x_0P + y_0) \\ + G + HP + JQ = 0, \end{gathered}$$

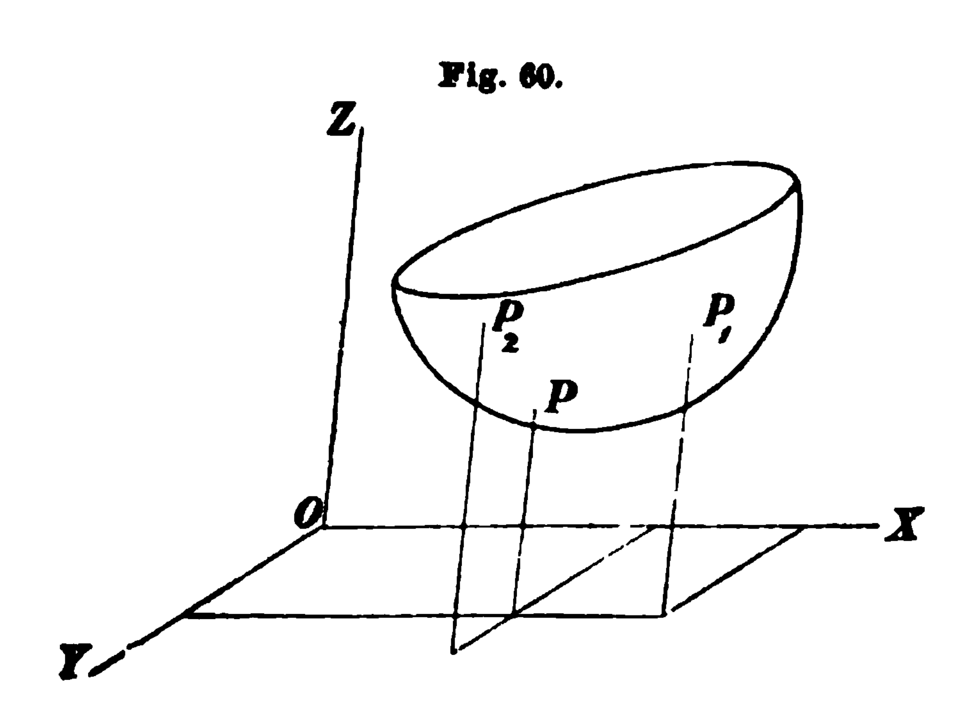
und dies ist die Bedingung, unter welcher die Gerade 15) die Fläche 1) im Punkte $x_0y_0z_0$ berührt. Die Identität der vorstehenden Gleichung mit Nr. 6) wird man leicht bemerken.

β) Tangentialebenen. Sowie wir vorhin die berührende Gerade als diejenige letzte Sekante betrachteten, deren Durchschnitte mit der Fläche in einen Punkt zusammengefallen sind, so können wir auch die berührende Ebene aus einer schneidenden Ebene herleiten, wenn wir die von letzterer Ebene abgeschnittene Kappe der Fläche sich zu einem Punkte zusammenziehen lassen. Sei wiederum

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der gegebenen Fläche und $x_0y_0z_0$ ein auf ihr liegender Punkt P_0, an welchen eine Tangentialebene gelegt werden soll. Ausser diesem Punkte wählen wir auf der Fläche noch zwei andere Punkte P_1 und P_2, deren erster dasselbe y und deren zweiter dasselbe x wie P_0 besitzt, und die wir demgemäss mit $x_1y_0z_1$ und $x_0y_2z_2$ bezeichnen. Für die durch alle drei Punkte gehende Ebene finden wir ohne Mühe die Gleichung

Fig. 60.



$$16)\qquad S(\xi - x_0) + T(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0,$$

worin

$$17)\qquad S = \frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}, \quad T = \frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0}.$$

Dabei ist zu berücksichtigen, dass die erwähnten Punkte auf der Fläche liegen, dass also die Gleichungen

$$18)\quad \varphi(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \varphi(x_1, y_0, z_1) = 0, \quad \varphi(x_0, y_2, z_2) = 0$$

bestehen, woraus man die Werte von S und T herleiten kann; doch ist dies nicht notwendig, es reicht hin, die Gleichungen 19)

zu zwei neuen Gleichungen so zu verbinden, dass S und T darin vorkommen. Lassen wir jetzt die Punkte P_1 und P_2 dem Punkte P_0 immer näher rücken, so dreht sich die schneidende Ebene um den Punkt P_0 und geht zuletzt für $x_1 = x_0$, $y_2 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$ in die Tangentialebene über. Dieser Grenzlage der schneidenden Ebene entsprechen gewisse Grenzwerte von S und T, welche mit U und V bezeichnet werden mögen. Schreiben wir also in Nr. 17) U und V für S und T und setzen in den aus Nr. 19) abgeleiteten Bedingungsgleichungen $x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$, $S = U$, $T = V$, so erhalten wir die beiden neuen Bedingungen, unter welchen die Ebene

$$19) \qquad U(\xi - x_0) + V(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

die gegebene Fläche berührt.

Bei der Anwendung auf die Flächen zweiten Grades gelten für $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ die Gleichungen

$$\begin{gathered}
Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dy_0z_0 + 2Ez_0x_0 + 2Fx_0y_0 \\
+ 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Jz_0 + K = 0, \\
Ax_1^2 + By_0^2 + Cz_1^2 + 2Dy_0z_1 + 2Ez_1x_1 + 2Fx_1y_0 \\
+ 2Gx_1 + 2Hy_0 + 2Jz_1 + K = 0, \\
Ax_0^2 + By_2^2 + Cz_2^2 + 2Dy_2z_2 + 2Ez_2x_0 + 2Fx_0y_2 \\
+ 2Gx_0 + 2Hy_2 + 2Jz_2 + K = 0.
\end{gathered}$$

Wir subtrahieren die erste von der zweiten, zerlegen wie vorhin, dividieren mit $x_1 - x_0$ und substituieren S; dies giebt

$$\begin{gathered}
A(x_1 + x_0) + C(z_1 + z_0)S + 2Dy_0S \\
+ 2E(z_1 + x_0S) + 2Fy_0 + 2G + 2JS = 0.
\end{gathered}$$

Ziehen wir ferner die erste der vorigen drei Gleichungen von der letzten ab, dividieren nachher mit $y_2 - y_0$ und substituieren T, so erhalten wir

$$\begin{gathered}
B(y_2 + y_0) + C(z_2 + z_0)T + 2D(y_2T + z_0) \\
+ 2Ex_0T + 2Fx_0 + 2H + 2JT = 0.
\end{gathered}$$

Für $x_1 = x_0$, $y_2 = y_0$, $z_2 = z_1 = z_0$, $S = U$, $T = V$ werden diese Gleichungen zu den folgenden

$$\left.\begin{aligned}
Ax_0 + Cz_0U + Dy_0U \\
+ E(z_0 + x_0U) + Fy_0 + G + JU
\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
By_0 + Cz_0V + D(y_0V + z_0) \\
+ Ex_0V + Fx_0 + H + JV
\end{aligned}\right\} = 0,$$

und daraus findet man

$$U = -\frac{Ax_0 + Fy_5 + Ez_0 + G}{Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J},$$
$$V = -\frac{Fx_0 + By_0 + Dz_0 + H}{Ex_0 + Dy_0 + Cz_0 + J}.$$

Nach Substitution dieser Werte bringt man die Gleichung 19) leicht auf dieselbe Form, unter welcher die Gleichung der Tangentialebene in Nr. 7) dargestellt wurde.

γ) Normalen. Nachdem man die Gleichung der Berührungsebene auf dem soeben angedeuteten Wege entwickelt hat, ergeben sich die Gleichungen der Normalen mittels der Formeln des § 15, wie dies schon vorhin gezeigt worden ist.

§ 42.
Kubatur der Flächen zweiten Grades.

Wenn es darauf ankommt, das Volumen eines ganz oder teilweis von krummen Flächen begrenzten Körpers zu ermitteln, so kann man ein ähnliches Verfahren in Anwendung bringen wie in der analytischen Geometrie der Ebene bei der Quadratur krummlinig begrenzter Ebenen. Durch eine Reihe paralleler Schnitte zerlegt man vorerst das Volumen in eine Reihe von Schichten und bestimmt die Flächen der entstandenen Querschnitte; jede solche Schicht wird von zwei Querschnitten, etwa Q' und Q'', begrenzt, deren Entfernung ε heissen möge. Konstruiert man zwei Cylinder, von denen einer Q', der andere Q'' zur Basis hat, und deren gemeinschaftliche Höhe (oder Dicke) ε ist, so wird in den meisten Fällen der eine Cylinder die Schicht umschliessen, der andere dagegen von der Schicht umschlossen werden, so dass das Volumen der Schicht zwischen den Cylinderinhalten $Q'\varepsilon$ und $Q''\varepsilon$ liegt. Durch Addition der Volumina aller umschriebenen und aller eingeschriebenen Cylinder erhält man zwei Volumina Σ' und Σ'', zwischen denen das gesuchte Volumen enthalten ist, und es kommt jetzt darauf an, die Grössen Σ' und Σ'' einander immer näher zu bringen. Bezeichnet n die Anzahl der Schichten, in welche das Volumen zerlegt wurde, so besteht jede der Summen Σ' und Σ'' aus n-Gliedern, daraus lässt sich leicht der Betrag von $\Sigma' - \Sigma''$ herleiten und zwar ist derselbe einerlei mit der Differenz zwischen dem ersten eingeschriebenen und dem letzten umschriebenen oder zwischen dem ersten umschriebenen und dem letzten eingeschriebenen Cylinder. Nähert

sich nun bei unendlich wachsenden n, d. h. wenn die Anzahl der Schichten unausgesetzt zunimmt und folglich die Dicke jeder einzelnen Schicht immer geringer wird, die Differenz $\Sigma' - \Sigma''$ der Grenze Null, so ist dies ein Zeichen, dass die Summen Σ' und Σ'' nach einer und derselben Grenze streben; diese gemeinschaftliche Grenze kann aber keine andere als das gesuchte Volumen sein, weil letzteres immer zwischen Σ' und Σ'' enthalten bleibt. Dieses Prinzip wollen wir zur Kubatur der Zonen und Kappen von Flächen zweiten Grades anwenden.

Das Ellipsoid. Beziehen wir die Fläche auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen mit den Achsen des Ellipsoides zusammenfallen, so ist wie in § 34 der in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}, \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2},$$

also die Fläche des Querschnittes

$$= \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 - h^2).$$

Um den kubischen Inhalt V einer Zone zu finden, welche von der Ebene xy, einer in der Höhe z dazu parallel gelegten Ebene und im übrigen von der Fläche begrenzt wird, teilen wir die Höhe z der Zone in n gleiche Strecken, legen durch jeden Teilpunkt eine Ebene parallel xy und erhalten auf diese Weise n Schichten, deren jede in horizontaler Richtung von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt. Die untere Begrenzungsebene ist jedesmal die grössere, und da die Fläche sich um so mehr von allen Seiten her zusammenzieht, je höher die Querschnitte hinaufrücken, so beträgt das Volumen irgend einer Schicht weniger als das Volumen des umschriebenen elliptischen Cylinders, dessen Basis die Basis der Schicht ist, und mehr als das Volumen des eingeschriebenen Cylinders, dessen Querschnitt die obere Begrenzungsfläche der Schicht ist. Demgemäss gelten folgende Beziehungen:

$$V < \pi \frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \cdots$$
$$\cdots + \pi \frac{ab}{c^2}\left[c^2 - \left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n},$$

$$V > \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2-\left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}+\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2-\left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}+\cdots$$
$$\cdots+\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2-\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen ist

$$\pi\frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n}-\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2-\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n}=\pi\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{z^3}{n},$$

und da sich dieser Ausdruck für unendlich wachsende n der Grenze Null nähert, so haben die beiden Cylindersummen einen und denselben Grenzwert, welcher den Betrag von V darstellt. Zufolge dieser Bemerkung brauchen wir nur den Grenzwert der einen Cylindersumme zu bestimmen, und wenn wir dazu die erste wählen, so ist bei gehöriger Zusammenziehung

$V =$ dem Grenzwerte von:

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2-\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}\right]z$$

und nach einem bekannten arithmetischen Satze

$$V=\pi\frac{ab}{c^2}\left(c^2z-\tfrac{1}{3}z^3\right). \tag{1}$$

Für $z = h$ ergiebt sich hieraus $\frac{2}{3}\pi abc$ als Volumen des halben, mithin

$$E=\tfrac{4}{3}\pi abc \tag{2}$$

als Volumen des ganzen Ellipsoides. Die Formel für den Kugelinhalt ist, wie man sieht, ein sehr spezieller Fall der vorstehenden.

Ist die eine Begrenzungsebene einer Zone um z_0, die andere um z_1 von der xy-Ebene entfernt, so kann das Volumen der Zone als der Unterschied der Inhalte zweier Zonen der vorigen Art betrachtet werden; für $z_1 > z_0$ ist hiernach das gesuchte Volumen

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2(z_1-z_0)-\tfrac{1}{3}(z_1^3-z_0^3)\right]. \tag{3}$$

Handelt es sich um die Inhalte von Zonen, deren Begrenzungsebenen auf einer anderen als der z-Achse senkrecht stehen, so bedarf es keiner neuen Rechnung, sondern nur einer Buchstabenvertauschung; für eine Zone, deren Begrenzungsebenen senkrecht auf der y-Achse in den Entfernungen y_0 und $y_1 > y_0$ vom Mittelpunkte stehen, hat man

4) $$\pi \frac{ac}{b^2}\left[b^2(y_1 - y_0) - \frac{1}{3}(y_1^3 - y_0^3)\right],$$

und entsprechend für eine Zone, deren Begrenzungsebenen senkrecht auf der x-Achse in den Entfernungen x_0 und $x_1 > x_0$ vom Mittelpunkte stehen:

5) $$\pi \frac{bc}{a^2}\left[a^2(x_1 - x_0) - \frac{1}{3}(x_1^3 - x_0^3)\right].$$

Durch Subtraktion der Zone 1) von dem halben Ellipsoide erhält man eine Kappe von der Höhe $c - z$, die kurz z' heissen möge; das Volumen dieser Kappe ist:

6) $$\pi \frac{ab}{c^2}\left(cz'^2 - \frac{1}{3}z'^3\right).$$

Steht die Begrenzungsebene der Kappe senkrecht auf der y-Achse in der Entfernung y' vom Scheitel, so ist der Inhalt der Kappe:

7) $$\pi \frac{ac}{b^2}\left(by'^2 - \frac{1}{3}y'^3\right);$$

endlich entspricht das Volumen

8) $$\pi \frac{bc}{a^2}\left(ax'^2 - \frac{1}{3}x'^3\right)$$

dem Falle, wo die Begrenzungsebene der Kappe senkrecht zur x-Achse und um x' vom Scheitel der Fläche entfernt ist.

Das einfache Hyperboloid. Unter Voraussetzung desselben Koordinatensystems, wie in § 35, ist ein in der Höhe parallel zur xy-Ebene gelegter Querschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + h^2}, \quad \frac{b}{c}\sqrt{c^2 + h^2},$$

folglich der Flächeninhalt des Schnittes

$$= \pi \frac{ab}{c^2}(c^2 + h^2).$$

Um das Volumen V einer Zone zu finden, welche von der Ebene xy, einer in der Höhe z parallel dazu gelegten Ebene und im übrigen von der Fläche begrenzt wird, teilen wir z in n gleiche Strecken, legen durch jeden Teilpunkt eine Ebene parallel xy und erhalten so n Schichten, deren jede in horizontaler Richtung von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird.. Die untere Ebene ist jedesmal die kleinere, und da die Fläche sich nach oben zu allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer Schicht mehr als das

Volumen des eingeschriebenen elliptischen Cylinders, dessen Basis die Basis der Schicht ist, und weniger als das Volumen des umschriebenen Cylinders, welcher die obere Begrenzungsebene der Schicht zum Querschnitt hat. Demgemäss gelten die Relationen

$$V > \pi \frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 + \left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \dots$$
$$\dots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n},$$
$$V < \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{2z}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} + \dots$$
$$\dots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2+\left(\frac{nz}{n}\right)^2\right]\frac{z}{n} - \pi\frac{ab}{c^2}[c^2]\frac{z}{n} = \pi\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{z^3}{n},$$

und da sich dieser Ausdruck für unendlich wachsende n der Grenze Null nähert, so haben beide Cylindersummen einen und denselben Grenzwert, welcher den Betrag von V angiebt. Es ist daher, wenn wir bei der ersten Cylindersumme stehen bleiben und diese möglichst zusammenziehen,

$$V = \text{dem Grenzwerte von}$$
$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[c^2 + \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2}{n^3}z^2\right]z,$$

d. i.

$$V = \pi\frac{ab}{c^2}\left(c^2 z + \tfrac{1}{3}z^3\right). \tag{9}$$

Der Spezialwert $z = c$ giebt $V = \frac{4}{3}\pi abc$ und damit den bemerkenswerten Satz, dass das Volumen der Zone von der Höhe c gleich dem Volumen eines mit den Halbachsen a, b, c versehenen Ellipsoides ist.

Konstruiert man aus a, b, c ein Hyperboloid, dessen Zone von der Höhe c das Volumen H besitzt, einen Cylinder C, ein halbes Ellipsoid E und einen Kegel K (den Asymptotenkegel von H), so hat man

$$K = \tfrac{1}{3}\pi abc, \quad E = \tfrac{2}{3}\pi abc, \quad C = \pi abc, \quad H = \tfrac{4}{3}\pi abc,$$

folglich

$$K:E:C:H = 1:2:3:4,$$

und dies ist die Erweiterung des Archimedischen Satzes von Kegel, Halbkugel und Cylinder.

Eine Zone, deren Begrenzungsebenen parallel xy in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0$ liegen, kann als Differenz zweier Zonen der vorigen Art betrachtet werden; ihr Volumen ist daher

$$10) \qquad \pi \frac{ab}{c^2} [c^2(z_1 - z_0) + \tfrac{1}{3}(z_1^3 - z_0^3)].$$

Das geteilte Hyperboloid. Dieselben Bezeichnungen wie in § 36 vorausgesetzt, ist ein in der Höhe $h > c$ parallel zur xy-Ebene gelegter Querschnitt einer Ellipse mit den Halbachsen

$$\frac{a}{c}\sqrt{h^2 - c^2}, \quad \frac{b}{c}\sqrt{h^2 - c^2},$$

mithin der Flächeninhalt des Schnittes

$$= \pi \frac{ab}{c^2}(h^2 - c^2).$$

Nennen wir h' den Abstand des Schnittes vom nächsten Scheitel des Hyperboloides, so ist $h = c + h'$, folglich die Querschnittsfläche

$$= \pi \frac{ab}{c^2}(2ch' + h'^2).$$

Um das Volumen V einer Kappe zu finden, welche durch eine in der Höhe $z > c$ parallel zu xy gelegte Ebene abgeschnitten wird, setzen wir die Höhe der Kappe

$$z - c = z', \quad \text{also} \quad z = c + z',$$

teilen z' in n gleiche Strecken und legen durch jeden Teilpunkt eine Ebene parallel xy; wir erhalten auf diese Weise n Schichten, deren jede von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z'}{n}$ besitzt. Die untere Begrenzungsebene ist jedesmal die kleinere und da das Hyperboloid sich nach oben zu allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen elliptischen Cylinders, welcher die untere Begrenzungsebene zur Basis hat, und weniger als das Volumen des umschriebenen Cylinders, dessen Querschnitt die obere Begrenzungsebene ist. Demgemäss gelten folgende Relationen:

$$V > \pi\frac{ab}{c^2}[0]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{2z'}{n} + \left(\frac{2z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{(n-1)z'}{n} + \left(\frac{(n-1)z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n},$$

$$V < \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{z'}{n} + \left(\frac{z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{2z'}{n} + \left(\frac{2z'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{nz'}{n} + \left(\frac{nz'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n};$$

die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{nz'}{n} + \left(\frac{nz'}{n}\right)^2\right]\frac{z'}{n} = \pi\frac{ab}{c^2}\cdot\frac{2cz' + z'^2}{n}z'$$

und da dieser Ausdruck bei unendlich wachsenden n der Grenze Null zueilt, so haben die beiden obigen Cylindersummen eine gemeinschaftliche Grenze $= V$. Bleiben wir bei der ersten Summe stehen, so ist

$$V = \text{dem Grenzwerte von:}$$

$$\pi\frac{ab}{c^2}\left[2c\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2}z' + \frac{1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^3}z'^2\right]z'$$

und zwar nach bekannten Sätzen

$$11)\qquad V = \pi\frac{ab}{c^2}\left(cz'^2 + \tfrac{1}{3}z'^3\right),$$

oder bei Restitution des Wertes von z':

$$12)\qquad V = \pi\frac{ab}{c^2}\left(\tfrac{2}{3}c^3 - c^2z + \tfrac{1}{3}z^3\right).$$

Der Spezialwert $z = 2c$ oder $z' = c$ giebt $V = \frac{4}{3}\pi abc$, und hierin liegt der bemerkenswerte Satz, dass das Volumen der Kappe von der Höhe c mit dem Volumen der Zone übereinkommt, welche in dem einfachen Hyperboloide, von der Kehlellipse ab gerechnet, die nämliche Höhe besitzt.

Eine Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0 > c$ liegen, kann als Differenz zweier Kappen betrachtet werden und hat demnach das Volumen

$$13)\qquad \pi\frac{ab}{c^2}\left[-c^2(z_1 - z_0) + \tfrac{1}{3}(z_1^3 - z_0^3)\right].$$

Aus dem Vergleiche mit der zwischen denselben Ebenen enthaltenen Zone des einfachen Hyperboloides folgt, dass die Differenz beider Zonen (ein ringförmiger Körper) einem elliptischen Cylinder gleich

ist, welcher die Kehlellipse des einfachen Hyperboloides zur Basis und die doppelte Höhe der einen Zone zur Höhe hat.

Das elliptische Paraboloid. Der in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte elliptische Querschnitt besitzt nach § 37 die Halbachsen $\sqrt{2ah}$ und $\sqrt{2bh}$, mithin den Flächeninhalt

$$2\pi\sqrt{ab}\,.\,h;$$

handelt es sich um das Volumen V einer Kappe von der Höhe z, so teilt man z wieder in n gleiche Strecken, legt durch jeden Teilpunkt eine Ebene parallel xy und zerfällt somit die Kappe in n Schichten, deren jede von zwei Ellipsenflächen begrenzt wird und die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt. Zufolge des Umstandes, dass sich das Paraboloid nach oben zu allseitig erweitert, ist jede solche Schicht grösser als der eingeschriebene und kleiner als der umschriebene elliptische Cylinder, mithin

$$V > 2\pi\sqrt{ab}\,0\,\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{z}{n}\,\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{2z}{n}\,\frac{z}{n} + \cdots$$
$$\cdots + 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{(n-1)z}{n}\,\frac{z}{n},$$

$$V < 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{z}{n}\,\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{2z}{n}\,\frac{z}{n} + 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{3z}{n}\,\frac{z}{n} + \cdots$$
$$\cdots + 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{nz}{n}\,\frac{z}{n}.$$

Die Differenz beider Cylindersummen beträgt

$$2\pi\sqrt{ab}\,\frac{nz}{n}\,\frac{z}{n} = 2\pi\sqrt{ab}\,\frac{z^2}{n}$$

und hat für unendlich wachsende n die Null zur Grenze; beide Cylindersummen nähern sich daher einer gemeinschaftlichen Grenze $= V$, d. h. es ist, wenn wir die erste Summe betrachten,

$V =$ dem Grenzwerte von:

$$2\pi\sqrt{ab}\,\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}\,z^2$$

oder

$$V = \pi\sqrt{ab}\,.\,z^2. \tag{14}$$

Erteilt man dieser Gleichung die Form

$$V = \tfrac{1}{2}\,.\,2\pi\sqrt{abz}\,.\,z$$

und erinnert sich an die Bedeutung von $2\pi\sqrt{abz}$, so hat man den Satz, dass der Inhalt der betrachteten Kappe die Hälfte vom

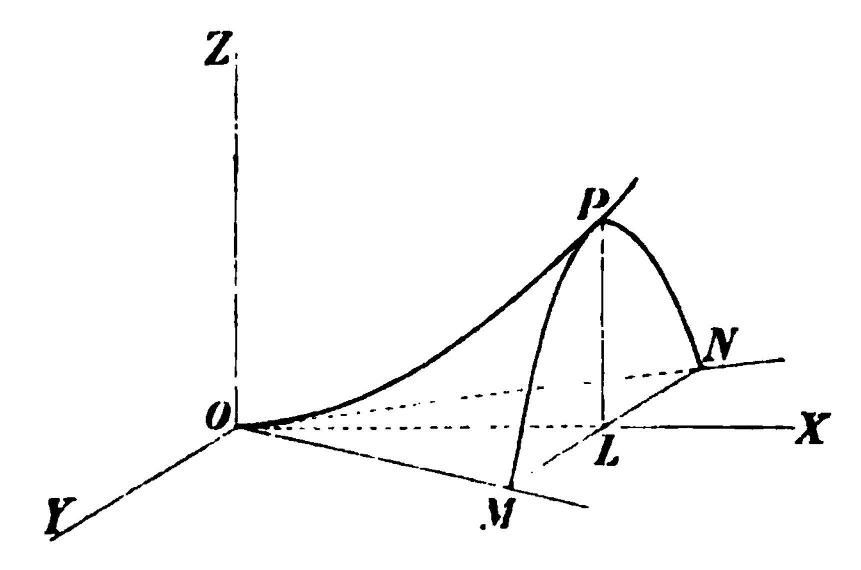
Inhalte des umschriebenen elliptischen Cylinders beträgt. Dieser Satz darf als das stereometrische Korrelat des Archimedischen Satzes von der Parabel gelten.

Der Inhalt einer Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene in den Entfernungen z_0 und $z_1 > z_0$ liegen, ergiebt sich hieraus

$$15) \qquad = \pi \sqrt{ab}\,(z_1^2 - z_0^2).$$

Das hyperbolische Paraboloid. Um einen quadrierbaren Querschnitt der Fläche zu erhalten, legen wir in der Entfernung $OL = l$ eine Ebene parallel zur xy-Ebene durch das Paraboloid; der entstehende Vertikalschnitt ist eine durch die Gleichung

Fig. 61.



$$\frac{l^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 2z$$

charakterisierte Parabel MPN. Sie schneidet die xy-Ebene in zwei Punkten M und N, für welche $z = 0$ und $y = LM$ oder $= LN$ ist; dies giebt

$$LM = +l\sqrt{\frac{b}{a}}, \qquad LN = -l\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Diese Parabel begegnet ferner der xz-Ebene in einem Punkte P (ihrem Scheitel), dessen $y = 0$ und dessen $z = LP$ ist; woraus folgt

$$LP = \frac{1}{2}\frac{l^2}{a}.$$

Der bekannte Satz des Archimedes lehrt nun den Flächeninhalt des Querschnittes kennen, nämlich $MPN = \frac{4}{3} LM \,.\, LP$, d. i. vermöge der angegebenen Werte:

$$\frac{2}{3}\frac{l^3}{a}\sqrt{\frac{b}{a}} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,l^3.$$

Nach dieser Vorbereitung schreiten wir zur Inhaltsbestimmung des körperlichen Raumes V, welcher von der xy-Ebene, von einem in der Entfernung x parallel zur yz-Ebene gelegten Querschnitte

und im übrigen von dem hyperbolischen Paraboloide begrenzt wird. Zu diesem Zwecke teilen wir x in n gleiche Strecken, legen durch jeden Teilpunkt eine Ebene parallel yz und zerfällen somit das Volumen in n Schichten, deren jede von zwei parabolischen Querschnitten begrenzt wird und $\frac{x}{n}$ zur Dicke hat. Da sich die Fläche in der Richtung der x allseitig erweitert, so beträgt das Volumen einer solchen Schicht mehr als das Volumen des eingeschriebenen und weniger als das Volumen des umschriebenen parabolischen Cylinders; diese Bemerkung führt zu den Relationen

$$V > \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,0\,\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \dots$$
$$\dots + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^3\frac{x}{n},$$

$$V < \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{2x}{n}\right)^3\frac{x}{n} + \dots$$
$$\dots + \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{nx}{n}\right)^3\frac{x}{n}.$$

Der Unterschied beider Cylindersummen ist

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\left(\frac{nx}{n}\right)^3\frac{x}{n} = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\frac{x^4}{n}$$

und hat für unendlich wachsende n die Null zur Grenze. Beide Cylindersummen besitzen demnach eine gemeinschaftliche Grenze $= V$ und zwar ist, wenn wir nur die erste Summe beibehalten,

$V =$ dem Grenzwerte von

$$\frac{2}{3}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3}{n^4}\,x^4$$

oder nach einem bekannten Satze

$$16)\qquad V = \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}\,x^4;$$

das Volumen V ist daher der vierte Teil vom Volumen des umschriebenen parabolischen Cylinders.

Für das Volumen einer Zone, welche von zwei in den Entfernungen x_0 und $x_1 > x_0$ parallel zur yz-Ebene gelegten Querschnitten, von der xy-Ebene und ausserdem von der Fläche begrenzt wird, ergiebt sich hiernach

$$17)\qquad \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{a^2}(x_1^4 - x_0^4).$$

Besteht dagegen die Begrenzung der Zone aus zwei in den Entfernungen y_0 und $y_1 > y_0$ parallel zur xz-Ebene gelegten Querschnitten und im übrigen wieder aus der xy-Ebene und dem hyperbolischen Paraboloid, so stellt der Ausdruck

$$18)\qquad \frac{1}{6}\frac{\sqrt{ab}}{b^2}(y_1^4 - y_0^4)$$

das Volumen jener Zone dar.

Neuntes Kapitel.

Flächen verschiedener Gattung.

§ 43.

Erzeugung der Flächen durch Kurven.

Nach Analogie der in den §§ 31, 32 und 33 vollständig mitgeteilten Diskussion der allgemeinen Gleichung der Flächen zweiten Grades ist zwar eine Untersuchung über die möglichen verschiedenen Flächen dritten Grades ausführbar, doch kann dieselbe wegen ihrer Weitläufigkeit hier nicht mitgeteilt werden; dasselbe gilt in noch weiterem Masse für die Flächen vierten oder höheren Grades. Wir beschränken uns daher über den zweiten Grad hinaus auf die Betrachtung einzelner Flächen, welche entweder durch besondere geometrische Eigenschaften oder durch ihr Vorkommen bei physikalischen Fragen die Aufmerksamkeit auf sich ziehen. Hierin liegt der Grund, warum wir bei der nachfolgenden Besprechung von Flächen verschiedener Gattung nicht mehr von deren Gleichungen ausgehen, sondern umgekehrt aus der Entstehungsweise jeder einzelnen Fläche ihre Gleichung ableiten.

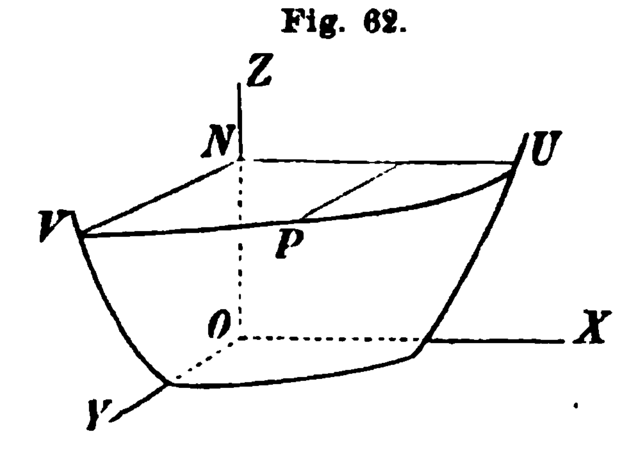
Wir erinnern zunächst an den Umstand, dass jede der vier ersten Flächen zweiten Grades durch eine bewegliche Ellipse, und das hyperbolische Paraboloid durch eine veränderliche Hyperbel beschrieben werden kann, wenn die betreffende Kurve parallel einer Ebene (xy) fortbewegt wird und gleichzeitig ihre Scheitel auf zwei gegebenen Linien bleiben; allgemeiner aufgefasst liegt hierin ein Mittel zur Erzeugung beliebiger Flächen. Bewegt sich nämlich eine ihrer Natur nach bestimmte ebene Kurve s so, dass sie einer festen Ebene parallel bleibt und ausserdem zwei gegebene Linien s_1 und

s_2 schneidet, so beschreibt s im allgemeinen eine Fläche, deren Gleichung sich aus den vorigen Bedingungen herleiten lässt. Wir wollen einige Fälle der Art betrachten.

1. Elliptische Paraboloide. Wir denken uns drei auf einander senkrechte Ebenen und in zweien derselben beliebige parabolische Kurven konstruiert; lassen wir nun eine veränderliche Ellipse sich so bewegen, dass ihre Ebene der dritten von jenen Ebenen parallel bleibt und zugleich ihre Scheitel auf den gegebenen Parabeln fortrücken, so beschreibt die Peripherie der Ellipse eine Fläche, die im allgemeinen ein elliptisches Paraboloid heissen mag. Zu ihrer Gleichung gelangt man auf folgende Weise.

Die beiden ersten Ebenen wählen wir zu Koordinatenebenen der xz und yz, und denken uns die beiden Parabeln durch die beiden allgemeinen Gleichungen

Fig. 62.



$$1) \qquad x'' = \varphi(z), \quad y''' = \psi(z)$$

bestimmt, wobei in Beziehung auf die Figur $NU = x''$, $NV = y'''$ und $ON = z$ ist. Für jeden auf der Ellipse UPV, also auch auf der Fläche liegenden Punkt P, dessen Koordinaten x, y, z heissen mögen, gilt weiter die Ellipsengleichung

$$2) \qquad \left(\frac{x}{x''}\right)^2 + \left(\frac{y}{y'''}\right)^2 = 1,$$

und hier bedarf es nur der Substitution von x'' und y''' aus Nr. 1), um sofort

$$3) \qquad \left(\frac{x}{\varphi(z)}\right)^2 + \left(\frac{y}{\psi(z)}\right)^2 = 1$$

als Gleichung der Fläche zu erhalten.

So hat man z. B., wenn die beiden Leitkurven semikubische Parabeln und durch die Gleichungen

$$x'' = \sqrt{\frac{z^3}{a}}, \quad y''' = \sqrt{\frac{z^3}{b}}$$

bestimmt sind, als Gleichung der Fläche:

$$4) \qquad ax^2 + by^2 = z^3;$$

letztere ist demnach ein elliptisches Paraboloid dritten Grades. Die Gestalt desselben erkennt man leicht aus seiner Entstehungs-

weise; die Fläche erweitert sich allseitig in der Richtung der positiven z, läuft für $z = 0$ in eine Spitze aus und hört bei negativen z zu existieren auf. Die zur xy-Ebene nicht parallelen Schnitte sind Kurven des dritten Grades. Was die berührende Ebene in einem Punkte der Fläche betrifft, so ist diese nach dem in § 41 β angegebenen Verfahren leicht zu bestimmen. Für eine Ebene, welche mit der Fläche die Punkte $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ gemein hat, gilt nämlich die Gleichung

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0}(\xi - x_0) + \frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

und zwar ist dabei

$$ax_0^2 + by_0^2 = z_0^3,$$
$$ax_1^2 + by_0^2 = z_1^3,$$
$$ax_0^2 + by_2^2 = z_2^3.$$

Die Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung giebt

$$a(x_1 + x_0)(x_1 - x_0) = (z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2)(z_1 - z_0),$$

woraus

$$\frac{z_1 - z_0}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 + x_0)}{z_1^2 + z_1 z_0 + z_0^2};$$

auf analoge Weise folgt aus der Verbindung der ersten mit der dritten Gleichung

$$\frac{z_2 - z_0}{y_2 - y_0} = \frac{b(y_2 + y_0)}{z_2^2 + z_2 z_0 + z_0^2};$$

substituiert man diese Werte in die obige Gleichung der Schnittebene und lässt nachher die Punkte $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_0 z_1$, $x_0 y_2 z_2$ zusammenfallen, so erhält man als Gleichung der berührenden Ebene:

$$\frac{2ax_0}{3z_0^2}(\xi - x_0) + \frac{2by_0}{3z_0^2}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

oder

$$2ax_0\xi + 2by_0\eta - 3z_0^2\zeta$$
$$= -3z_0^3 + 2(ax_0^2 + by_0^2) = -z_0^3.$$

Bei Weglassung der nicht mehr nötigen Indices ist

$$-\frac{2ax}{z^3}\xi - \frac{2by}{z^3}\eta + \frac{3}{z}\zeta = 1,$$

und man erkennt hieraus, dass die durch den Punkt xyz gehende Tangentialebene von den Koordinatenachsen die Strecken

$$-\frac{z^3}{2ax}=-\frac{1}{2}\frac{x''^2}{x},\quad -\frac{z^3}{2by}=-\frac{1}{2}\frac{y'''^2}{y},\quad +\frac{1}{3}z$$

abschneidet, deren Konstruktion sehr einfach sein würde.

Auch die Kubatur einer Kappe oder Zone unserer Fläche unterliegt keiner Schwierigkeit. Ein in der Höhe h parallel zur xy-Ebene geführter Querschnitt ist eine Ellipse und deren Fläche

$$=\pi\sqrt{\frac{h^3}{a}}\cdot\sqrt{\frac{h^3}{b}}=\frac{\pi}{\sqrt{ab}}h^3;$$

denken wir uns derartige Schnitte in den Höhen $0,\ \frac{z}{n},\ \frac{2z}{n},\dots\frac{(n-1)z}{n},\ \frac{nz}{n}$ gelegt, so zerfällt die Kappe von der Höhe z in n Schichten, deren jede die Höhe $\frac{z}{n}$ besitzt und grösser als der eingeschriebene, dagegen kleiner als der umschriebene elliptische Cylinder ist. Für das Volumen V der Kappe gelten demzufolge die Ungleichungen

$$V>\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\,0\,\frac{z}{n}+\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\frac{z}{n}\right)^3\frac{z}{n}+\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\frac{2z}{n}\right)^3\frac{z}{n}+\dots$$
$$\dots+\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\frac{(n-1)z}{n}\right)^3\frac{z}{n},$$

$$V<\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\frac{z}{n}\right)^3\frac{z}{n}+\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\frac{2z}{n}\right)^3\frac{z}{n}+\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\frac{3z}{n}\right)^3\frac{z}{n}+\dots$$
$$\dots+\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\left(\frac{nz}{n}\right)^3\frac{z}{n};$$

die Differenz der beiden Cylindersummen ist

$$\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\,\frac{z^4}{n}$$

und nähert sich für unendlich wachsende n der Grenze Null, woraus folgt, dass die obigen Cylindersummen einer und derselben Grenze zustreben, welche V selber sein muss. Demnach ist, wenn wir bei der ersten Summe bleiben,

$$V = \text{dem Grenzwerte von:}$$
$$\frac{\pi}{\sqrt{ab}}\,\frac{1^3+2^3+3^3+\dots+(n-1)^3}{n^4}\,z^4,$$

d. h. nach einem bekannten arithmetischen Satze

$$V = \frac{1}{4}\pi \frac{z^4}{\sqrt{ab}}.$$

Hieraus ergiebt sich das Volumen einer Zone, deren Begrenzungsebenen parallel zur xy-Ebene liegen, indem man dasselbe als Differenz der Volumina zweier Kappen betrachtet.

Nach dem vorigen kann man leicht elliptische Paraboloide beliebiger Grade konstruieren; wählt man z. B. als Leitkurven zwei gewöhnliche Parabeln, deren Achsen die x- und y-Achse sind und welche den Koordinatenanfang zum gemeinschaftlichen Scheitel haben, so treten an die Stelle der Gleichungen 1) die folgenden:

$$x'' = \frac{z^2}{a}, \quad y''' = \frac{z^2}{b},$$

und hieraus ergiebt sich als Gleichung der Fläche

$$a^2x^2 + b^2y^2 = z^4;$$

letztere ist demnach ein elliptisches Paraboloid vierten Grades, welches für $b = a$ in das auf S. 159 erwähnte Rotationsparaboloid übergeht. Als Gleichung der Berührungsebene findet man nach dem allgemeinen Verfahren

$$\frac{a^2x_0}{2z_0^3}(\xi - x_0) + \frac{b^2y_0}{2z_0^3}(\eta - y_0) - (\zeta - z_0) = 0$$

oder bei Weglassung der Indices und weiterer Zusammenziehung

$$-\frac{a^2x}{z^4}\xi - \frac{b^2y}{z^4}\eta + \frac{2}{z}\zeta = 1;$$

die Tangentialebene im Punkte xyz schneidet demnach auf den Koordinatenachsen die Strecken ab

$$-\frac{z^4}{a^2x} = -\frac{x''^2}{x}, \quad -\frac{z^4}{b^2y} = -\frac{y'''^2}{y}, \quad +\frac{1}{2}z,$$

deren Konstruktion sehr leicht sein würde. — Für das Volumen V einer Kappe von der Höhe z ergiebt sich nach der allgemeinen Methode

$$V = \frac{1}{5}\pi \frac{z^5}{ab},$$

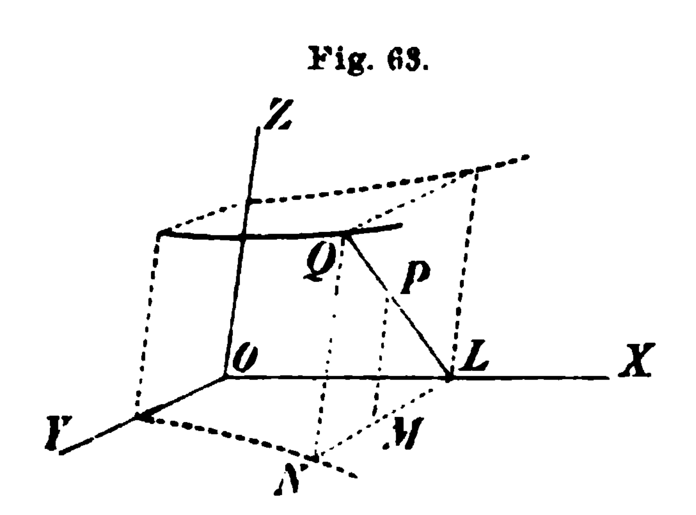
woraus das Volumen einer Zone wie vorhin hergeleitet werden kann.

Die mitgeteilten Betrachtungen lassen noch insofern manche Verallgemeinerung zu, als man die parabolischen Leitlinien durch beliebige andere Kurven ersetzen und statt der beweglichen Ellipse

irgend eine Kurve nehmen kann, deren Natur durch die beiden Strecken $NU = x''$ und $NV = y'''$ bestimmt ist.

2. Keilflächen. Eine veränderliche Gerade möge sich so bewegen, dass sie einer festen Ebene parallel bleibt und ausserdem sowohl eine gegebene Gerade als eine sonst noch gegebene feste Kurve schneidet; die bewegliche Gerade beschreibt in diesem Falle eine Fläche, die längs der festen Geraden in eine Schneide ausläuft und daher nicht unpassend als eine Keilfläche bezeichnet werden kann. Um ihre Gleichung in möglichst einfacher Form zu erhalten, nehmen wir die feste Gerade zur x-Achse und die feste Ebene zur yz-Ebene; bezeichnen jetzt x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes P der beweglichen Geraden und $x'y'z'$ die Koordinaten ihres Durchschnittes Q mit der Kurve, so können, der ersten Bedingung zufolge, die Gleichungen der beweglichen Geraden durch

Fig. 63.



$$x = x', \quad z = \frac{z'}{y'}\, y$$

dargestellt werden. Ferner gelten für den Punkt $x'y'z'$ die Gleichungen der gegebenen Kurve etwa

$$5) \qquad y' = \varphi(x'), \quad z' = \psi(x'),$$

und nun ergiebt sich aus den vier aufgestellten Gleichungen durch Elimination von x', y', z'

$$6) \qquad z = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\, y$$

als Gleichung der beschriebenen Fläche.

Ist z. B. die Leitkurve eine Gerade, mithin

$$y' = Bx' + b, \quad z' = Cx' + c,$$

so lautet die Gleichung der erzeugten Fläche

$$z = \frac{Cx + c}{Bx + b}\, y$$

oder

$$Cxy - Bxz + cy - bz = 0;$$

letztere ist demnach ein hyperbolisches Paraboloid, wie schon in § 40 Aufgabe 7 gefunden wurde.

Wenn die feste Gerade senkrecht auf der festen Ebene steht und die Leitkurve eine Ellipse ist, deren Mittelpunkt auf der z-Achse und deren Ebene parallel zur xy-Ebene liegt, so gelten für y' und z' die Gleichungen

$$y' = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x'^2}, \quad z' = c$$

und daraus ergiebt sich als Gleichung der elliptischen Keilfläche

$$z = \frac{acy}{b\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Die horizontalen Schnitte derselben sind Ellipsen, denn für $z = h$ erhält man

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{bh}{c}}\right)^2 = 1;$$

alle sonstigen zur yz-Ebene nicht parallelen Schnitte geben Kurven vierten Grades.

Die durch den Punkt xyz gehende Berührungsebene bestimmt sich wie früher auf die Weise, dass man durch die Punkte xyz, $x_1 y z_1$, $x y_2 z_2$ zunächst eine Schnittebene legt und nachher diese Punkte zusammenfallen lässt. Die Gleichung der genannten Ebene ist

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x}(\xi - x) + \frac{z_2 - z}{y_2 - y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

und vermöge der Gleichung der Fläche

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{acy\left(\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x_1^2}\right)}{b\sqrt{a^2 - x_1^2}\sqrt{a^2 - x^2}\,.\,(x_1 - x)},$$

$$\frac{z_2 - z}{y_2 - y} = \frac{ac}{b\sqrt{a^2 - x^2}};$$

der erste Quotient rechter Hand bedarf noch einer Transformation und zwar besteht dieselbe darin, dass man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x_1^2}$$

multipliziert, wodurch der Zähler rational, nämlich $= x_1^2 - x^2 = (x_1 + x)(x_1 - x)$ wird. Nach Hebung des letzten Faktors bleibt

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = \frac{ac(x_1 + x)y}{b\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^2 - x^2)}\left[\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x_1^2}\right]};$$

setzt man diese Werte in die Gleichung der Schnittebene ein und lässt dann die Punkte xyz, $x_1 y z_1$, $x y_2 z_2$ zusammenfallen, so bleibt als Gleichung der Tangentialebene:

$$\frac{acxy}{b\sqrt{(a^2-x^2)^3}}(\xi - x) + \frac{ac}{b\sqrt{(a^2-x^2)}}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0,$$

oder, wenn $\sqrt{a^2 - x^2}$ durch z ausgedrückt und das Gleichartige vereinigt wird,

$$\frac{1}{x}\xi + \frac{a^2c^2y}{b^2x^2z^2}\eta - \frac{a^2c^2y^2}{b^2x^2z^3}\zeta = 1.$$

Um das Volumen einer Kappe von der Höhe z zu ermitteln, benutzen wir wieder die Methode der ein- und umschriebenen Cylinder; letztere sind elliptische Cylinder, weil der in der Höhe h parallel zur xy-Ebene gelegte Querschnitt eine aus den Halbachsen a und $\frac{bh}{c}$ konstruierte Ellipse ist, deren Fläche $\pi\frac{abh}{c}$ beträgt. Hiernach überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Ungleichungen

$$V > \pi\frac{ab}{c}0\,\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{2z}{c}\frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \pi\frac{ab}{c}\frac{(n-1)z}{n}\frac{z}{n},$$

$$V < \pi\frac{ab}{c}\frac{z}{n}\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{2z}{n}\frac{z}{n} + \pi\frac{ab}{c}\frac{3z}{n}\frac{z}{n} + \ldots$$

$$\ldots + \pi\frac{ab}{c}\frac{nz}{n}\frac{z}{n};$$

man zieht daraus

$$V = \text{dem Grenzwerte von:}$$

$$\pi\frac{ab}{c}\frac{1+2+3+\ldots+(n-1)}{n^2}z^2$$

und durch Ausführung des Grenzüberganges

$$V = \tfrac{1}{2}\pi\frac{ab}{c}z^2.$$

Das Volumen einer Zone des elliptischen Keiles ist hiernach leicht zu finden.

§ 44.

Fusspunktflächen.

Denkt man sich durch einen beliebigen Punkt P einer gegebenen Fläche an diese eine Berührungsebene gelegt und auf letztere von einem festen Punkte C eine Senkrechte herabgelassen, deren Fusspunkt Q heissen möge, so entspricht jedem Punkte P

ein neuer Punkt Q im Raume, und wenn P die gegebene Fläche durchläuft, so wird auch der Punkt Q eine gewisse Fläche beschreiben, welche man die entsprechende Fusspunktfläche nennen kann. Nicht ohne Interesse sind die aus den Flächen zweiten Grades abgeleiteten Fusspunktflächen, deren Betrachtung uns im folgenden beschäftigen wird.

a) Die centrischen Flächen zweiten Grades lassen sich, wenn die Hauptachsen zu Koordinatenachsen genommen werden, durch die allgemeine Gleichung

$$1)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$$

ausdrücken, und die Gleichung der Berührungsebene im Punkte xyz ist dann

$$Ax\xi + By\eta + Cz\zeta = D.$$

Eine Senkrechte vom Mittelpunkte der Fläche (dem Koordinatenanfange) auf die Tangentialebene schneidet letztere in einem Punkte, dessen Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 nach § 15 Nr. 15 gefunden werden; sie sind

$$2)\qquad \begin{cases} \xi_0 = \dfrac{ADx}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}, \\ \eta_0 = \dfrac{BDy}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}, \\ \zeta_0 = \dfrac{CDz}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}. \end{cases}$$

Die Gleichung der Fusspunktfläche darf ausser ξ_0, η_0, ζ_0 nur noch die bekannten Grössen A, B, C, D enthalten, sie ist folglich durch Elimination von x, y, z aus den Gleichungen 1) und 2) zu entwickeln. Aus Nr. 2) findet man einerseits:

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \frac{D^2}{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2},$$

andererseits bei Rücksicht auf die Gleichung 1)

$$D\left(\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} + \frac{\zeta_0^2}{C}\right) = \frac{D^4}{(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2)^2};$$

die rechte Seite dieser Gleichung ist das Quadrat von der rechten Seite der vorhergehenden Gleichung, mithin

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)^2 = D\left(\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} + \frac{\zeta_0^2}{C}\right)$$

oder, wenn man x, y, z für ξ_0, η_0, ζ_0 schreibt,

$$3)\qquad \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{D} = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C}.$$

Demnach ist für die Fusspunktfläche des dreiachsigen Ellipsoides:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2,$$

des einfachen Hyperboloides:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2,$$

und des geteilten Hyperboloides:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=-a^2x^2-b^2y^2+c^2z^2.$$

Diese drei Flächen besitzen gemeinschaftlich eine bemerkenswerte Eigenschaft; schneidet man nämlich die Fläche 3) durch eine konzentrische Kugelfläche mit dem Halbmesser k, so gilt für alle Punkte der Durchschnittslinie ausser der Gleichung 3) noch die folgende:

$$x^2+y^2+z^2=k^2$$

oder

$$(x^2+y^2+z^2)^2=k^2(x^2+y^2+z^2),$$

deren Substitution in Nr. 3) giebt

$$\frac{k^2(x^2+y^2+z^2)}{D}=\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}$$

oder

$$\left(\frac{k^2}{D}-\frac{1}{C}\right)z^2=\left(\frac{1}{A}-\frac{k^2}{D}\right)x^2+\left(\frac{1}{B}-\frac{k^2}{D}\right)y^2.$$

Diese Gleichung repräsentiert einen elliptischen Kegel; die Schnittkurve ist also ein sphärischer Kegelschnitt.

b) Die nichtcentrischen Flächen zweiten Grades können durch die allgemeine Gleichung

$$4)\qquad Ax^2+By^2=2z$$

ausgedrückt werden, derzufolge die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz ist:

$$Ax\xi+By\eta-\zeta=z.$$

Eine Senkrechte vom Scheitel der Fläche (dem Koordinatenanfange) auf die Berührungsebene schneidet letztere in einem Punkte $\xi_0\eta_0\zeta_0$, dessen Koordinaten sind:

$$5)\qquad \begin{cases} \xi_0=\dfrac{Axz}{A^2x^2+B^2y^2+1}, \\ \eta_0=\dfrac{Byz}{A^2x^2+B^2y^2+1}, \\ \zeta_0=\dfrac{-z}{A^2x^2+B^2y^2+1}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt erstens

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = \frac{z^2}{A^2x^2 + B^2y^2 + 1},$$

ferner unter Rücksicht auf Nr. 4)

$$\frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} = \frac{2z^3}{(A^2x^2 + B^2y^2 + 1)^2};$$

multipliziert man das erste Ergebnis mit $2\zeta_0$ und vereinigt es mit dem zweiten, so erhält man als Gleichung der Fusspunktfläche

$$2(\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2)\zeta_0 + \frac{\xi_0^2}{A} + \frac{\eta_0^2}{B} = 0,$$

oder, wenn x, y, $-z$ statt ξ_0, η_0, ζ_0 geschrieben werden,

$$6)\qquad (x^2 + y^2 + z^2)z = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}\right).$$

Hiernach ist für die Fusspunktfläche des elliptischen Paraboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + by^2),$$

und des hyperbolischen Paraboloides:

$$(x^2 + y^2 + z^2)z = \tfrac{1}{2}(ax^2 - by^2).$$

Die auf der z-Achse senkrechten (horizontalen) Querschnitte der ersten Fläche sind Ellipsen, die der zweiten Hyperbeln; jeder die z-Achse in sich enthaltende Schnitt ist die Fusspunktkurve einer Parabel (eine Cissoide). Schneidet man die erste Fusspunktfläche durch eine aus dem Halbmesser k beschriebene Kugelfläche, so genügt jeder Punkt des Schnittes der Gleichung

$$k^2z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + by^2),$$

d. h. geometrisch, es lässt sich immer ein elliptisches Paraboloid angeben, welches mit der Kugel denselben Schnitt bildet, wie jene Fusspunktfläche; eine ähnliche Eigenschaft besitzt die Fusspunktfläche des hyperbolischen Paraboloides.

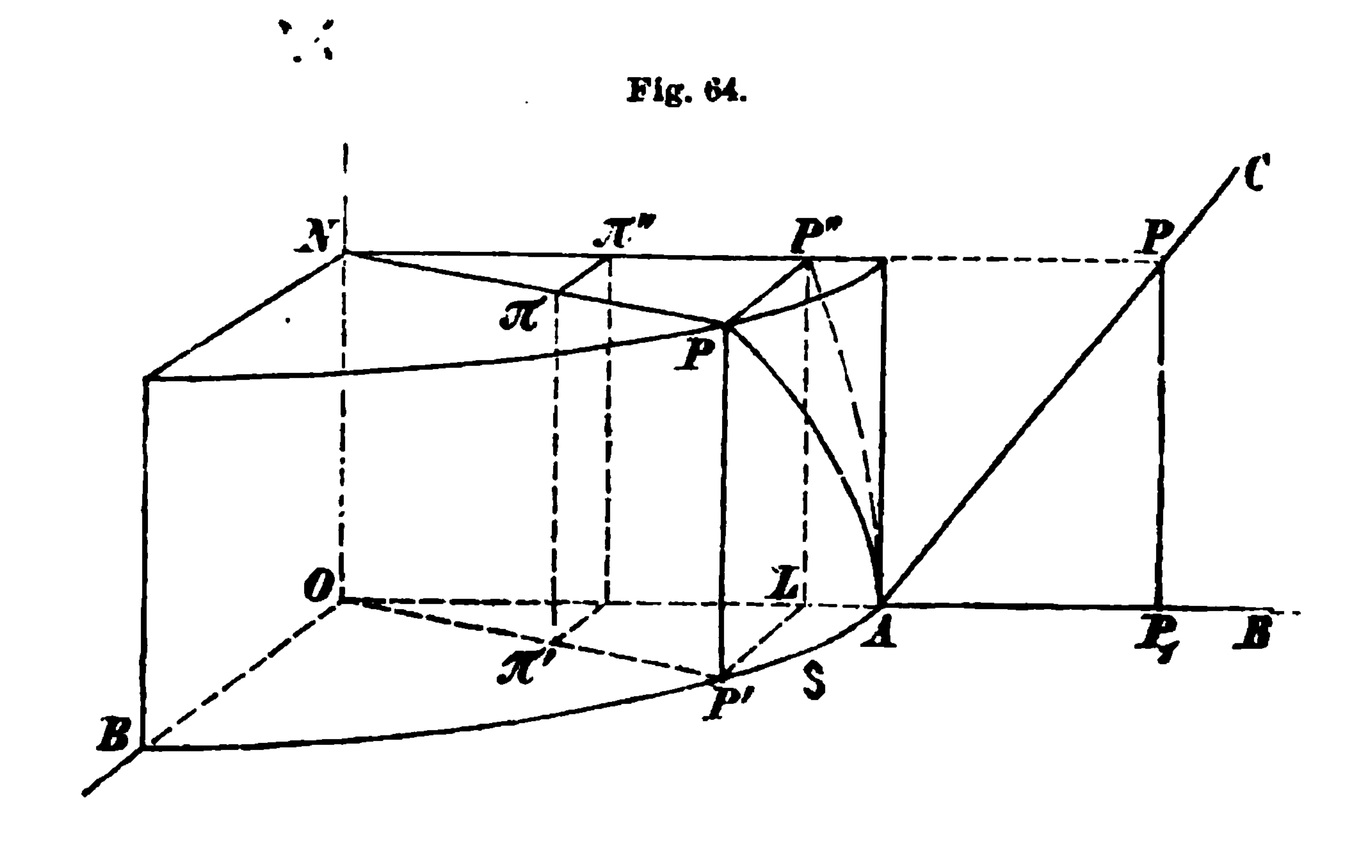
§ 45.

Schraubenlinie und Schraubenfläche.

I. Wenn die Ebene eines gegebenen Winkels BAC dergestalt um einen geraden Kreiscylinder herumgewickelt wird, dass der eine Winkelschenkel AB mit einem normalen Querschnitte des Cylinders zusammenfällt, so beschreibt der andere Winkelschenkel AC auf der Cylinderfläche eine Kurve, welche die Schraubenlinie

genannt wird; der Halbmesser des Cylinders heisst ihr Radius, und der konstante Winkel ihr Steigungswinkel. Um die Schraubenlinie vollständig zu erhalten, muss man sich den gegebenen Winkel durch seinen Scheitelwinkel ergänzt und diesen gleichzeitig mit aufgewickelt denken; die Kurve erstreckt sich daher

Fig. 64.



sowohl auf- als abwärts von dem normalen Querschnitte ins unendliche. Ferner ist zu berücksichtigen, dass jene Umwickelung auf zwei verschiedene Weisen — rechts herum und links herum — geschehen kann, dass also aus den gegebenen Daten (Steigungswinkel und Radius) zwei symmetrisch gleiche Schraubenlinien konstruierbar sind, welche man durch die Benennungen rechtsgängige und linksgängige Schraubenlinie zu unterscheiden pflegt; die Figur zeigt einen Teil der letzteren nebst deren Vertikalprojektion.

Um die Gleichungen der Schraubenlinie zu erhalten, nehmen wir die Cylinderachse zur z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystemes, dessen xy-Ebene mit der Ebene des genannten normalen Querschnittes zusammenfallen möge; den Punkt A, in welchem letztere von der Schraubenlinie getroffen wird, verbinden wir mit dem Mittelpunkte des Querschnittes durch eine Gerade, und wählen letztere zur Achse der x. Der Radius $OA = OB$ sei $= a$, der Steigungswinkel $BAC = \beta$. Ist nun P ein beliebiger Punkt des Schenkels AC und P_1 seine Projektion auf den Schenkel AB, so kommt bei der Aufwickelung P_1 so auf den normalen Querschnitt $AP'B$ zu liegen, dass der Bogen AP' gleich der Geraden AP_1 wird;

die Linie $P_1 P$ dagegen bleibt gerade und fällt auf die durch P' gehende erzeugende Gerade $P'P$ des Cylinders. Bezeichnen wir die drei Koordinaten des Punktes P der Schraubenlinie mit $OL = x$, $LP' = PP'' = y$, $P'P = LP'' = z$ und den Bogen AP' mit s, so ist

$$x = OP' \cos AOP' = a \cos \frac{s}{a},$$

$$y = OP' \sin AOP' = a \sin \frac{s}{a},$$

und in dem ebenen rechtwinkligen Dreiecke PAP_1

$$PP_1 = AP_1 \,.\, \tan\beta, \quad \text{d. h.} \quad z = s \tan\beta;$$

der Wert von s, aus der letzten Gleichung in die vorhergehenden substituiert, giebt

$$x = a \cos \frac{z}{a \tan\beta}, \quad y = a \sin \frac{z}{a \tan\beta}.$$

Die Grösse $a \tan\beta$ bedeutet geometrisch dasjenige z der Schraubenlinie, welches für $s = a$, d. h. für $\angle AOP' = 57^0\, 17'\, 44''\, 8$ zum Vorschein kommt; diese bestimmte und für jede gegebene Schraubenlinie unveränderliche Grösse wollen wir den Parameter der Kurve nennen und mit c bezeichnen; es sind jetzt

1) $$x = a \cos \frac{z}{c}, \quad y = a \sin \frac{z}{c}$$

die Gleichungen der Vertikalprojektionen der Schraubenlinie, woraus sich noch

2) $$x^2 + y^2 = a^2$$

als Gleichung der Horizontalprojektion findet. Für die Schraubenlinie entgegengesetzter Drehung (rechtsgängig) ändert der Bogen s sein Vorzeichen und die Gleichungen werden daher

3) $$x = a \cos \frac{z}{c}, \quad y = -a \sin \frac{z}{c}, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Nimmt man in den Gleichungen 1) erst $z = 0$ und nachher $z = \pi c$, so erhält man im ersten Falle $x = +a$, im zweiten $x = -a$; bei einem halben Umgange steigt also die Schraubenlinie um πc, bei einem ganzen Umgange um $2\pi c$; letztere Grösse pflegt man daher die Höhe eines Schraubenganges zu nennen.

Die gerade Verbindungslinie zweier Punkte xyz und $x_1 y_1 z_1$ der betrachteten Kurve kann durch folgende Gleichungen dargestellt werden

$$4)\qquad \xi - x = \frac{x_1 - x}{z_1 - z}(\zeta - z), \qquad \eta - y = \frac{y_1 - y}{z_1 - z}(\zeta - z),$$

wobei die vorkommenden Quotienten kurz M und N heissen mögen: da die genannten Punkte der Schraubenlinie angehören, so ist

$$x_1 - x = a\left(\cos\frac{z_1}{c} - \cos\frac{z}{c}\right)$$
$$= -2a\sin\frac{z_1 + z}{2c}\sin\frac{z_1 - z}{2c},$$
$$y_1 - y = a\left(\sin\frac{z_1}{c} - \sin\frac{z}{c}\right)$$
$$= +2a\cos\frac{z_1 + z}{2c}\sin\frac{z_1 - z}{2c},$$

woraus sich ergiebt

$$M = -\frac{a}{c}\sin\frac{z_1 + z}{2c}\cdot\frac{\sin\frac{z_1 - z}{2c}}{\frac{z_1 - z}{2c}},$$

$$N = +\frac{a}{c}\cos\frac{z_1 + z}{2c}\cdot\frac{\sin\frac{z_1 - z}{2c}}{\frac{z_1 - z}{2c}}.$$

Lassen wir den Punkt $x_1 y_1 z_1$ dem als fest gedachten Punkte xyz immer näher rücken, so dreht sich die Verbindungsgerade (Sekante) um den ersten Punkt und nähert sich dabei mehr und mehr der tangentialen Lage; letztere tritt in dem Grenzfalle $x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ ein und diesem entsprechen gewisse Grenzwerte von M und N, welche sich aus dem bekannten Satze ergeben, dass der Quotient $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ bei verschwindenden ϑ in die Einheit übergeht (Teil I, S. 250.) Jene Grenzwerte sind demnach

$$-\frac{a}{c}\sin\frac{z}{c} = -\frac{y}{c} \quad \text{und} \quad +\frac{a}{c}\cos\frac{z}{c} = +\frac{x}{c};$$

die Gleichungen 4) werden jetzt zu den folgenden

$$5)\qquad \xi - x = -\frac{y}{c}(\zeta - z), \qquad \eta - y = +\frac{x}{c}(\zeta - z)$$

und bestimmen die im Punkte xyz an die Schraubenlinie gelegte Tangente. Aus den vorstehenden Gleichungen zieht man noch

$$x(\xi - x) + y(\eta - y) = 0$$

oder

$$x\xi + y\eta = x^2 + y^2 = a^2,$$

d. h. geometrisch, die Horizontalprojektion der Tangente berührt die kreisförmige Horizontalprojektion der Kurve, wie zu erwarten war. Die Tangentenkonstruktion ist hiernach sehr einfach; in der xy-Ebene legt man nämlich durch den Punkt P' eine Tangente an den mit dem Halbmesser a beschriebenen Kreis, in der xz-Ebene zieht man durch den Punkt P'' eine Gerade, welche mit der x-Achse einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente $= -\frac{c}{y}$ ist; die erhaltenen Geraden sind die Horizontal- und die Vertikalprojektion der gesuchten Tangente.

Die im Berührungspunkte der letzteren senkrecht zu ihr gelegte Ebene heisst die Normalebene im Punkte xyz; aus den beiden genannten Bedingungen findet man leicht als deren Gleichung

$$-\frac{y}{c}(\xi - x) + \frac{x}{c}(\eta - y) + \zeta - z = 0$$

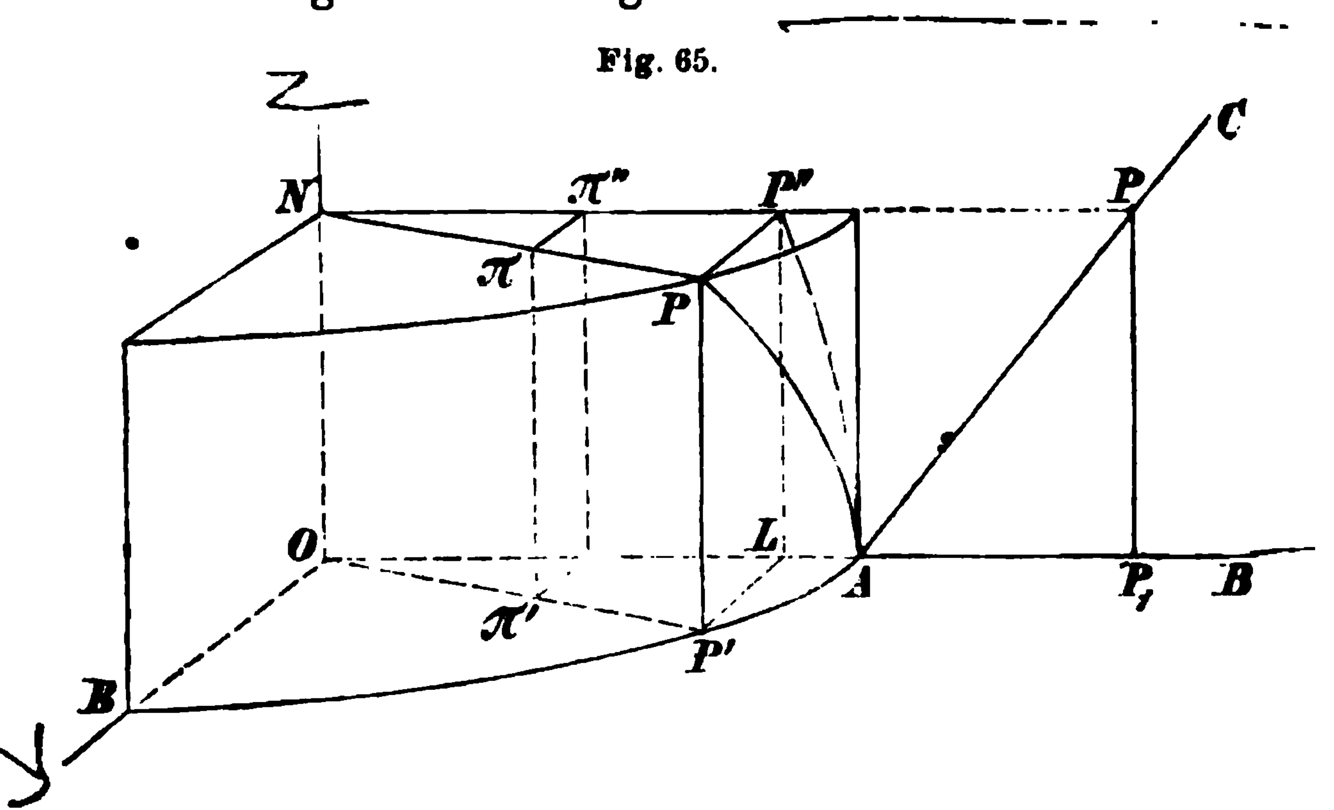
oder

$$6) \qquad -\frac{y}{cz}\xi + \frac{x}{cz}\eta + \frac{1}{z}\zeta = 1,$$

wonach auch die direkte Konstruktion der Normalebene (oder ihrer Spuren) sehr leicht ist.

II. Lässt man eine Gerade sich so bewegen, dass sie an der Schraubenlinie hingleitet und zugleich die Achse der Schraubenlinie

Fig. 65.



senkrecht schneidet, so beschreibt sie eine sogenannte Schraubenfläche; in der Figur ist NP die bewegliche Gerade in einer ihrer Lagen. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes Π der beweg-

lichen Geraden (also auch der Fläche) mögen ξ, η, ζ und x, y, z die Koordinaten des Punktes P heissen, in welchen sie die Schraubenlinie schneidet; die Gleichungen der veränderlichen Geraden sind in diesem Falle

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x} \quad \text{und} \quad \zeta = z;$$

setzt man die Werte von x und y aus Nr. 1) ein, so ist

$$\frac{\eta}{\xi} = \tan\frac{z}{c} = \tan\frac{\zeta}{c}$$

die Gleichung der Schraubenfläche, wobei im folgenden wieder x, y, z für ξ, η, ζ, also

$$7)\qquad \frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}$$

geschrieben werden möge. Bei Zugrundelegung der rechtsgängigen Schraubenlinie ergiebt sich

$$\frac{y}{x} = -\tan\frac{z}{c}$$

als Gleichung der entsprechenden Schraubenfläche.

Eine Ebene, welche mit der Fläche die Punkte xyz, x_1yz_1 und xy_2z_2 gemein hat, wird repräsentiert durch die Gleichung

$$8)\qquad \frac{z_1 - z}{x_1 - x}(\xi - x) + \frac{z_2 - z}{y_2 - y}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0,$$

wobei für jene Punkte die Bedingungen

$$\frac{y}{x} = \tan\frac{z}{c}, \quad \frac{y}{x_1} = \tan\frac{z_1}{c}, \quad \frac{y_2}{x} = \tan\frac{z_2}{c}$$

erfüllt sein müssen. Unter Benutzung der bekannten Formel

$$\tan u - \tan v = \frac{\sin(u - v)}{\cos u \cos v}$$

erhält man aus jenen Gleichungen, indem man die erste von der zweiten und von der dritten subtrahiert,

$$-y\frac{x_1 - x}{x_1 x} = \frac{\sin\frac{z_1 - z}{c}}{\cos\frac{z_1}{c}\cos\frac{z}{c}},$$

$$\frac{y_2 - y}{x} = \frac{\sin\frac{z_2 - z}{c}}{\cos\frac{z_2}{c}\cos\frac{z}{c}};$$

dies giebt weiter

$$\frac{z_1 - z}{x_1 - x} = -\frac{cy}{x_1 x}\cos\frac{z_1}{c}\cos\frac{z}{c}\cdot\frac{\frac{z_1 - z}{c}}{\sin\frac{z_1 - z}{c}},$$

$$\frac{z_2 - z}{y_2 - y} = +\frac{c}{x}\cos\frac{z_2}{c}\cos\frac{z}{c}\cdot\frac{\frac{z_2 - z}{c}}{\sin\frac{z_2 - z}{c}}.$$

Lassen wir die Punkte xyz, x_1yz_1 und xy_2z_2 zusammenrücken, so geht die schneidende Ebene in die berührende Ebene über und die Quotienten $\frac{z_1 - z}{x_1 - x}$, $\frac{z_2 - z}{y_2 - y}$ erhalten gewisse Grenzwerte, die sich aus dem Satze ergeben, dass der Quotient $\frac{\vartheta}{\sin\vartheta}$ für $\vartheta = 0$ zur Einheit wird. Die betreffenden Grenzwerte sind

see p69.

$$-\frac{cy}{x^2}\left(\cos\frac{z}{c}\right)^2 \quad \text{und} \quad +\frac{c}{x}\left(\cos\frac{z}{c}\right)^2$$

oder, wenn $\cos\frac{z}{c}$ durch $\tan\frac{z}{c} = \frac{y}{x}$ ausgedrückt wird,

$$-\frac{cy}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad +\frac{cx}{x^2 + y^2}.$$

Die Gleichung 8) wird jetzt

$$-\frac{cy}{x^2 + y^2}(\xi - x) + \frac{cx}{x^2 + y^2}(\eta - y) - (\zeta - z) = 0$$

See also Pierce p.235.

und nach gehöriger Zusammenziehung

$$\text{9)} \qquad \frac{cy}{(x^2 + y^2)z}\xi - \frac{cx}{(x^2 + y^2)z}\eta + \frac{1}{z}\zeta = 1;$$

sie bestimmt die **Tangentialebene** im Punkte xyz. Letztere ist sehr leicht mittels der Abschnitte zu konstruieren, welche sie auf den Achsen bildet.

Aus der Gleichung 9) findet man noch

see Pierce Vol. I. p. 237

$$\text{10)} \quad \xi - x = \frac{cy}{x^2 + y^2}(\zeta - z), \quad \eta - y = -\frac{cx}{x^2 + y^2}(\zeta - z)$$

als Gleichungen der im Punkte xyz auf der Schraubenfläche errichteten **Normale**.

Zehntes Kapitel.

Analytische Projektionslehre.

§ 46.

Die axonometrische Projektion.

Wenn es darauf ankommt, räumliche Gegenstände durch Zeichnung in einer Ebene graphisch darzustellen, so hat man bekanntlich eine doppelte Wahl, insofern dazu ebensowohl die Parallelprojektion als die perspektivische Projektion benutzt werden kann. Die Mittel zur Ausführung der Zeichnung selbst giebt die deskriptive Geometrie, deren Kenntnis wir voraussetzen, sie lassen sich aber auch unabhängig von dieser entwickeln, wenn man die Aufgabe vom analytischen Gesichtspunkte aus ansieht, wie es im folgenden geschehen soll.

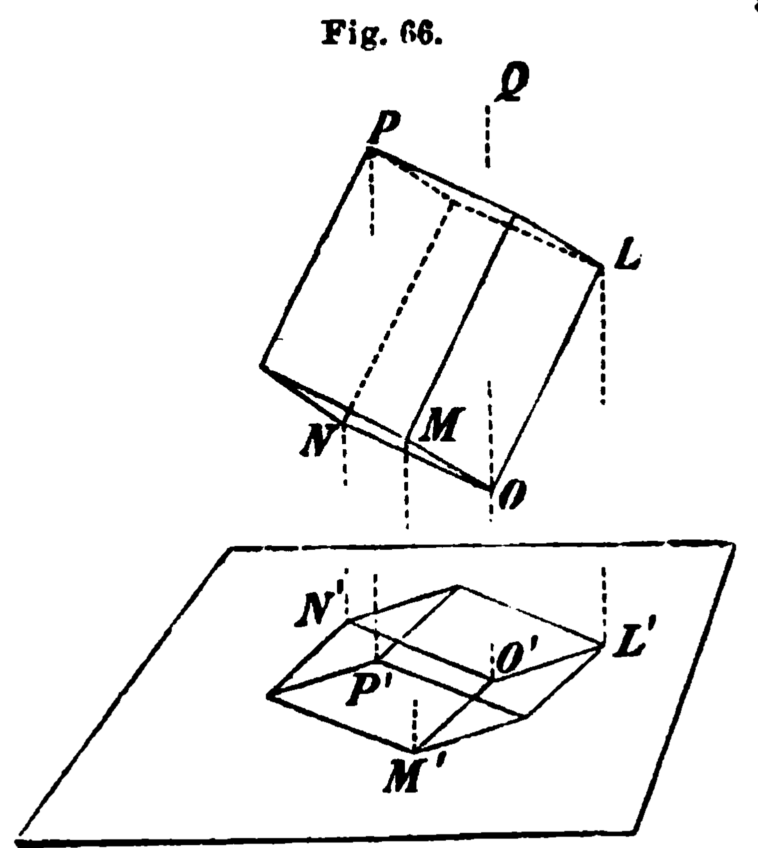


Fig. 66.

Wir denken uns einen Punkt P auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen und durch die Koordinaten $OL = x$, $OM = y$, $ON = z$ gegeben; das ganze Liniensystem werde rechtwinklig auf eine bestimmte Ebene projiziert und es soll nun die gegenseitige Lage der Projektionen O', L', M', N', P' ermittelt werden. Da die orthogonalen Projektionen zweier parallelen Geraden wiederum parallel sind, so besteht die Projektion des erwähnten Liniensystemes aus zwölf Geraden (den Projektionen der zwölf Kanten des aus x, y, z konstruierten

Parallelepipedes), von denen je vier parallel laufen, und es ist dieser Linienkomplex bestimmt, wenn man die drei Geraden $O'L' = x'$, $O'M' = y'$, $O'N' = z'$ und die von ihnen eingeschlossenen Winkel kennt.

Bezeichnen wir die Stellungswinkel der Projektionsebene mit

$$\angle LOQ = \alpha, \quad \angle MOQ = \beta, \quad \angle NOQ = \gamma,$$

und die Neigungswinkel der Achsen OL, OM, ON gegen die Projektionsebene mit λ, μ, ν, so ist zunächst

$$\lambda = 90^0 - \alpha, \quad \mu = 90^0 - \beta, \quad \nu = 90^0 - \gamma,$$

mithin, wenn diese Werte in die Formel

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

substituiert werden,

$$1) \qquad \begin{cases} \sin^2\lambda + \sin^2\mu + \sin^2\nu = 1, \\ \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 2. \end{cases}$$

Was die Grössen von x', y', z' anbelangt, so hat man unmittelbar

$$2) \qquad x' = x\cos\lambda, \quad y' = y\cos\mu, \quad z' = z\cos\nu.$$

Um die zwischen x', y', z' liegenden Winkel zu finden, bedarf es nur der Erinnerung an den bekannten Satz, dass die Projektion einer ebenen Fläche auf eine andere Ebene gleich der ersten Fläche, multipliziert mit dem Cosinus des Winkels zwischen beiden Ebenen ist. Wendet man ihn der Reihe nach auf die Dreiecke LOM, LON, MON und ihre Projektionen an, indem man berücksichtigt, dass der Winkel zwischen zwei Ebenen gleich dem Winkel zwischen ihren Normalen ist, so hat man als Projektionen jener Dreiecksflächen:

$$\tfrac{1}{2}xy\sin\nu, \quad \tfrac{1}{2}xz\sin\mu, \quad \tfrac{1}{2}yz\sin\lambda;$$

durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausgedrückt, sind die nämlichen Flächen $L'O'M'$, $L'O'N'$, $M'O'N'$:

$$\tfrac{1}{2}x'y'\sin(x'y'), \quad \tfrac{1}{2}x'z'\sin(x'z'), \quad \tfrac{1}{2}y'z'\sin(y'z'),$$

und aus der Vergleichung der gleichnamigen Flächen folgen die Formeln:

$$3) \qquad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{xy}{x'y'}\sin\nu, \quad \sin(x'z') = \dfrac{xz}{x'z'}\sin\mu, \\ \sin(y'z') = \dfrac{yz}{y'z'}\sin\lambda, \end{cases}$$

oder auch, wenn man alles durch λ, μ, ν ausdrückt,

$$4)\quad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{\sin\nu}{\cos\lambda\cos\mu}, \quad \sin(x'z') = \dfrac{\sin\mu}{\cos\lambda\cos\nu}, \\ \sin(y'z') = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\mu\cos\nu}. \end{cases}$$

Für den praktischen Gebrauch der erwähnten Projektionsmethode bedürfen diese Formeln noch einer Modifikation; in der Regel sieht man nämlich nicht die Winkel λ, μ, ν als unmittelbar bekannt an, sondern man setzt voraus, dass die Projektionen von drei gleichen auf den Achsen abgeschnittenen Strecken (von den in O zusammentreffenden Kanten eines Würfels) gegeben seien und berechnet hieraus rückwärts λ, μ, ν und die Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. Dies geschieht auf folgende Weise. Die auf jeder Achse abgeschnittene Strecke sei d und ihre Projektionen mögen a', b', c' heissen; die vorigen Formeln geben dann für $x = y = z = d$ und $x' = a'$, $y' = b'$, $z' = c'$

$$5)\quad a' = d\cos\lambda, \quad b' = d\cos\mu, \quad c' = d\cos\nu,$$

oder, wenn man quadriert und addiert,

$$6)\quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 2d^2.$$

Durch Substitution des hieraus folgenden Wertes von d liefern die vorhergehenden Gleichungen die Werte

$$7)\quad \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{a'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \cos\mu = \dfrac{b'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \cos\nu = \dfrac{c'\sqrt{2}}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \end{cases}$$

an welche sich die nachstehenden reihen:

$$8)\quad \begin{cases} \sin\lambda = \sqrt{\dfrac{b'^2 + c'^2 - a'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \sin\mu = \sqrt{\dfrac{a'^2 + c'^2 - b'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}, \\ \sin\nu = \sqrt{\dfrac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \end{cases}$$

Mit Hilfe dieser Werte lassen sich die Formeln 4) durch die folgenden ersetzen:

$$9)\quad \begin{cases} \sin(x'y') = \dfrac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)\,(a'^2+b'^2-c'^2)}}{2\,a'b'}, \\[2ex] \sin(x'z') = \dfrac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)\,(a'^2+c'^2-b'^2)}}{2\,a'c'}, \\[2ex] \sin(y'z') = \dfrac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)\,(b'^2+c'^2-a'^2)}}{2\,b'c'}. \end{cases}$$

Bemerkenswert ist die hieraus folgende leichte Konstruktion der Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. Setzt man nämlich

$$\angle(x'y') = 90^0 + \tfrac{1}{2}C,\quad \angle(x'z') = 90^0 + \tfrac{1}{2}B,\quad \angle(y'z') = 90^0 + \tfrac{1}{2}A,$$

so zeigen die nunmehrigen Formeln

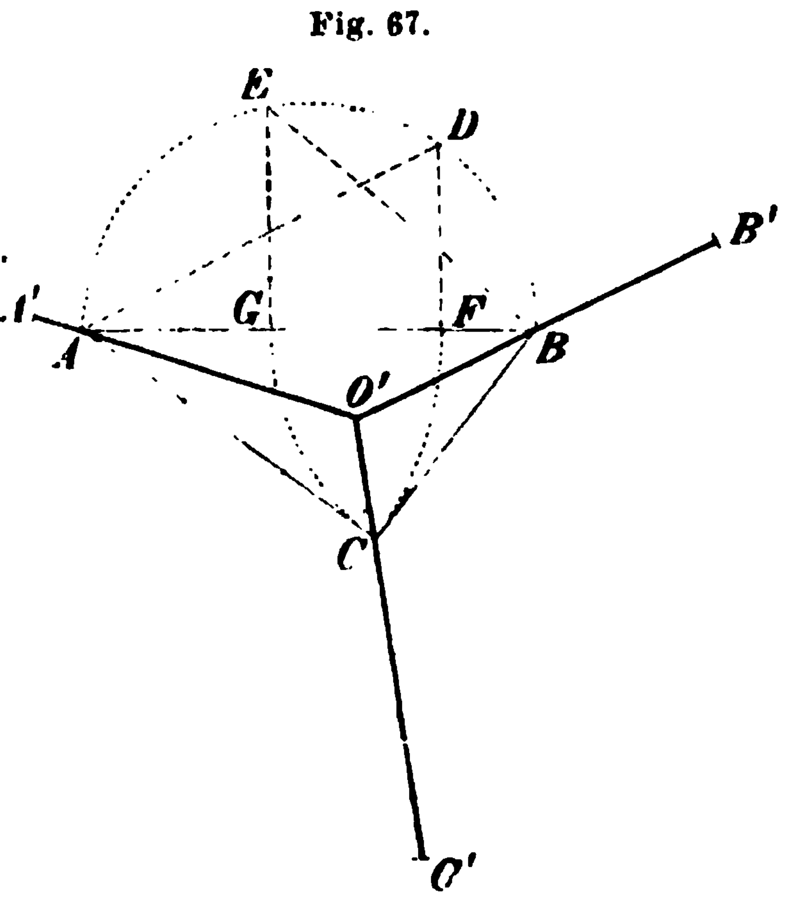
$$\cos\tfrac{1}{2}C = \frac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)\,(a'^2+b'^2-c'^2)}}{2\,a'b'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}B = \frac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)\,(a'^2+c'^2-b'^2)}}{2\,a'c'},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \frac{\sqrt{(a'^2+b'^2+c'^2)\,(b'^2+c'^2-a'^2)}}{2\,b'c'};$$

dass A, B, C die Winkel eines Dreiecks bilden, dessen Seiten a'^2, b'^2, c'^2 oder diesen Grössen proportional sind. Dies giebt folgende Konstruktion: über der grössten von den Linien a', b', c', welche $c' = AB$ sein möge, beschreibe man einen Halbkreis, trage in diesen $AD = b'$ und $BE = a'$ als Sehnen ein, fälle auf AB die Senkrechten DF, EG und beschreibe aus den Seiten AB, AF, BG das Dreieck ABC. Die Seiten desselben sind

Fig. 67.



$$AB = c',\quad AC = AF = \frac{b'^2}{c'},\quad BC = BG = \frac{a'^2}{c'}$$

und stehen in den Verhältnissen

$$BC : CA : AB = a'^2 : b'^2 : c'^2;$$

die Winkel des Dreiecks ABC sind folglich die vorhin mit A, P, C bezeichneten Winkel. Die Halbierungslinien derselben schneiden

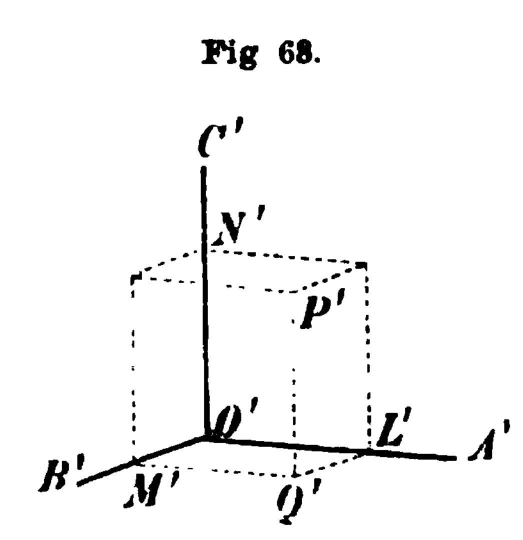
sich in einem Punkte O' und zwar ist aus naheliegenden geometrischen Gründen

$$\angle AO'B = 90^0 + \tfrac{1}{2}C, \quad \angle AO'C = 90^0 + \tfrac{1}{2}B, \quad \angle BO'C = 90^0 + \tfrac{1}{2}A;$$

trägt man also von O' aus auf die winkelhalbierenden Geraden die Strecken $O'A' = BE = a'$, $O'B' = AD = b'$ und $O'C' = AB = c'$, so hat man die drei Projektionen von d der Grösse und Lage nach.*

Sind nun die Winkel $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ durch die erwähnte Konstruktion oder durch die Formel 9) bestimmt und ebenso die Winkel λ, μ, ν mittels der Formeln 7) gefunden, so dienen die Gleichungen 2) zur Konstruktion der Projektion jedes beliebigen Punktes xyz, indem man auf der Linie $O'A'$ die Strecke $O'L' = x'$ abschneidet, durch L' die Gerade $L'Q' \,//\, O'B'$ und gleich $O'M' = y'$ zieht und endlich $Q'P' = O'N' = z'$ parallel zu $O'C'$ legt, wobei man in der Praxis die Berechnung von x', y', z' durch den Gebrauch von Massstäben umgeht, deren Einheiten sich wie $1 : \cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu$ verhalten. Man ist dadurch in den Stand gesetzt, alle Ergebnisse der analytischen Geometrie in einer Ebene graphisch darzustellen.

Fig 68.



Die gewöhnlichsten Verhältnisse sind folgende. Für $a' = b' = c'$ erhält man die sogenannte isometrische Projektion, bei welcher

* Es ist nicht ohne Interesse, das Dreieck ABC oder ein ihm ähnliches in der ursprünglichen Figur nachzuweisen. Denken wir uns OL, OM, ON bis zu ihren Durchschnitten L_0, M_0, N_0 mit der Projektionsebene verlängert, so sind L_0M_0, L_0N_0, M_0N_0 die Spuren der Ebenen LOM, LON, MON, und nach dem bekannten Satze, dass die Projektion einer Geraden senkrecht auf der Spur ihrer Normalebene steht, ist $O'L' \perp M_0N_0$, $O'M' \perp L_0N_0$, $O'N' \perp L_0M_0$, mit einem Worte, die Geraden $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ sind die verlängerten Höhen des Spurendreiecks $L_0M_0N_0$. Nennen wir U, V, W die Fusspunkte dieser Höhen, so sind $O'L'$, $O'M'$, $O'N'$ die Winkelhalbierungslinien des Dreieckes UVW und ausserdem hat man

$$VW : UW : UV = a'^2 : b'^2 : c'^2,$$

wie man durch eine leichte Rechnung findet, sobald $OL = OM = ON = d$ und $O'L' = a'$, $O'M' = b'$, $O'N' = c'$ gesetzt werden.

$$\angle(x'y') = \angle(x'z') = \angle(y'z') = 120^0,$$
$$\lambda = \mu = \nu = 35^0\,15'\,52'',$$
$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\nu = \sqrt{\tfrac{2}{3}} = 0{,}8165.$$

Nimmt man zwei der Linien a', b', c' gleich und giebt der dritten ein beliebiges Verhältnis zu jenen, so heisst die Projektion dimetrisch; eine sehr gewöhnliche Wahl ist

$$a' = c', \quad b' = \tfrac{1}{2}\,a',$$

woraus

$$\angle(x'y') = \angle(y'z') = 131^0\,24'\,30'', \qquad \angle(x'z') = 97^0\,11',$$
$$\lambda = \nu = 19^0\,28', \qquad \mu = 61^0\,52',$$
$$\cos\lambda = \cos\nu = \sqrt{\tfrac{8}{9}} = 0{,}9428, \qquad \cos\mu = \sqrt{\tfrac{2}{9}} = 0{,}4714.$$

In dem allgemeinen Falle endlich, wo die Grössen a', b', c' von einander verschieden sind, erhält man die sogenannte trimetrische Projektion; passende Verhältnisse hierzu sind:

$$a' = \tfrac{9}{10}\,c', \quad b' = \tfrac{1}{2}\,c',$$

sie geben:

$$\angle(x'y') = 157^0\,0', \quad \angle(x'z') = 95^0\,11', \quad \angle(y'z') = 107^0\,49',$$
$$\lambda = 27^0\,31', \qquad \mu = 60^0\,29', \qquad \nu = 9^0\,50',$$
$$\cos\lambda = 0{,}8868, \qquad \cos\mu = 0{,}4927, \qquad \cos\nu = 0{,}9853.$$

Letzteres Wertesystem empfiehlt sich besonders zum Krystallzeichnen; in der vorigen Figur sind seine Verhältnisse eingehalten.

§ 47.

Projektionen von Flächen.

Denken wir uns in einer beliebigen Ebene eine willkürlich begrenzte Figur von bekannter Fläche s gezeichnet, so können wir leicht deren Projektionen auf drei untereinander senkrechte Ebenen finden; wir wählen nämlich letztere zu Koordinatenebenen, nennen α, β, γ die Stellungswinkel der Ebene von s und bezeichnen die Projektionen von s auf die Ebenen yz, xz, xy der Reihe nach mit a, b, c; es ist dann

$$1) \qquad a = s\cos\alpha, \quad b = s\cos\beta, \quad c = s\cos\gamma$$

und dabei sind die Projektionen a, b, c positiv oder negativ, jenachdem die Winkel α, β, γ spitz oder stumpf ausfallen. Die Projektion von s auf irgend eine vierte Ebene, welche mit der Ebene von s den Neigungswinkel ϑ bildet, ist ferner

$$p = s \cos \vartheta$$

und wenn man $\cos \vartheta$ durch die Stellungswinkel der Ebene s und durch die Stellungswinkel λ, μ, ν der neuen Ebene ausdrückt, so hat man auch

$$p = s(\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu),$$

d. i. unter Rücksicht auf die Gleichungen 1)

2) $$p = a \cos \lambda + b \cos \mu + c \cos \nu.$$

Diese bemerkenswerte Formel giebt die Projektion einer Figur auf eine beliebige Ebene, sobald die Projektionen der Figur auf die drei Koordinatenebenen bekannt sind. Hat man überhaupt verschiedene nicht in einer Ebene liegende Figuren s_1, s_2, $s_3 \ldots$, deren Projektionen auf die Koordinatenebenen

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\quad a_2,\ b_2,\ c_2;\quad a_3,\ b_3,\ c_3 \text{ u. s. w.}$$

heissen mögen, so kann man die Formel 2) auf jede derselben anwenden und es ergiebt sich durch Addition aller so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} & p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \cdots \\ & = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots) \cos \lambda \\ & + (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots) \cos \mu \\ & + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots) \cos \nu \end{aligned}$$

oder kürzer

3) $$P = A \cos \lambda + B \cos \mu + C \cos \nu;$$

dabei bezeichnet A die Summe der Projektionen aller Figuren auf die Ebene yz, ebenso B die Projektionssumme auf xz, C die Projektionssumme auf xy, endlich P die Projektionssumme auf die vierte Ebene, deren Stellungswinkel λ, μ, ν sind.

Die Formel 3) wollen wir benutzen, um die vorhandenen Figuren auf drei neue untereinander senkrechte Ebenen $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ zu projizieren; wir haben in diesem Falle der Reihe nach zu setzen:

$$\begin{aligned} P &= A', & \lambda &= (x'x), & \mu &= (x'y), & \nu &= (x'z); \\ P &= B', & \lambda &= (y'x), & \mu &= (y'y), & \nu &= (y'z); \\ P &= C', & \lambda &= (z'x), & \mu &= (z'y), & \nu &= (z'z); \end{aligned}$$

es entstehen so folgende drei Gleichungen:

4) $$\begin{cases} A' = A \cos(x'x) + B \cos(x'y) + C \cos(x'z), \\ B' = A \cos(y'x) + B \cos(y'y) + C \cos(y'z), \\ C' = A \cos(z'x) + B \cos(z'y) + C \cos(z'z). \end{cases}$$

Betrachtet man umgekehrt die Ebenen $y'z'$, $x'z'$, $x'y'$ als die primitiven und yz, xz, xy als die sekundären Projektionsebenen, ver-

tauscht also die accentuierten Buchstaben gegen die gleichnamigen nicht accentuierten, so ist entsprechend

$$5)\quad \begin{cases} A = A' \cos(xx') + B' \cos(xy') + C' \cos(xz'), \\ B = A' \cos(yx') + B' \cos(yy') + C' \cos(yz'), \\ C = A' \cos(zx') + B' \cos(zy') + C' \cos(zz'). \end{cases}$$

Zwischen den Cosinus der neun vorkommenden Winkel finden die schon in § 21 unter Nr. 2, 3, 5 und 6 erwähnten Beziehungen statt, mittels welcher man sehr leicht zu der folgenden Relation gelangt

$$6)\quad A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

hierin liegt der bemerkenswerte Satz, dass die Quadratsumme der Projektionen aller Figuren auf drei untereinander senkrechte Ebenen konstant bleibt, mithin von der Lage jener Ebenen unabhängig ist.

Aus Nr. 6) folgt:

$$7)\quad C' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - A'^2 - B'^2}$$

und hier erhält C' offenbar seinen grössten Wert für $A' = 0$ und $B' = 0$, was letzteres aus dem Grunde möglich ist, weil A' und B' Aggregate aus einzelnen Projektionen sind, die ebensowohl positiv als negativ sein können; der Ausdruck

$$8)\quad C' = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

giebt in diesem Falle den grössten Wert an, welchen die Gesamtprojektion aller Figuren auf eine Ebene $(x'y')$ überhaupt erhalten kann. Um die Lage dieser Ebene zu bestimmen, substituieren wir die Werte $A' = 0$, $B' = 0$ in die Gleichungen 5) und bezeichnen die Stellungswinkel der Ebene $x'y'$, um die es sich nur noch handelt, kurz mit α', β', γ'; dies giebt

$$9)\quad A = C' \cos\alpha', \quad B = C' \cos\beta', \quad C = C' \cos\gamma',$$

mit Rücksicht auf die Gleichung 8) folgen hieraus die Werte

$$10)\quad \begin{cases} \cos\alpha' = \dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\beta' = \dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\gamma' = \dfrac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{cases}$$

und damit ist die Stellung derjenigen Projektionsebene bestimmt, für welche die Summe der Projektionen aller gegebenen Figuren ihren Maximalwert erreicht.

Projiziert man dieselben Figuren noch auf eine andere von der vorigen verschiedene Ebene, deren Stellungswinkel λ, μ, ν sind, so hat man wie früher

$$P = A \cos\lambda + B \cos\mu + C \cos\nu$$

und durch Substitution der in Nr. 7) angegebenen Werte

$$P = C' (\cos\alpha' \cos\lambda + \cos\beta' \cos\mu + \cos\gamma' \cos\nu)$$

oder kurz

$$11) \qquad P = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \,.\, \cos\Theta,$$

wo Θ den Neigungswinkel der beliebigen Ebene gegen die Ebene der grössten Projektionssumme bedeutet. Die Gleichung 11) lässt unmittelbar erkennen, dass die Projektionssumme P für alle Ebenen dieselbe bleibt, welche gegen die Ebene der grössten Projektionssumme denselben Neigungswinkel Θ bilden. Für $\Theta = 90^0$ wird $P = 0$, also verschwindet die Projektionssumme für alle zu jener Ebene senkrechten Ebenen.

§ 48.

Die perspektivische Projektion.

Es sei eine feste Ebene OQ und vor derselben ein fester Punkt A gegeben; zieht man von diesem aus nach jedem beliebigen hinter der Ebene liegenden Punkte P eine Gerade AP, welche die Ebene in einem bestimmten Punkte Π schneidet, so heisst bekanntlich Π die perspektivische Projektion von P in Beziehung auf A als Projektionscentrum. Wir stellen uns nun die Aufgabe, die Lage von Π in der festen Ebene (Projektionsebene) zu finden, wenn die Lagen von A und P gegen jene Ebene bekannt sind.

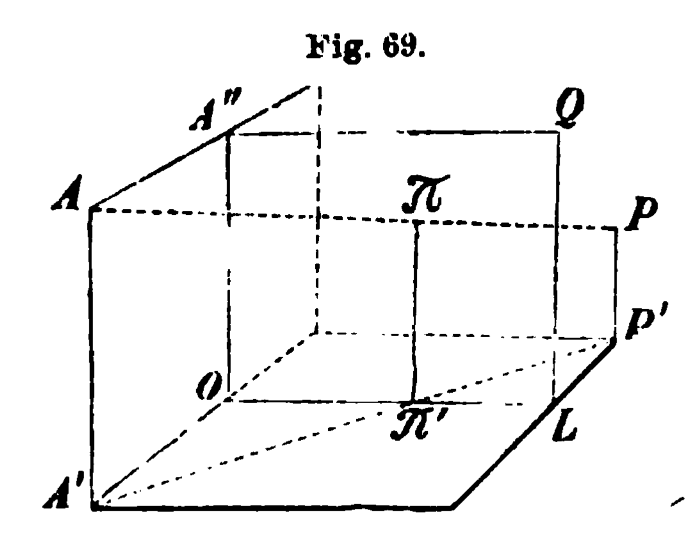


Fig. 69.

Die Projektionsebene OQ sei die Ebene xz, eine durch A senkrecht zu ihr gelegte Ebene $A'AA''$ die Ebene yz; auf dem Durchschnitte beider Ebenen (der z-Achse) wählen wir den Koordinatenanfang O willkürlich und legen durch ihn die Koordinatenebene xy senkrecht zur z-Achse. In Beziehung auf dieses rechtwinklige Koordinatensystem bezeichnen wir die Koordinaten von A mit 0, $OA' = g$, $OA'' = h$, und die von P mit $OL = x$, $LP' = -y$,

$P'P = z$; sind ferner ξ, η, ζ die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden AP, so haben wir als Gleichungen der letzteren

1) $$\eta = -\frac{y+g}{x}\xi + g, \quad \zeta = \frac{z-h}{x}\xi + h,$$

und daraus erhalten wir für $\eta = 0$ die Koordinaten von Π, welche $O\Pi' = \xi$, $\Pi'\Pi = \zeta$ heissen mögen. Die erste Gleichung liefert unmittelbar ξ, die zweite ζ, wenn man den Wert von ξ substituiert; die resultierenden Formeln sind:

2) $$\xi = \frac{gx}{g+y}, \quad \zeta = \frac{hy+gz}{g+y}.$$

Hieran knüpft sich von selbst die Bestimmung der Projektion einer beliebigen geraden oder krummen Linie. Man hat nämlich in diesem Falle zwei Gleichungen zwischen x, y, z; verbindet man sie mit den vorigen, so lassen sich x, y, z eliminieren und die übrig bleibende Gleichung zwischen ξ und ζ bestimmt die Projektion der Linie. Einige Beispiele hierzu sind folgende.

Für eine Gerade im Raume hat man

3) $$y = Bx + b, \quad z = Cx + c,$$

mithin

4) $$\xi = \frac{gx}{Bx+b+g}, \quad \zeta = \frac{(Bh+Cg)x+bh+cg}{Bx+b+g}$$

und durch Elimination von x

5) $$[B(c-h) - C(b+g)]\xi + (b+g)\zeta = bh + cg.$$

Die perspektivische Projektion einer Geraden ist demnach wieder eine Gerade, doch findet dabei die Eigentümlichkeit statt, dass die letztere Gerade, insoweit sie wirklich durch Projektion entsteht, nur eine endliche Ausdehnung erlangt, wenn auch die ursprüngliche Gerade sich hinter der Bildebene ins Unendliche erstreckt. Giebt man nämlich den Formeln 4) die Gestalt

$$\xi = \frac{g}{B + \frac{b+g}{x}}, \quad \zeta = \frac{Bh + Cg + \frac{bh+cg}{x}}{B + \frac{b+g}{x}}$$

und lässt x ins Unendliche wachsen, so nähern sich ξ und ζ den Grenzen

6) $$\xi_\infty = \frac{g}{B}, \quad \zeta_\infty = h + \frac{Cg}{B},$$

und nun sind die endlichen Grössen ξ_∞, ζ_∞ die Koordinaten der Projektion des unendlich entfernten Endpunktes der gegebenen Geraden. Da ferner in den Formeln 6) die Grössen b und c nicht mehr vorkommen, so bleiben ξ_∞ und ζ_∞ unveränderlich für alle Geraden, welche durch dieselben B und C und beliebige b, c bestimmt sind. Geometrisch heisst dies: die perspektivischen Projektionen eines Systemes paralleler Geraden vereinigen sich in einem Punkte ($\xi_\infty \zeta_\infty$); jeder solche Punkt heisst der Fluchtpunkt des entsprechenden Parallelensystemes. — Sind z. B. die Geraden in der xy-Ebene enthalten und senkrecht zur x-Achse, so hat man $B = tan\, 90^0 = \infty$, $C = 0$, mithin

$$\xi_\infty = 0, \quad \zeta_\infty = h;$$

die Projektionen aller in der xy-Ebene auf der x-Achse senkrechten Geraden laufen daher im Punkte A'', dem sogenannten Augenpunkte, zusammen. Liegen zweitens die Geraden in der xy-Ebene unter einem Winkel von 45^0 gegen die x-Achse, so hat man $B = tan\, 45^0 = 1$, $C = 0$, folglich

$$\xi_\infty = g, \quad \zeta_\infty = h;$$

der Fluchtpunkt des betreffenden Parallelensystemes befindet sich also auf der Geraden $A''Q /\!/ OL$ in der Entfernung g vom Augenpunkte; man pflegt ihn den Distanzpunkt zu nennen. Wenn drittens die Geraden die Richtung einer Würfeldiagonale haben, wie dies bei perspektivischen Schattenkonstruktionen vorkommt, sobald man sich die Lichtstrahlen von der Linken zur Rechten einfallend denkt, so gelten die Werte $B = tan\, 45^0 = 1$, $C = tan\, 135^0 = -1$, woraus

$$\xi_\infty = g, \quad \zeta_\infty = h - g.$$

Als zweite Anwendung diene die Bestimmung der perspektivischen Projektion eines in der xy-Ebene liegenden Kreises. Man hat für diesen Fall

$$7) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2, \quad z = 0;$$

aus den Formeln 2) erhält man wegen $z = 0$

$$x = \frac{h\xi}{h-\zeta}, \quad y = \frac{g\zeta}{h-\zeta}$$

und durch Substitution dieser Ausdrücke in die Kreisgleichung

$$8) \left\{ \begin{array}{c} h^2 + [a^2 + (b+g)^2 - c^2]\,\zeta^2 + 2ah\xi\zeta \\ -2ah\zeta\xi - 2[a^2 + b(b+g) - c^2]\,h\zeta + (a^2 + b^2 - c^2)\,h^2 = 0. \end{array} \right.$$

Der blosse Anblick dieser Gleichung lehrt, dass die Projektion im allgemeinen ein Kegelschnitt ist und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, jenachdem $b+g$ grösser, gleich oder kleiner als c ist. Für die Koordinaten des Mittelpunktes der Projektion findet man leicht:

$$p = \frac{a(b+g)g}{(b+g)^2 - c^2}, \quad q = \frac{[b(g+b) - c^2]h}{(b+g)^2 - c^2};$$

bezeichnet ferner ω den Winkel, welchen irgend eine der Hauptachsen mit der x-Achse einschliesst, so erhält man:

$$\tan 2\omega = \frac{2ah}{h^2 - [a^2 + (b+g)^2 - c^2]}.$$

Dieser Ausdruck ist für den Fall einer Ellipse leicht zu konstruieren; bildet man nämlich aus den Seiten

$$a, \quad \sqrt{(b+g)^2 - c^2}, \quad h$$

ein Dreieck und errichtet die zur Seite a gehörende Höhe, so teilt letztere die Seite a in zwei Teile und zwar ist der an der Seite $\sqrt{(b+g)^2 - c^2}$ liegende Abschnitt

$$k = \frac{a^2 + (b+g)^2 - c^2 - h^2}{2a},$$

mithin

$$\tan 2\omega = -\frac{h}{k},$$

woraus eine einfache Konstruktion für ω folgt.

Soll die Projektion zu einem Kreise werden, so muss der Koeffizient von $\xi\zeta$ verschwinden und der Koeffizient von ξ^2 gleich dem von ζ^2 sein; diese Bedingungen lauten:

$$a = 0, \quad h^2 = (g+b)^2 - c^2.$$

Die erste giebt zu erkennen, dass der Mittelpunkt des Kreises in einer Vertikalebene (yz) mit dem Projektionscentrum liegen muss; die zweite Bedingung enthält, wenn man sich g und h als veränderlich denkt, den bemerkenswerten Satz, dass alle Projektionscentra, von welchen aus gesehen der gegebene Kreis wiederum als Kreis erscheint, auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, deren Halbachse c und deren Scheitel der Koordinatenanfang ist.

Wir haben endlich noch zu erörtern, was man unter der perspektivischen Projektion einer Fläche verstehen soll. Denkt man sich von dem Projektionscentrum aus an die Fläche alle möglichen Tangenten gezogen, so bilden diese in ihrer stetigen Auf-

einanderfolge eine Kegelfläche; letztere wird von der Projektionsebene in einer bestimmten Kurve geschnitten und diese muss nun als perspektivische Abbildung der ursprünglichen Fläche gelten. Um hiervon eine Anwendung auf die Projektion der Kugelfläche zu machen, sei

$$(x-a)^2+(y+b)^2+(z-c)^2=k^2$$

die Gleichung dieser Fläche; irgend eine durch das Projektionscentrum gehende Gerade wird durch die Gleichungen

$$9)\qquad \eta = P\xi + g, \quad \zeta = Q\xi + h$$

ausgedrückt und berührt die Kugelfläche, wenn die Bedingung

$$10)\quad \begin{cases} (1+P^2+Q^2)k^2 \\ =(Pa+g+b)^2+(Qa+h-c)^2+[P(h-c)-Q(g+b)]^2 \end{cases}$$

erfüllt ist, wie man am leichtesten mittels der Bemerkung findet, dass der Abstand einer Tangente vom Kugelmittelpunkte jederzeit dem Kugelhalbmesser gleich sein muss. Eliminiert man P und Q aus den beiden letzten Gleichungen, indem man die Werte

$$P=\frac{\eta-g}{\xi}, \quad Q=\frac{\zeta-h}{\xi}$$

in Nr. 10) einsetzt, so charakterisiert die neue Gleichung

$$11)\quad \begin{cases} [\xi^2+(\eta-g)^2+(\zeta-h)^2]k^2 \\ =[a(\eta-g)+(g+b)\xi]^2+[a(\zeta-h)+(h-c)\xi]^2 \\ \quad +[(h-c)(\eta-g)-(g+b)(\zeta-h)]^2 \end{cases}$$

diejenigen Kegelfläche, welche ihren Mittelpunkt im Projektionscentrum hat und ausserdem die gegebene Kugel berührt (die projizierende Kegelfläche). Die Gleichung der Kugelprojektion ergiebt sich hieraus für $\eta=0$, nämlich

$$12)\quad \begin{cases} k^2[\xi^2+g^2+\zeta^2] \\ =[-ag+(g+b)\xi]^2+[a(\zeta-h)+(h-c)\xi]^2 \\ \quad +[g(h-c)+(g+b)(\zeta-h)]^2, \end{cases}$$

und diese Gleichung lässt erkennen, dass die Projektion der Kugelfläche im allgemeinen eine Ellipse ist, welche nur in dem speziellen Falle $a=0$ und $c=h$ zu einem Kreise werden kann.





